

Els nombres reals

Els nombres racionals (Q)

- Un nombre racional $\{a/b\}$ és el conjunt format per una fracció a/b i totes les que li són equivalents. Cada una d'aquestes fraccions és una representant del nombre racional a/b . Per exemple:

$$\left\{\frac{1}{3}\right\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \dots\right\}$$

- Qualsevol nombre decimal es pot representar mitjançant una expressió decimal periòdica. Per exemple: $3,56 = 3,560000\dots$

- Tot nombre decimal periòdic es pot escriure en forma de fracció. Per exemple: $1,6666\dots = \frac{5}{3}$.

Els nombres irracionals (I)

- Les expressions decimals no periòdiques s'anomenen **nombres irracionals** i no es poden expressar en forma de fracció. Per exemple: $\pi = 3,1415192\dots$; $\sqrt{2} = 1,414213\dots$

Els nombres reals (R)

- El conjunt resultant dels nombres racionals i irracionals és el conjunt de **nombres reals**: $R = Q \cup I$.

Aproximacions de nombres reals

- Aproximació d'un nombre real és un valor pròxim al seu valor real. Poden ser per excés (si són més grans que el valor real) o per defecte (si són més petits).
- Xifres significatives són les xifres decimals que es tenen en compte; l'última xifra significativa correspon a la del seu ordre d'aproximació.
- L'arrodoniment aproxima a l'ordre donat amb la xifra significativa més propera; el truncament interromp el nombre decimal i no té en compte la primera xifra suprimida.

Errors en les aproximacions de nombres reals

- **Error absolut** és la diferència, en valor absolut, entre el valor real i el valor aproximat d'un nombre real.
- **Error relatiu** és la relació entre l'error absolut d'una aproximació i el seu valor real, expressada en tant per cent.

Successions de nombres reals

- Una **successió** és un conjunt de nombres reals ordenats. El límit d'una **successió** és el nombre al qual tendeix aquesta quan es calculen termes molt elevats.
- Una successió forma una **progressió aritmètica** si cada terme s'obté sumant al terme anterior un valor real i constant. Per exemple: $-1, 1, 3, 5, 7, 9, \dots$ (cada terme s'obté sumant 2 a l'anterior).
- Una successió forma una **progressió geomètrica** si cada terme s'obté multiplicant al terme anterior un valor real i constant. Per exemple: $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ (cada terme s'obté multiplicant per $\frac{1}{2}$ el terme anterior).

1. Operacions amb nombres reals



Activitats resoltes

1 Calcula: $\left(\frac{6}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) : \left(4 - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3}$

Primer, resollem els parèntesis: m.c.m. (5, 4, 8) = 40 m.c.m. (1, 5) = 5

$$\frac{6}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{48}{40} - \frac{30}{40} - \frac{5}{40} = \frac{13}{40}$$

$$4 - \frac{2}{5} = \frac{20}{5} - \frac{2}{5} = \frac{18}{5}$$

En segon lloc, fem la divisió i simplifiquem si és possible:

$$\frac{13}{40} : \frac{18}{5} = \frac{65}{720} = \frac{13}{144}$$

Finalment, fem la suma: m.c.m. (144, 3) = 144

$$\frac{13}{144} + \frac{1}{3} = \frac{13}{144} + \frac{48}{144} = \frac{61}{144}$$

2 Obten la fracció generatriu dels nombres decimals següents:

a) 3,65

b) $3,\overline{89}$

c) $3,\overline{589}$

Nombre decimal exacte	Nombre decimal periòdic pur	Nombre decimal periòdic mixt
3,65 F = 3,65	$3,\overline{89}$ F = $3,\overline{89}$	$3,\overline{589}$ F = $3,\overline{589}$
$100F = 365$ $F = 365/100 = 73/20$	$100F = 389,\overline{89}$ $100F - F = 389,\overline{89} - 3,\overline{89}$ $99F = 386$ $F = 386/99$	$1000F = 3589,\overline{89}$ $10F = 35,\overline{89}$ $1000F - 10F = 3589,\overline{89} - 35,\overline{89}$ $990F = 3554$ $F = 3554/990 = 1777/495$



Activitats proposades

3 Calcula: $\left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{6} : 5 - 3\right)^3$

4 Calcula les expressions decimals dels nombres racionals següents:

a) $\frac{8}{5}$
b) $\frac{43}{25}$

c) $\frac{5}{11}$
d) $\frac{7}{6}$

5 Classifica les següents expressions decimals segons que siguin decimals exactes (DE), periòdic (PP). Periòdics mixtos (PM) o no periòdics (NP):

- a) 3,45
- b) 3,454632345...
- c) 3,45454545...
- d) 3,2454545.....
- e) $0,2\widehat{46}$
- f) 0,246
- g) $0,24\widehat{6}$
- h) 0,24684573232.....

6 Troba les fraccions generatrius irreductibles dels nombres decimals següents:

- a) 12,35353535.....
- b) 5,244
- c) 8,23666666.....

7 Converteix a fraccions irreductibles cada un dels nombres decimals següents i calcula:

- a) $(5,\widehat{6})^2$
- b) $2,2 + 2,\widehat{2} + 2,0\widehat{2}$
- c) $7,5 \times (3,3 - 1,2\widehat{6})$
- d) $(1,0\widehat{2})^3$

8 Una aixeta omple un dipòsit d'aigua en 3 hores i una altra ho fa en 4 hores.

- a) Quina fracció de dipòsit ompliran les dues aixetes juntes en una hora?.
- b) Quant de temps tardaran les dues aixetes juntes a omplir el dipòsit?.

9 Amb l'ajut de la calculadora, busca el valor de les arrels quadrades següents. En quins casos tenen nombres irracionals?

- a) $\sqrt{5}$
- b) $\sqrt{8}$
- c) $\sqrt{81}$
- d) $\sqrt{61}$

10 Busca tres nombres irracionals compresos entre 2 i 3.

1.2 Aproximacions de nombres reals



Activitats resoltes

11 Fes aproximacions per defectes, per excés i per arrodoniment dels nombres indicats, amb cap, una, dues i tres xifres significatives.

Nombres	Per defectes	Pes excés	Per arrodonimet
$\pi = 3,14159\dots$	$3 - 3,1 - 3,14 - 3,141$	$4 - 3,2 - 3,15 - 3,142$	$3 - 3,1 - 3,14 - 3,142$
$e = 2,71828\dots$	$2 - 2,7 - 2,71 - 2,718$	$2 - 2,8 - 2,72 - 2,719$	$3 - 2,7 - 2,72 - 2,718$
$\sqrt{2} = 1,41421\dots$	$1 - 1,4 - 1,41 - 1,414$	$2 - 1,5 - 1,42 - 1,415$	$1 - 1,4 - 1,41 - 1,414$

12 Completa aquesta taula:

Valor aproximat	Xifres significatives	Ordre d'aproximació	Notació científica
25,13	2	Centèsimes	$2,513 \cdot 10^1$
14	0	Unitats	$1,4 \cdot 10^1$
6,369	3	Mil·lèsimes	$6,369 \cdot 10^0$
544,2	1	Dècimes	$5,442 \cdot 10^2$
0,0336	4	Deumil·lèsimes	$3,36 \cdot 10^{-2}$
7,99	2	centèsimes	$7,99 \cdot 10^0$



Activitats proposades

13 Escriu una aproximació per defecte, amb cinc xifres decimals, de 23,707.

RECORDA

Les xifres significatives vénen donades per les xifres decimals

14 Escriu una aproximació per excés, amb quatre xifres decimals, de 8,23.

L'ordre d'aproximació és el que correspon a l'última xifra.

La notació científica té la forma: $N \cdot 10^K$, on N és un nombre decimal amb la part entera d'una xifra.

RECORDA

15 Sabent que π (3,1415925635897.....)

a) Escriu un interval tancat que el contingui:

In interval tancat $[]$ inclou el valor dels límits que el formen.

b) Digues com són les aproximacions a π dels extrems dels intervals

c) Escriu un interval obert que el contingui:

Un interval obert $()$ exclou el valor dels límits que el formen.

16 Completa aquesta graella:

Valors aproximats	Xifres significatives	Ordre d'aproximació	Notació científica
200.000			
74.400			
8.320			
7.600.000			
365.000			
90			

17 Arrodoneix cada nombre a l'ordre indicat:

- a) 2,46634 (mil·lèsimes)

b) 5,366 (dècimes)

c) 356,75 (unitats)
- d) 0,349 (centèsimes)

e) 529 (desenes)

f) 7,844399 (deumil·lèsimes)

18 Aproxima fins a les mil·lèsimes els nombres decimals següents, utilitzant l'arrodoniment i el truncament:

- a) 7,3391

b) 12,0088
- c) 1,00782

d) 0,9985

RECORDA

El truncament interromp el nombre decimal i no té en compte la primera xifra suprimida

19 Amb una calculadora s'ha trobat que $\sqrt{80} = 8,944271909 \dots$ següents són certes?.

- a) Els truncaments a centèsimes és 8,94

b) L'arrodoniment a mil·lèsimes és 8,945

c) L'arrodoniment a dècimes és 8,9

d) Una aproximació per defecte, amb tres xifres decimals, és 8,945

e) Una aproximació per excés, amb dues xifres decimals és 8,94

f) L'arrodoniment a unitats és 9.
- C - F

C - F

C - F

C - F

C - F

C - F

20 Converteix en certes les afirmacions que hagin resultat falses a l'exercici anterior:

21 Quant mesura la diagonal d'un rectangle si la seva alçada fa 9 cm i la seva altura 6 cm? Troba les expressions decimals per defecte i per excés, amb una i dues xifres decimals en cada cas.

22 Tenint en compte les xifres significatives i els ordres d'aproximació, quina diferencia hi ha entre aquestes dues expressions:

a) El cotxe que m'agrada val uns 21.700 €

b) El cotxe que m'agrada val exactament 21.700 €

1.3 Errors en les aproximacions de nombres



Activitats resoltes

23 En mesurar un hectòmetre hem obtingut 100,74 m. Calcula l'error absolut i l'error relatiu d'aquesta mesura.

- L'error absolut és: $E_A = 100,74 - 100 = 0,74$
L'error absolut és de 0,74 m (74 cm).
- L'error relatiu és: $E_R = 0,75 / 100 = 0,0074 = 0,74 \%$



Activitats proposades

24 Hem aproximat el pes de 5,748 Kg als decagrams. Quin error absolut i quin de relatiu hem comès?.

25 Quin d'aquest dos errors és més greu: mesurar 60,3 s en comptar un minut o mesurar 995 m en comptar un quilòmetre?.

26 Quina diferència hi ha entre la mesura de 23,45 m i 23,450 m? Relaciona la resposta amb el concepte de fita d'error.

27 En calcular $\sqrt{45}$ s'aproxima l'arrel a 6,71.

- a) Quin tipus d'aproximació s'ha fet i quin ordre d'aproximació es fa servir?
- b) Calcula l'error absolut comès.
- c) Calcula l'error relatiu comès.

1.4 Sucessions de nombres reals



Activitats resoltes

28 Determina quina d'aquestes successions és una progressió aritmètica i quina és una progressió geomètrica. En cada cas, continua-les amb tres termes més:

- a) -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, b) $10, \frac{19}{2}, 9, \frac{17}{2}, 8, \dots$ c) 3, 6, 12, 24,

- a) És una progressió aritmètica en què cada terme s'obté sumant 3 al terme anterior:

-3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24,

- b) És una progressió aritmètica en què cada terme s'obté sumant $-\frac{1}{2}$ al terme anterior:

$10, \frac{19}{2}, 9, \frac{17}{2}, 8, \frac{15}{2}, 7, \frac{13}{2}, \dots$

- c) És una progressió geomètrica en què cada terme multiplicant el terme anterior per 2:

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192,



Activitats proposades

29 Determina quina d'aquestes successions és una progressió aritmètica i quina és una progressió geomètrica. En cada cas, continua-les amb tres termes més:

- a) -200, 100, -50, 25,
- b) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,
- c) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}, \dots$
- d) 30, 13, -4, -21, -38,

Potències i radicals

Potències d'exponent enter

Si a és un nombre real diferent de zero i n és un nombre enter: $a^n = a \cdot \dots \cdot a$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Operacions amb potències:

Operacions amb potències de la mateixa base		Operacions amb potències del mateix exponent	
Producte	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Potència d'un producte	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
Quocient	$a^m : a^n = a^{m-n}$	Potència d'un quocient	$(a : b)^m = a^m : b^m$
Potència d'una potència	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	En tots els casos, per a i b , nombres reals, i m i n , nombres enters.	

Notació científica:

Un nombre N escrit en **notació científica** és un producte indicat de la forma:

$$N = n \cdot 10^k$$

on n és un nombre decimal la part entera del qual només té una xifra diferent de zero i 10^k és una potència amb exponent enter.

Radicals. Potències d'exponent fraccionari

En general: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$, per n nombre natural diferent de zero; i m nombre enter.

Si dues potències d'exponent fraccionari tenen la mateixa base i els exponents equivalents, les potències són equivalents.

Dos radicals són equivalents si les potències corresponents també ho són.

Es poden obtenir radicals equivalents per **ampliació** o per **simplificació** si, respectivament es multipliquen o divideixen l'índex i l'exponent del radical per un mateix nombre, diferent de zero.

Per reduir radicals a índex comú, es calcula el mínim comú múltiple (m.c.m.) dels índexs i es van obtenint els radicals equivalents als donats, l'índex dels quals és el (m.c.m.) de tots els índexs.

Operacions amb radicals

Producte de radicals del mateix índex		$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	
Introducció/extracció de factors iguals d'un radical		$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	
Quocient de radicals del mateix índex		$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$	
Potència d'un radical	Arrel d'un radical	$(\sqrt[n]{a^m})^r = \sqrt[n]{a^{mr}}$	$\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n}$
Suma i resta de radicals semblants		$a \sqrt[n]{b} \pm c \sqrt[n]{b} = (a \pm c) \sqrt[n]{b}$	
Suma i resta de radicals no semblants		L'operació es deixa indicada	

Racionalitzar un denominador irracional consisteix a trobar una fracció equivalent que no tingui radicals al denominador. Es tracta de trobar una expressió que, multiplicada pel denominador, doni un producte que no tingui radicals.

2. Potències d'exponents enter



Activitats resoltes

1

Calcula i expressa el resultat com a potència d'exponent positiu:

a) $5^3 \cdot 5^{-2} \cdot 5^{-1}$

b) $a \cdot a^7 \cdot a^{-9}$

a) $5^3 \cdot 5^{-2} \cdot 5^{-1} = 5^{3+(-2)+(-1)} = 5^0 = 1$

b) $a \cdot a^7 \cdot a^{-9} = a^{1+7+(-9)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

2

Simplifica i expressa el resultat amb exponent positiu: $(a^4 \cdot a^5) : (a^5 \cdot a^6)$

$$(a^4 \cdot b^5) : (a^5 \cdot b^6) = (a^4 : a^5) \cdot (b^5 : b^6) = (a^{4-5}) \cdot (b^{5-6}) = a^{-1} \cdot b^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

3

Escriu en notació científica els nombres següents:

a) 2 000 000

b) 0,0784

a) $2\,000\,000 = 2 \cdot 1\,000\,000 = 2 \cdot 10^6$

b) $0,0784 = 784 \cdot 10^{-4} = 7,84 \cdot 10^{-2}$



Activitats proposades

4

Expressa amb exponent positiu el resultat de les operacions següents:

a) $\left(2 - \frac{1}{3}\right)^{-2}$

d) $x^{-4} \cdot x^{-7} \cdot x^9$

b) $\left(2,1 - \frac{1}{2}\right)^{-3}$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} : \left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$

f) $[(-m)^2]^{-2}$

5

Simplifica i expressa el resultat amb exponent positiu:

a) $(x^7 : x^5) : (x^9 : x^6)$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$

b) $\left[\left(-\frac{5}{4}\right)^8 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^{-3}\right] : \left[\left(-\frac{5}{4}\right)^2\right]^3$

d) $(m^3)^5 : [(m^2)^{-4} \cdot m^{24}]$

6

Expressa en forma d'exponent negatiu:

a) 3^4

c) $(-2)^8$

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^1$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^6$

7

Calcula expressant el resultat com a potència d'exponent positiu:

a) $(-8)^{-5} : (-8)^{-3}$

c) $(4^{-1})^{-2}$

b) $(-m)^{-8} : (-m)^{-7}$

d) $[(-2)^{-3} \cdot (-2)^{-5}] / [(-2)^{-4} \cdot (-2)^{-2}]$

8

Escriu en notació científica els nombres següents:

a) 47

c) 0,0002197

b) 34 200

d) 0,0000036

9

Transforma a nombre enter o decimal:

a) $7 \cdot 10^4$

d) $5,03 \cdot 10^7$

b) $6,7 \cdot 10^{-3}$

e) $9,805 \cdot 10^{-6}$

c) $1,006 \cdot 10^3$

f) $4,58 \cdot 10^{-2}$

10

La circumferència màxima de la Terra és de $4,005384 \cdot 10^4$ km. Expressa aquesta longitud en notació científica si les unitats vinguessin donades en metres.

2.1 Radicals. Potències d'exponents fraccionari



Activitats resoltes

11

Expressa en forma d'exponent fraccionari:

a) $\sqrt{6^4}$

b) $\sqrt[3]{7}$

c) $\sqrt[4]{(-3)^5}$

a) $\sqrt{6^4} = 6^{4/2} = 6^2$

b) $\sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$

c) $\sqrt[4]{(-3)^5} = (-3)^{5/4}$

12

Comprova si els radicals següents són equivalents:

a) $\sqrt{27}$ i $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{24}$ i $\sqrt{12}$

a) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$ Per tant, $3\sqrt{3}$ és equivalent a $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{24} = \sqrt{(2^3 \cdot 3)} = 2\sqrt{6}$ $\sqrt{12} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{3}$

Per tant, $\sqrt{24}$ i $\sqrt{12}$ no són equivalents.

13

Redueix a índex comú els radicals següents:

a) $\sqrt{x}$ i $\sqrt[3]{x}$

b) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{8}$ i $\sqrt[3]{9^2}$

a) El m.c.m. dels índexs (2, 3) és 6. Els radicals equivalents són: $\sqrt[6]{x^3}$ i $\sqrt[6]{x^2}$

b) El m.c.m. dels índexs (2, 4, 3) és 12. Els radicals equivalents són: $\sqrt[12]{5^6}$ $\sqrt[12]{8^3}$ $\sqrt[12]{9^8}$



Activitats proposades

14 Expressa en forma de potència d'exponent fraccionari:

a) $\sqrt[3]{9^2}$

d) $\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt{5^4}$

e) $\sqrt[9]{6^3}$

c) $\sqrt[14]{\left(-\frac{2}{7}\right)^7}$

f) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^4}$

15 Comprova si els radicals següents són equivalents:

a) $\sqrt{8}$ i $\sqrt[4]{64}$

c) $\sqrt[4]{16}$ i $\sqrt{8}$

b) $\sqrt[3]{1000}$ i $\sqrt{100}$

d) $\sqrt{72}$ i $\sqrt[4]{288}$

16 Redueix a índex comú els radicals següents:

a) $\sqrt{x^3}$ i $\sqrt[4]{x^4}$

d) $\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{y}$, $\sqrt[3]{y^2}$ i $\sqrt[4]{y^3}$

e) $\sqrt[3]{4^2}$ i $\sqrt[4]{10}$

c) $\sqrt{4^2}$ i $\sqrt[3]{V^{10}}$

f) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{8}$ i $\sqrt[9]{9^2}$

17 Introdueix els factors en el signe radical:

a) $5\sqrt{6}$

c) $4\sqrt[3]{7}$

e) $x^2\sqrt{x}$

b) $-3\sqrt[3]{x}$

d) $y\sqrt{7}$

f) $-2\sqrt[5]{3}$

2.3 Operacions amb radicals. Racionalització



Activitats resoltes

18 Redueix a índex comú i calcula:

a) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{18} + 2\sqrt{50}$

b) $3\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{20}$

c) $\sqrt[9]{125} : \sqrt[6]{25}$

a) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{18} + 2\sqrt{50} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{(3^2 \cdot 2)} + 2\sqrt{(5^2 \cdot 2)} = 5\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{20} = (3 \cdot 2) \cdot \sqrt{(8 \cdot 20)} = 6 \cdot \sqrt{160} = 6 \cdot \sqrt{(2^5 \cdot 5)} = 6 \cdot 4\sqrt{(2 \cdot 5)} = 24\sqrt{10}$

c) $\sqrt[9]{125} : \sqrt[6]{25} = \sqrt[18]{125^2} : \sqrt[18]{25^3} = \sqrt[18]{(5^3)^2} : \sqrt[18]{(5^2)^3} = \sqrt[18]{5^6} : \sqrt[18]{5^6} = \sqrt[18]{(5^6 : 5^6)} = \sqrt[18]{1} = 1$

19 Racionalitza els denominadors d'aquestes fraccions i simplifica el resultat obtingut quan sigui possible:

a) $\frac{-3}{4\sqrt{2}}$

b) $\frac{4}{(3 + \sqrt{5})}$

c) $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}$

a) $\frac{-3}{4\sqrt{2}} = \frac{(-3 \cdot \sqrt{2})}{(4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})} = \frac{(-3\sqrt{2})}{8}$

b) $\frac{4}{(3 + \sqrt{5})} = \frac{[4 \cdot (3 - (3 + \sqrt{5})5)]}{[(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5})]} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{(9 - 5)} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{4} = 3 - \sqrt{5}$

c) $\frac{[(\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})]}{[(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})]} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{(3 - 5)} = \frac{(3 + 5 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5})}{(-2)} = \frac{(8 - 2\sqrt{15})}{(-2)} = -4 + \sqrt{15}$



Activitats proposades

20 Calcula:

a) $\frac{5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + (5\sqrt{3})}{3}$

e) $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{256}$

b) $\sqrt{18} + \sqrt{8}$

f) $\frac{5}{\sqrt{x}}$

c) $3\sqrt{a^2b} \cdot \sqrt[4]{ab^3}$

g) $\frac{-3}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$

d) $\sqrt{xy} : \sqrt[4]{x^2y^3}$

h) $\frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)}$

- 21** Calcula el perímetre d'un quadrat la diagonal del qual mesura 36 cm. Expressa el resultat en forma de radical.

RECORDA

***Teorema de Pitàgores:** En un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat equival a la suma dels quadrats dels catets.*

- 22** L'altura d'un triangle equilàter mesura 15 cm. Calcula'n l'àrea i expressa el resultat en forma de radical.

- 23** La diagonal d'un rectangle mesura 20 cm i sabem que la base és el doble que l'altura. Calcula'n el perímetre i expressa el resultat en forma de radical.

Polinomis

14

Potències d'exponent enter

- Un **monomi** és l'expressió algebraica de forma ax^n , on a (coeficient), x (variable) i n (grau). Dos monomis són **semblants** si tenen la mateixa variable i el mateix grau.
- Dos monomis units per una suma o una resta formen un **binomi**; el conjunt de tres monomis formen un **trinomi**. En general anomenem **polinomi** el conjunt format per més de tres monomis.
- Un polinomi A de grau n i variable x s'expressa $A(x)$, on n és el grau més alt de tots els monomis. Un polinomi és **complet** si té monomis de tots els graus, des de n fins a **zero**.

Suma i diferència de polinomis

- Per **sumar polinomis**, se sumen els coeficients dels monomis semblants; els altres es deixen indicats. Per restar polinomis, s'efectua: $A(x) - B(x) = A(x) + [-B(x)]$.

- **Propietats de la suma de polinomis:**

- ☐ **Commutativa:**

$$A(x) + B(x) = B(x) + A(x)$$

- ☐ **Associativa:**

$$A(x) + [B(x) + C(x)] = [A(x) + B(x)] + C(x)$$

- ☐ **Element neutre o polinomi nul:**

$$A(x) + O(x) = A(x)$$

- ☐ **Element simètric o polinomi oposat:**

$$A(x) + [-A(x)] = O(x)$$

Producte de polinomis

- Per **multiplicar dos monomis**, cal que els termes tinguin la mateixa variable. Es multipliquen entre si els coeficients i se sumen els graus de la variable comuna.
- Per **multiplicar un polinomi per un monomi** cal multiplicar el monomi per cada un dels termes del polinomi. Per **multiplicar dos polinomis**, cal multiplicar cada terme del polinomi del primer factor per cada terme del polinomi del segon factor, reduint el polinomi resultant.

- **Propietats del producte de polinomis:**

- ☐ **Commutativa:**

$$A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$$

- ☐ **Associativa:**

$$A(x) \cdot [B(x) \cdot C(x)] = [A(x) \cdot B(x)] \cdot C(x)$$

- ☐ **Element neutre o polinomi unitat:**

$$A(x) \cdot 1 = A(x)$$

- ☐ **Distributiva del producte respecte de la suma i la resta:**

$$A(x) \cdot [B(x) + C(x)] = A(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot C(x).$$

Igualtats notables

- • Quadrat d'un binomi: $(ax + b)^2 = (ax)^2 + 2(ax)(b) + (b)^2$
- Cub d'un binomi: $(ax + b)^3 = (ax)^3 + 3(ax)^2(b) + 3(ax)(b)^2 + (b)^3$
- Producte de binomis conjugats: $(ax + b)(ax - b) = (ax)^2 - (b)^2$

Divisió de polinomis

- Per dividir dos monomis, cal que els termes tinguin la mateixa variable: Es divideixen entre si els coeficients i es resten els graus de la variable comuna, sempre que aquesta diferència sigui ≥ 0 .
- Per dividir un polinomi entre un monomi $[D(x) : d(x)]$ cal que el dividend estigui ordenat. A continuació es divideix cada un dels termes del polinomi entre el monomi del divisor. Si el residu $R(x)$ és 0 la divisió és **exacta**; en cas contrari la divisió serà entera. En general:
 $D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$, on $Q(x)$ és el quocient.
- Per dividir dos polinomis caldrà seguir aquests passos:
 1. El grau del dividend serà més gran o igual que el del divisor.
 2. Els polinomis s'ordenen decreixentment, completant amb zeros els termes que faltin.
 3. Dividir el primer terme del dividend entre el primer terme del divisor; el quocient obtingut formarà part del quocient final, mentre que el residu d'aquesta divisió s'afegirà al següent terme del dividend.
 4. Repetir aquest procés fins a arribar a un residu de grau inferior al divisor.

Regla de Ruffini

- El quocient de dividir un polinomi $P(x)$ de grau n entre el binomi $(x - a)$ és un altre polinomi de grau $n-1$, ordenat de forma decreixent, els coeficients del qual són:
 - ☐ El primer coeficient és igual que el primer coeficient del dividend.
 - ☐ Cada un dels altres coeficients s'obté multiplicant el coeficient anteriors per a , i a continuació sumar-hi el corresponent coeficient del dividend.
 - ☐ L'últim valor obtingut és el residu de la divisió.

Valor numèric d'un polinomi. Teorema del residu

- El valor del polinomi $A(x)$ per a un valor determinat n de la variable equival al resultat de les operacions corresponents en substituir x per n en els termes del polinomi donat.
- **Teorema del residu:** El valor del polinomi $A(x)$, quan $x = n$, equival al residu de la divisió

$$A(x) : (x - n).$$

Arrels i factorització d'un polinomi

- Es diu que n és una arrel del polinomi $A(x)$ si $A(n) = 0$. En general, un polinomi de grau n pot tenir, com a màxim, n arrels.
- Qualsevol arrel entera d'un polinomi és divisora del seu terme independent.
- Per factoritzar un polinomi de grau n cal convertir-lo en productes de monomis i/o polinomis els graus dels quals són inferiors a n . En cas contrari, el polinomi és irreductible.

3. Conceptes bàsics



Activitats resoltes

- 1** Indica el grau del polinomi següent i escriu-lo de forma creixent:

$$A(x) = x^2 - 3x^3 + 5 - 2x^4$$

— El seu grau és 4, ja que és l'exponent més gran.

— Ordenat de forma creixent queda així: $5 + x^2 - 3x^3 - 2x^4$

- 2** Redueix els termes que siguin semblants:

$$A(x) = 3 - 4x + 3x^2 - 12 - 3x + 5x^2 + x^3$$

— Els termes semblants entre si són: 3 i -12, -4x i -3x, $3x^2$ i $5x^2$. Per tant:

$$A(x) = x^3 + (5 + 3)x^2 + (-4 - 3)x + (3 - 12) = x^3 + 8x^2 - 7x - 9$$



Activitats proposades

- 3** Indica el grau de cada un d'aquests polinomis i escriu-los de forma creixent:

a) $A(t) = 8 + 3t - 5t^2 + t^3 - t^5 + t^4$

b) $B(v) = v^2 - 3v + 8 - 7v^3 + 5v^5$

- 4** Redueix els termes que siguin semblants:

a) $A(x) = 3a - 4bx + 3b - 6b - 3bx$

b) $B(a, b) = 4ab^2 + 2a^2b - 5a^2b + 2ab^2$

c) $C(b, c) = \frac{3bc}{4} + \frac{4c}{9} + \frac{5bc}{12} - \frac{11c}{12}$

d) $P(x) = 3x - (2x + 8) - (x^2 + 3x)$

e) $Q(x) = 7 + (x^2 - 3) - (x + 3)$

3.2 Suma i diferència de polinomis.



Activitats resoltes

5

Calcula $A(x) + B(x) - C(x)$, sabent que $A(x) = -3x + 5x^2 + 7 - x^3$, $B(x) = -x^4 + 5x^2 - 3x$ i que $C(x) = \frac{2x^2}{3} - 4x + 8 + 2x^4$.

$$A(x) + B(x) - C(x) = (-3x + 5x^2 + 7 - x^3) + (-x^4 + 5x^2 - 3x) - \left(\frac{2x^2}{3} - 4x + 8 + 2x^4\right)$$

Eliminem parèntesis i agrupem els termes semblants:

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) - C(x) &= -3x + 5x^2 + 7 - x^3 - x^4 + 5x^2 - 3x - \frac{2x^2}{3} + 4x - 8 - 2x^4 = \\ &= -3x^4 - x^3 + \frac{28x^2}{3} - 2x - 1 \end{aligned}$$



Activitats proposades

6

Calcula, amb els polinomis de l'activitat anterior:

a) $A(x) - B(x) + C(x)$

b) $-B(x) - [A(x) + C(x)]$

c) $-A(x) - B(x) - C(x)$

7

Comprova, amb els polinomis A i B de l'activitat anterior, la propietat commutativa de la suma.

3.3 Producte de polinomis.



Activitats resoltes

8

Tenim els polinomis següents: $A(x) = -x^3 + 5 - 2x^2$, $B(x) = 3x^3 - x^2 + 7$ i $C(x) = 4 - 3x + 5x^2 - x^3 + x^4$. Calcula $A(x) \cdot B(x)$.

Multipliquem cada terme del polinomi del primer factor per cada terme del polinomi del segon factor, i finalment reduïm el polinomi resultant.

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (-x^3 + 5 - 2x^2) \cdot (3x^3 - x^2 + 7) = -7x^3 + 35 - 14x^2 + 2x^4 - 5x^2 + x^5 - 6x^5 + \\ &\quad 15x^3 - 3x^6 = -3x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 8x^3 - 19x^2 + 35 \end{aligned}$$



Activitats proposades

9

Calcula, amb els polinomis de l'activitat anterior:

a) $B(x) \cdot C(x)$

b) $A(x) \cdot B(x) \cdot C(x)$

c) $A(x) \cdot [B(x) - C(x)]$

- 10** Comprova, amb els polinomis A , B i C de les activitats anteriors, la propietat associativa del producte de polinomis.

3.4 Igualtats notables.



Activitats resoltes

11

Calcula:

a) $(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

b) $(2x - 5)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot 2x \cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

c) $(-3 + 4y)(3 + 4y) = (-3)^2 - (4y)^2 = 9 - 16y^2$



Activitats proposades

12

Calcula:

a) $(5 + 2y)^2$

e) $(-2 + 4t)^3$

b) $(3x - 4y)^2$

f) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^3$

c) $(2x + 5t)^2$

g) $(3x + 5)(3x - 5)$

d) $\left(3xy - \frac{2t}{3}\right)^2$

h) $\left(\frac{x^2}{3} - 2x\right)\left(\frac{x^2}{3} + 2x\right)^3$

13

Expressa els polinomis següents en forma de producte o potència:

a) $x^2 - y^2$

c) $9x^2 - 30xy + 25y^2$

b) $\frac{x^2}{9} - 9y^2$

d) $\frac{a^2}{4} + 3ax^2 + 9x^4$

3.5 Divisió de polinomis.



Activitats resoltes

14

Calcula: $(9a^3 + 3a^2 + a - 1) : (3a - 1)$

Primer comprovem que el grau del dividend és més gran o igual que el del divisor i que els polinomis estan ordenats decreixentment; cal completar amb zeros els termes que faltin.

$$\begin{array}{r}
 9a^3 + 3a^2 + a - 1 \\
 \underline{-9a^3 + 3a^2} \\
 6a^2 + a \\
 \underline{-6a^2 + 2a} \\
 3a - 1 \\
 \underline{-3a + 1} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3a - 1 \\
 \hline
 3a^2 + 2a + 1
 \end{array}$$



Activitats proposades

15

Calcula:

a) $(3x^3 - 6x^2 + 9x - 24) : 3x$

c) $\left(\frac{4x^4 - x^3 + 3x}{2x - 5} \right) : (x^3 + 2x - 2)$

b) $(1 - x - 3x^2 - x^5) : (1 + 2x - x^2)$

d) $(38x^4 - 65x^3 + 27) : (2x^2 - 5x + 3)$

3.6 Regla de Ruffini.



Activitats resoltes

16

Fes la divisió $(3x^4 + 5x^3 - 6x + 4) : (x + 2)$ utilitzant la regla de Ruffini.

Podem aplicar la Regla de Ruffini perquè el grau del divisor és 1.

-2	3	5	0	-6	4	$Q(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 10$ $R(x) = 24$
	-6	2	-4	20		
	3	-1	2	-10	24	



Activitats proposades

17

Fes les divisions següents aplicant la regla de Ruffini:

a) $(x^3 + 4x^2 - 5x + 3) : (x - 1)$

c) $(x^3 - 8) : (x - 2)$

b) $(2x^3 - 5x + 2) : (x + 3)$

d) $\left(t^3 - \frac{t}{2} + 4 \right) : (t + 2)$

3.7 Valor numèric d'un polinomi. Teorema del residu



Activitats resoltes

- 18** Calcula el valor del polinomi següent si $x = 1$.

$$A(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x - 3$$

Com que $x = 1$, calculem $A(1)$; és a dir:

$$A(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 1 - 3 + 5 + 4 - 3 = 4$$

El valor del polinomi $A(x)$ si $x = 1$ és 4.

- 19** Calcula el residu de la divisió $(x^3 - 2x^2 + 4x + 6) : (x - 2)$ sense fer-la.

N'hi ha prou que calculem el valor del polinomi del dividend quan $x = 2$, ja que és la solució de l'equació $x - 2 = 0$ (cal igualar el divisor a zero).

$$R = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 6 = 8 - 8 + 8 + 6 = 14$$

El residu val 14.



Activitats proposades

- 20** Calcula el valor dels polinomis següents:

a) $B(y) = -y^2 + 5y + 6 - 4y^3$

Si $y = -2$

b) $C(x) = 3x + x^2 - 5$

Si $x = \frac{-2}{3}$

c) $A(z) = 6z - 4z^3 + 3z^2 + 5$

Si $z = 3$

- 21** Calcula el residu de la divisió $(-y^3 + 2y + 5) : (y + 1)$ sense fer-la.

- 22** Calcula el valor de k perquè el polinomi $A(x) = x^3 - 4x^2 + kx + 3$ sigui divisible entre el binomi $(x + 1)$. (Aplica el teorema del residu i iguala aquest a zero).

3.8 Arrels i factorització d'un polinomi



Activitats resoltes

23

Factoritza el polinomi següent: $A(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1) & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -1 & 2 & \\ -1) & & 1 & -2 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \\ 2) & & 2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

Es tracta de trobar les arrels del polinomi i expressar-les en forma de producte de binomis. Partirem dels divisors del terme independent: $\text{Div}(2) = \pm 1, \pm 2$.

Per tant, com que les arrels trobades són 1, -1 i 2, els binomis divisors seran: $(x - 1)$, $(x + 1)$ i $(x - 2)$.

És a dir: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

21



Activitats proposades

24

Calcula les arrels d'aquests polinomis:

a) $A(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

b) $B(x) = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$

25

Factoritza els polinomis següents:

a) $A(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

b) $B(x) = x^4 - 1$

Equacions inequacions i sistemes

Equacions de segon grau

Tipus d'equació	Tipus d'equació	Tipus d'equació	Tipus d'equació
Completa	$ax^2 + bx + c = 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
Incompleta	$ax^2 = 0$	$x^2 = 0 \dots x = \sqrt{0} = 0$	Única: $x = 0$
	$ax^2 + c = 0$	$x^2 = -c/a \dots x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$	Dues solucions oposades
	$ax^2 + bx = 0$	$x(ax + b) = 0$ $x = 0 \dots ax + b = 0$	$x_1 = 0 \quad x_2 = -b/a$
Factoritzada	$(x + a)(x + b) = 0$	$x + a = 0 \dots x + b = 0$	$x_1 = -a \quad x_2 = -b$

Altres tipus d'equacions

Tipus d'equació	Equació general	Resolució i solucions
Biquadrada	$ax^4 + bx^2 + c = 0$	$x^4 = z^2 \dots x^2 = z \dots az^2 + bz + c = 0$ Desfer el canvi de variable
De grau > 2	Factoritzar aplicant la regla de Ruffini	
Racional	Factoritzar i simplificar les fraccions algebriques	
Irracional	1r: Aïllar el radical i elevar al quadrat els dos membres de la igualtat 2n: Agrupar termes semblants i considerar les solucions vàlides	
Amb coeficients literals (1r grau)	1r: Reduir a comú denominador eliminant els denominadors 2n: Agrupar els termes semblants i aïllar la incògnita	
Amb coeficients literals (2n grau)	1r: Reduir a comú denominador eliminant els denominadors 2n: Agrupar els termes al primer membre i igualant a zero l'equació 3r: Aplicar la resolució d'equacions de segon grau	

Inequacions de segon grau amb una variable

- 1r: Factoritzar el polinomi de segon grau que determina la inequació. Resoldre el sistema d'inequacions resultant.
- 2n: Representar les solucions i els seus camps en una recta numèrica.
- 3r: Interpretar els resultats obtinguts.

Sistemes d'equacions

Equacions lineals Són de primer grau i totes les equacions són del tipus $(ax + by = c)$, o bé s'hi poden transformar.	Gràfic: Es representen les rectes i es localitza la intersecció. Substitució: S'aïlla una de les variables en una equació i se substitueix en l'altra equació. Igualació: S'aïlla la mateixa variable en les dues equacions i s'igualen les expressions respectives. Reducció: S'elimina una de les variables aplicant les equivalències d'equacions.
Equacions no lineals Alguna de les equacions no és del tipus $(ax + by = c)$.	— En general s'utilitza el mètode de substitució, utilitzant el mètode gràfic per comprovar les solucions. — Si les dues equacions són de segon grau, hi ha un màxim de 4 solucions. — Si alguna és irracional, es resol com correspon.
Equacions irracionals Alguna de les equacions ho és.	

4.1 Equacions de segon grau.



Activitats resoltes

1 Resol aquestes equacions:

a) $x^2 - 8x + 12 = 0$

b) $9x - x^2 = 0$

c) $2x^2 - 72 = 0$

a) Com que $a = 1$, $b = -8$ i $c = 12$, l'equació és completa i està ordenada en forma decreixent, hi apliquem l'algorisme de la solució:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{[8 \pm \sqrt{(64 - 48)}]}{2} = \frac{(8 \pm \sqrt{16})}{2} = \frac{(8 \pm 4)}{2} \dots\dots x_1 = \frac{12}{2} = 6 \dots\dots x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Les dues solucions són: $x_1 = 6$ i $x_2 = 2$

b) Com que és incompleta ($c = 0$), factoritzem l'equació:

$$9x - x^2 = x(9 - x) = 0 \quad \text{Per tant: } x = 0 \quad \text{i} \quad 9 - x = 0$$

Les dues solucions són: $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$

c) Com que és incompleta ($b = 0$), tindrà dues arrels oposades:

$$2x^2 = 72 \dots\dots\dots x^2 = \frac{72}{2} = 36 \quad x = \pm \sqrt{36} = \pm 6$$

Les dues solucions són: $x_1 = 6$ i $x_2 = -6$

2 Busca l'equació de segon grau que correspongui a les arrels $x_1 = 5$ i $x_2 = -7$.

Hi apliquem els algorismes següents: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$5 + (-7) = -\frac{b}{a} \rightarrow -2 = \frac{-b}{a} \quad \text{Per tant: } b = 2a$$

$$5 \cdot (-7) = \frac{c}{a} \rightarrow -35 = \frac{c}{a} \quad \text{Per tant: } c = -35a$$

Si $a = 1$, aleshores: $b = 2$ i $c = -35$

L'equació que busquem és: $x^2 + 2x + (-35) = x^2 + 2x - 35 = 0$



Activitats proposades

3

Resol aquestes equacions:

a) $x^2 + 4x - 21 = 8x$

c) $x(x + 5) = -4$

b) $(x + 2)^2 = 24 - 4x$

4

Busca les equacions de segon grau que corresponguin a les arrels següents:

a) $x_1 = 3$ $x_2 = 4$ c) $x_1 = \frac{-1}{3}$ $x_2 = \frac{-1}{4}$

b) $x_1 = \frac{-1}{2}$ $x_2 = 2$ d) $x_1 = m$ $x_2 = -m$

4.2 Altres tipus d'equacions



Activitats resoltes

5

Resol aquestes equacions:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ c) $2x + 2\sqrt{x^2 - 1} = 25$

a) Com que és una equació **biquadrada**, farem un canvi de variable: $x^4 = z^2$ i $x^2 = z$.

Per tant, l'equació quedarà reescrita com una de segon grau: $z^2 - 5z + 4 = 0$.

Les seves solucions són: $z_1 = 1$ i $z_2 = 4$. Si desfem aquest canvi, obtenim que:

$$z_1 = x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{1} \rightarrow x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -1$$

$$z_2 = x^2 = 4 \rightarrow x = \pm \sqrt{4} \rightarrow x_3 = 2 \text{ i } x_4 = -2$$

Com que és biquadrada, té un màxim de quatre solucions reals: 1, -1, 2, -2

b) Com que és un equació de **grau superior a 2** però no és biquadrada, hi apliquem la regla de Ruffini. Les seves arrels són solucions reals de l'equació:

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 1)(x - 1)(x + 3) = 0$$

Per tant:

$$x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \quad x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \quad x + 3 = 0 \rightarrow x_3 = -3$$

Com que és una equació de tercer grau, té un màxim de tres solucions reals: 1, -1, -3.

c) Com que és **irracional**, aïllem el radical i elevem al quadrat els dos membres de la igualtat:

$$2\sqrt{x^2 - 1} = 25 - 2x \rightarrow [2\sqrt{x^2 - 1}]^2 = (25 - 2x)^2$$

$$4(x^2 - 1) = 625 - 100x + 4x^2 \rightarrow 4x^2 - 4 = 625 - 100x + 4x^2$$

Agrupem els termes semblants i reordenem l'equació: $100x = 629$

La solució d'aquesta equació irracional és única: $x = \frac{629}{100}$



Activitats proposades

6

Resol aquestes equacions:

a) $x^4 - 6x - 27 = 0$

e) $2x^4 = 32$

b) $x^4 - 3x^2 = 0$

f) $x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 6x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = 0$

c) $-x^4 + 17x^2 - 16 = 0$

g) $x^5 - 2x^3 - 3x = 0$

d) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$

h) $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$

7

Resol aquesta equació: (caldrà aplicar dues vegades el procediment habitual de resolució d'aquest tipus d'equacions)

$$\sqrt{x+19} = 12 - \sqrt{x-5}$$

8

Resol aquestes equacions:

a) $x + \sqrt{x-6} = 0$

c) $\sqrt{5-4x} - \sqrt{2x+7} + 2 = 0$

b) $2x + 2\sqrt{x^2-1} = 25$

d) $2x - 13 = \sqrt{x+1}$



Activitats resoltes

9

Resol l'equació següent:

$$\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$$

Com que és una equació amb **fraccions algèbriques**, reduïm a comú denominador. El m.c.m. de $x+1$, x i 6 és: $6x(x+1)$. Per tant:

$$\frac{6x}{6x(x+1)} + \frac{6(x+1)}{6x(x+1)} = \frac{5x(x+1)}{6x(x+1)}$$

Eliminem denominadors i resollem parèntesis, i obtenim que:

$$6x + 6(x+1) = 5x(x+1) \rightarrow 6x + 6x + 6 = 5x^2 + 5x$$

Reagrupem i reordenem termes, i obtenim una equació de segon grau:

$$5x^2 - 7x - 6 = 0$$

Les seves solucions són: $x_1 = 2$ i $x_2 = -\frac{3}{5}$

10

Resol l'equació següent:

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

Com que és una equació completa de segon grau amb **coeficients literals**, apliquem l'algorisme corresponent: $a = 1$, $b = -2m$, $c = m^2 - 1$. Per tant:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2m) \pm \sqrt{(-2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4m^2 + 4}}{2} = \\ &= \frac{(2m \pm \sqrt{4})}{2} = \frac{(2m \pm 2)}{2} \end{aligned}$$

Les solucions són: $x_1 = m + 1$ i $x_2 = m - 1$



Activitats proposades

11

Resol aquestes equacions:

a) $\frac{1}{(x-1)} = \frac{1}{7(x-1)} = \frac{2}{(x+7)}$

b) $\frac{x}{2} + \frac{2 + (3x - 13)}{(2x - 7)} = 1$

12 Resol aquestes equacions:

a) $ax + bx = abx + 20$

b) $3x + ax = 18 - bx$

c) $\frac{3(x+a)}{a} = \frac{2a}{(x-a)}$

27

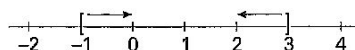
4.3 Inequacions de segon grau amb una variable.



Activitats resoltes

13 Resol la inequació: $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

- Factoritzem el polinomi: $x^2 - 2x - 3$; $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.
- Com que el producte pot ser negatiu, un dels factors ha de ser negatiu i l'altre no:
 - El 1r negatiu i el 2n positiu: $x + 1 \leq 0$ i $x - 3 \geq 0$. És a dir: $x \leq -1$ i $x \geq 3$
 - El 1r positiu i el 2n negatiu: $x + 1 \geq 0$ i $x - 3 \leq 0$. És a dir: $x \geq -1$ i $x \leq 3$
- La primera possibilitat no té solució ja que si $x > 3$, no pot ser inferior a -1 .
- La segona possibilitat sí que té solució i la representem en una recta numèrica:



La solució de l'equació és l'interval $[-1, 3]$.



Activitats proposades

14 Resol les inequacions següents:

a) $x^2 - 4 > 0$

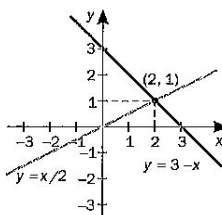
b) $3x(x + 2) \geq x^2$

4.4 Sistema d'equacions



Activitats resoltes

- 15** Resol aquest sistema aplicant els quatre mètodes coneguts: $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 3 \end{cases}$

Gràfic	Substitució	Igualació	Reducció
Representem les rectes $y = \frac{x}{2}$ i $y = 3 - x$. La seva intersecció és la solució del sistema. 	Com que la variable x està aïllada, la substituïm en la segona equació: $2x + y = 3 \quad 3y = 3$ Per tant: $y = 1$ Per tant: $x = 2y = 2$ La solució és (2, 1)	Com que la variable x està aïllada en la primera equació, també l'aïllem en la segona: $x = 3 - y$ Per tant: $2y = 3 - y$ $3y = 3 \quad y = 1$ $x = 3 - 1 = 2$ La solució és (2, 1)	Ordenem la primera equació, $x - 2y = 0$, i multipliquem per 2 la segona equació: $x - 2y = 0$ $\frac{2x + 2y = 6}{3x = 6}$ $x = 2$ Per tant: $y = x/2 = 2/2 = 1$ La solució és (2, 1)



Activitats proposades

- 16** Resol aquests sistemes aplicant el mètode que creguis més convenient:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ -x + 4y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 20x - 33y = 0 \\ x - y = y - 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5y - 3(x - 1) = 68 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{(x+1)}{2} = \frac{(y-1)}{3} \\ \frac{(y+1)}{6} = \frac{(x-3)}{3} \end{cases}$

4.5 Aplicacions d'equacions.



Activitats resoltes

- 17** Calcula la intersecció de la circumferència $x^2 + y^2 = 41$ i la recta $x - y = 1$.
 Utilitzarem el mètode de substitució $x = 1 + y$. Per tant, en la segona equació tindrem que:
- $$(1 + y)^2 + y^2 = 41 \rightarrow 1 + 2y + y^2 + y^2 = 41 \rightarrow 2y^2 + 2y - 40 = 0$$
- Les solucions són: $y_1 = 4$ i $y_2 = -5$. Per tant: $x_1 = 1 + 4 = 5$ i $x_2 = 1 + (-5) = -4$
 La intersecció de la circumferència amb la recta són els punts (5, 4) i (-4, -5).



Activitats proposades

18 Calcula la intersecció de la circumferència $x^2 + y^2 = 25$ i la hipèrbola $xy = 12$.

29

19 Busca dos nombres que es diferencien en 570 unitats, sabent que el seu quocient és 8 i el residu de la divisió 66.

20 Fa 19 anys l'edat d'una persona era el doble que la d'una altra, i d'aquí a 11 anys, l'edat de la segona serà els $\frac{7}{9}$ de la primera. Quines edats tenen actualment?

21 Busca un nombre sabent que val 56 unitats més que la seva arrel quadrada.

Funcions

30

- Una **funció** és una relació de dependència entre dues variables que es representen generalment amb les lletres x (variable independent) i y (variable dependent), de manera que a cada valor de x s'associa un únic valor de y .
- Els valors de la variable independent (x) es representen a l'eix d'abscisses i formen el **domini** de la funció.
- Els valors de la variable dependent (y) es representen a l'eix d'ordenades i formen el **recorregut** de la funció.

Funció constant

- L'expressió algebraica $y = f(x) = k$, en què k és un nombre conegut, correspon a una **funció constant**, la gràfica de la qual és una recta paral·lela a l'eix d'abscisses.
- El domini és el conjunt R dels nombres reals, mentre que el recorregut és k .

Funció lineal o de proporcionalitat directa

- L'expressió algebraica $y = f(x) = mx$, en què m és el pendent de la recta, correspon a una **funció lineal o de proporcionalitat directa**, la gràfica de la qual és una recta que passa per l'origen de coordenades.
- El domini i el recorregut de la funció lineal és el conjunt R dels nombres reals.

Funció afi

- L'expressió algebraica $y = f(x) = mx + n$, en què m és el pendent de la recta i n és l'ordenada a l'origen, correspon a una **funció afi**, la gràfica de la qual és una recta que no passa per l'origen de coordenades.
- El domini i el recorregut de la funció lineal és el conjunt R dels nombres reals.

Funció quadràtica

- La funció quadràtica és una funció polinòmica de segon grau, l'equació de la qual és

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ on } a, b \text{ i } c \text{ són nombres reals.}$$

La seva representació gràfica és una **paràbola**.

- Una funció quadràtica és **completa** si tots els seus coeficients són diferents de zero. En cas contrari, la funció quadràtica és **incompleta**:

Completa	Incompleta ($b = 0$)	Incompleta ($c = 0$)	Incompleta ($b = c = 0$)
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$	$y = f(x) = ax^2 + c$	$y = f(x) = ax^2 + bx$	$y = f(x) = ax^2$

■ Elements de la representació gràfica d'una funció quadràtica:

- ☐ Les **arrels**, o punts d'intersecció de la paràbola amb l'eix d'abscisses.
- ☐ El **punt d'intersecció** de la paràbola amb l'eix d'ordenades, les coordenades del qual són $(0, c)$.
- ☐ El **vèrtex** V de la paràbola, que és el punt on la corba canvia de tendència, i que té per coordenades:

$$V \left[\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right) \right].$$

- ☐ Si $a > 0$, la paràbola és **oberta cap a dalt**; si $a < 0$, la paràbola és **oberta cap a baix**. Com més gran és el valor de a , més tancada és la paràbola.

■ Representació gràfica d'una funció quadràtica:

Cal seguir aquests passos:

- 1r: Calcular el **vèrtex** de la paràbola.
- 2n: Calcular les **arrels**, si n'hi ha.
- 3r: Calcular el **punt d'intersecció** amb l'eix d'ordenades.
- 4t: Completar la taula de valors.
- 5è: Traçar de la paràbola.

Funció de proporcionalitat inversa

- L'expressió algebraica $y = f(x) = k/x$, en què k és un nombre real, correspon a una **funció de proporcionalitat inversa** la gràfica de la qual és una **hipèrbola** i centrada a l'origen de coordenades. El domini i el recorregut de la funció és el conjunt R dels nombres reals, llevat del zero: $R - \{0\}$.

- **Asímtotes** de la hipèrbola són les rectes a les quals la funció s'acosta però que mai no arriba a tocar; poden ser **asímtotes verticals** o **horitzontals**.

- Si la hipèrbola té per funció:

$$y = f(x) = k/x + a,$$

la gràfica s'ha traslladat **verticalment** respecte de $(0, 0)$.

- Si la hipèrbola té per funció:

$$y = f(x) = k/(x + a),$$

la gràfica s'ha traslladat **horitzontalment** respecte de $(0, 0)$.

- Si la hipèrbola té per funció:

$$y = f(x) = (x + a)/(cx + d),$$

la gràfica s'ha traslladat alhora **horitzontalment** i **verticalment**.

Funció definida a trossos

- Una gràfica en què la relació entre les dues magnituds és diferent en cada tram correspon a una **funció definida a trossos**.
- En les funcions a trossos, el domini, el recorregut i la continuïtat depenen de la naturalesa de les funcions en cada tros i de com aquestes s'uneixen.

5.1 Funció constant.

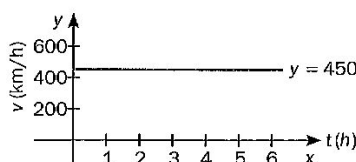


Activitats resoltes

1

El pilot automàtic d'un avió manté fixa la velocitat a 450 km/h. Representa gràficament aquesta situació.

Considerem la variable y (velocitat mesurada en km/h) i la variable x (temps transcorregut en hores). Com que és una funció constant, la seva equació és $y = 450$. La gràfica és una recta horitzontal, paral·lela a OX , que passa per l'ordenada 450:



Activitats proposades

2

Raona per què les representacions gràfiques de dues funcions constants mai no es tallaran.

3

Representa gràficament les funcions següents i determina'n el domini i el recorregut:

a) $y = f(x) = 2$

b) $y = f(x) = -4$

c) $y = f(x) = -\frac{3}{2}$

5.2 Funció lineal o de proporcionalitat directa



Activitats resoltes

4

Donada la funció $f(x) = 2x$; contesta:

a) Quin seria el criteri de la funció? I la constant de proporcionalitat?

b) Construeix una taula de valors per a $x = 0, 1, -1, 2, -2, 4, -3$.

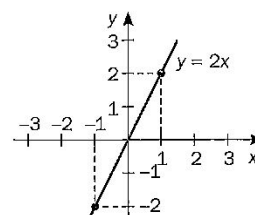
c) Fes la representació gràfica d'aquesta funció i raona per què és lineal.

a) El criteri de la funció és «fer-ne el doble» i el valor de k és 2.

b)

x	0	1	-1	2	-2	4	-3
$y = f(x) = 2x$	$2 \cdot 0 = 0$	$2 \cdot 1 = 2$	-2	4	-4	8	-6

c) És una funció lineal perquè la seva equació és del tipus $y = kx$ i passa per l'origen de coordenades $(0, 0)$.





Activitats proposades

5

Per 4,00 € comprem 2 litres de vi. Escriu l'equació de la funció i representa-la gràficament. Raona també quina magnitud és la variable independent i quina és la dependent.

6

Sobre la gràfica anterior localitza el següent:

- El preu de 3 litres de vi.
- Quant vi es pot comprar amb 8,00 €.
- Quant vi es pot comprar amb 5,00 €.

RECORDA

Càlcul del pendent: El pendent m d'una recta també es pot calcular a partir de les coordenades de dos dels seus punts: $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$

33

5.3 Funció afí



Activitats resoltes

7

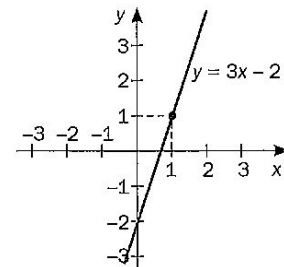
Donada la funció $f(x) = 3x - 2$, resol:

- Quin seria el criteri de la funció?
 - Quin és el pendent i quina és l'ordenada n en l'origen de coordenades.
 - Construeix una taula de valors per a $x = 0, 1, -1, 2, -2, 4, -3$.
 - Fes la representació gràfica d'aquesta funció i raona per què és afí.
- El criteri de la funció és «fer-ne el triple i restar-ne dues unitats».
 - El pendent m és 3 i l'ordenada n en l'origen de coordenades és -2.

c)

x	0	1	-1	2	-2	4	-3
$y = f(x) = 3x - 2$	$3 \cdot 0 - 2 = -2$	$3 \cdot 1 - 2 = 1$	-5	4	-8	10	-11

- d) És una funció afí perquè la seva equació és del tipus $y = mx + n$ i no passa per l'origen de coordenades (0, 0).



Activitats proposades

8

Per llogar un cotxe durant 24 h es paga una quota fixa de 24 € i, a més, 0,20 € per cada quilòmetre recorregut. Escriu l'equació de la funció corresponent i representa-la gràficament. Raona també quina magnitud és la variable independent i quina és la dependent.

9

A partir de la gràfica anterior, resol:

- El preu final si s'han recorregut 200 km.
- Quina distància s'ha recorregut si al final s'han pagat 40 €.
- Quina distància s'ha recorregut si al final s'han pagat 50 €.

5.4 Funció quadràtica.



Activitats resoltes

10

Donada la funció $f(x) = x^2 + 2x - 3$, resol:

- Quin seria el criteri de la funció?
- Calcula les arrels de la funció.
- Calcula el vèrtex i l'eix de la paràbola.
- Calcula el punt d'intersecció amb l'eix de les ordenades.
- Construeix una taula de valors.
- Fes la representació gràfica d'aquesta funció.

a) El criteri de la funció és «fer-ne el quadrat, afegir-hi el doble i restar-ne tres unitats».

b) Per calcular les arrels iguaem a zero la funció $f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$.

Les solucions són: $x_1 = 1$ i $x_2 = -3$. Per tant, les arrels són: $(1, 0)$ i $(-3, 0)$.

c) El vèrtex de la paràbola és un punt (x, y) en què $x = -b/2a$; per tant: $x = (-2)/2 \cdot 1 = -1$.

La coordenada y es calcula a partir de la funció: $y = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$.

Les coordenades del vèrtex són $(-1, -4)$.

L'equació de l'eix de la paràbola és del tipus $x = k$, en què k és l'abscissa del vèrtex. Per tant, la seva equació és: $x = -1$.

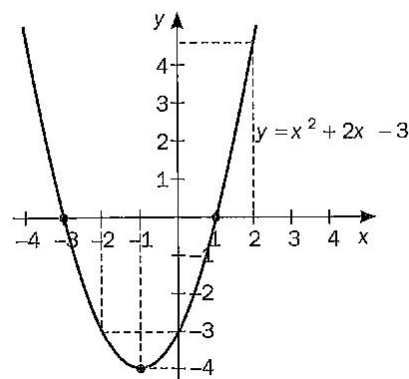
d) El punt d'intersecció amb l'eix d'ordenades serà 0 a l'abscissa; per tant:

$$y = f(0) = (0)^2 + 2 \cdot (0) - 3 = 0 - 0 - 3 = -3. \text{ El punt buscat és } (0, -3)$$

e)

x	$y = f(x) = x^2 + 2x - 3$
-3	$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0$
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0
2	5

f)



Activitats proposades

11

Un pintor cobra a raó de 4,00 € per cada metre quadrat que pinta, més un fix de 18,00 € per desplaçament. Escriu l'equació de la funció que suposa pintar zones quadrades.

12 De l'activitat anterior, resol:

- Quina és la variable independent i quina és la variable dependent.
- Calcula el preu final si ha pintat un quadrat de 5 m de costat.
- Calcula el costat del quadrat que ha pintat si al final cobra 214,00 €.

13 Donada la funció $y = f(x) = -x^2 - 2x$, resol:

- Calcula les arrels de la funció.
- Calcula el vèrtex i l'eix de la paràbola.
- A partir de la seva taula de valors, fes la representació gràfica d'aquesta funció.

5.5 Funció de proporcionalitat inversa.



Activitats resoltes

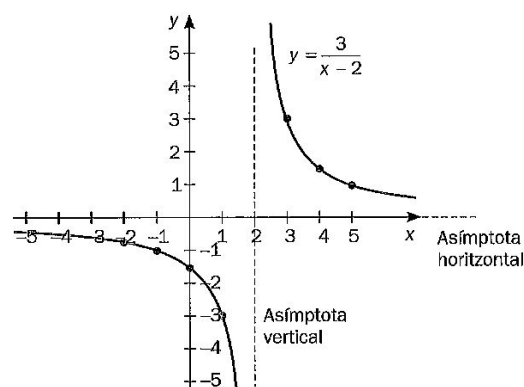
14

Representa gràficament la funció $y = f(x) = 3/(x - 2)$ i assenyalà-hi les asímptotes.

Es tracta d'una funció de proporcionalitat inversa la gràfica de la qual s'ha traslladat horitzontalment respecte de l'origen de coordenades, ja que la seva equació és del tipus:

$y = f(x) = k/(x + a)$. Calculem la seva taula de valors:

x	$y = f(x) = x^2 + 2x - 3$
5	$3/(5 - 2) = 3/3 = 1$
4	$3/(4 - 2) = 3/2$
3	3
2	Asímtota vertical
1	-3
0	$-3/2$
-1	-1
-2	$-3/4$



Activitats proposades

15

Representa gràficament la funció $y = f(x) = -8/x$; a continuació, indica'n les asímptotes.

16

A la gràfica de l'exercici anterior, representa-hi també la funció $y = g(x) = -x - 2$. A continuació, resol:

- Determina gràficament la intersecció de les dues gràfiques.
- Determina numèricament la intersecció de les dues gràfiques.
- Comprova els dos resultats.

- 17** El producte de dos nombres és 24. Sabent que els valors de cada possible factor es representen en els dos eixos de coordenades, resol:
- Escriu l'equació d'aquesta funció.
 - Fes la representació gràfica.
 - Indica quines són les asímptotes.
- 18** Representa gràficament la funció $f(x) = (-2x + 3) / (x - 2)$, i localitza les asímptotes que corresponguin.

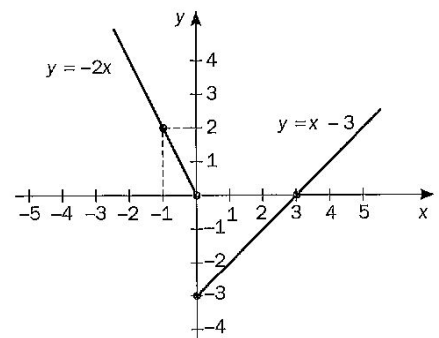
5.6 Funció definida a trossos.



Activitats resoltes

- 19** Fes la gràfica de la funció definida a trossos $f(x) = -2x$ (si $x < 0$) i $f(x) = x - 3$ (si $x \geq 0$).

- Dibuixem la gràfica $f(x) = -2x$, que correspon a una funció lineal, i ens aturem en el punt de les abscisses 0 (la gràfica no hi arriba, ja que $x < 0$).
- Dibuixem la gràfica $f(x) = x - 3$, que correspon a una funció afí i ho fem a partir del punt d'abscisses 0 (la gràfica hi neix, ja que $x \geq 0$).



Activitats proposades

- 20** Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- 21** Representa gràficament la funció $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 4 & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

- 22** Representa gràficament la funció $h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \in (-\infty, 3] \\ x - 3 & \text{si } x \geq 0 \in \text{ si } x \in (3, \infty) \end{cases}$

RECORDA

Intervals: Els intervals del tipus (x, y) no inclouen el límit inferior però sí el límit superior.