
DOSSIER D'ESTIU DE MATEMÀTIQUES

4t D'ESO



Nom i Cognoms:

Grup:

SA 1: Els nombres reals. Potències i arrels

1. Fes les següents sumes:

a) $\sqrt{243} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{27}$

b) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{\frac{81}{8}} + \sqrt[3]{32}$

c) $\sqrt{245} - \frac{2}{3}\sqrt{45} + \sqrt{500}$

2. Calcula, sempre que es pugui:

a) $\sqrt[3]{64} =$

b) $\sqrt[3]{-8} =$

c) $\sqrt[4]{-81} =$

d) $\sqrt[5]{100000} =$

e) $\sqrt[5]{32} =$

f) $\sqrt[4]{16} =$

g) $\sqrt[5]{-32} =$

h) $\sqrt{0,36} =$

i) $\sqrt{0,01} =$

j) $\sqrt[3]{1} =$

k) $\sqrt[3]{-1} =$

l) $\sqrt{1} =$

m) $\sqrt{-1} =$

n) $\sqrt[3]{27} =$

3. Completa:

a) $\sqrt[\text{parell}]{\text{positiu}} = \dots$

c) $\sqrt[\text{parell}]{\text{negatiu}} = \dots$

b) $\sqrt[\text{imparell}]{\text{positiu}} = \dots$

d) $\sqrt[\text{imparell}]{\text{negatiu}} = \dots$

4. a) Expressa en forma de radical les potències següents:

$$5^{\frac{3}{4}}$$

$$3^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{5}{2}}$$

$$11^{\frac{2}{5}}$$

b) Expressa en forma de potència els radicals següents:

$$\sqrt[5]{8^3}$$

$$\sqrt[7]{9^2}$$

$$\sqrt{3^5}$$

$$\sqrt{6}$$

5. Calcula:

a) $9^{\frac{1}{2}}$

$$4^{\frac{3}{2}}$$

$$8^{\frac{2}{3}}$$

b) $8^{\frac{-2}{3}}$

$$\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

6. Expressa en forma d'una sola potència:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} = & \text{b)} \quad 2^{\frac{7}{3}} \cdot 2^{\frac{-5}{2}} = & \text{c)} \quad \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{-3}{4}}} = \\ \text{d)} \quad (5^{-2})^{\frac{-3}{4}} = & \text{e)} \quad \sqrt[3]{10000} = & \text{f)} \quad \frac{1}{\sqrt{0,001}} = \end{array}$$

7. Completa:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{\dots} & \text{b)} \quad \sqrt{7} = \sqrt[16]{\dots} & \text{c)} \quad \sqrt[4]{a^6} = \sqrt{\dots} \\ \text{d)} \quad \sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{\dots} & & \end{array}$$

8. Expressa amb un sol radical i simplifica'l, si es pot:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = & \text{b)} \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \\ \text{c)} \quad \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2} = & \text{d)} \quad \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4} = \end{array}$$

9. Expressa amb un sol radical i calcula:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = & \text{b)} \quad \sqrt{6,4} \cdot \sqrt{10} = & \text{c)} \quad \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \\ \text{d)} \quad \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = & \text{e)} \quad \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = & \end{array}$$

10. Expressa amb un sol radical (redueix, primer de tot, els radicals a comú índex):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} = & \text{b)} \quad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{7} = & \text{c)} \quad \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt{3} = \\ \text{d)} \quad \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[8]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} = & & \text{e)} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{3^4}} = \end{array}$$

11. Extreu tots els factors que puguis del radical:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \sqrt{27} = & \text{b)} \quad \sqrt{60} = & \text{c)} \quad \sqrt{72} = \\ \text{d)} \quad \sqrt{180} = & \text{e)} \quad \sqrt{540} = & \text{f)} \quad \sqrt{98} = \\ \text{g)} \quad \sqrt[3]{54} = & \text{h)} \quad \sqrt[4]{144} = & \text{i)} \quad \sqrt[5]{2^8} = \end{array}$$

12. Expressa amb un sol radical:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \quad \sqrt[4]{\sqrt{8}} = \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{7}} =$$

13. Calcula, extraient factors fora dels radicals:

a) $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{5} =$	e) $3\sqrt{8} - \sqrt{2} + \sqrt{128} =$
b) $\sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} =$	f) $-2\sqrt{45} + 6\sqrt{20} - 4\sqrt{125} =$
c) $4\sqrt{72} - 5\sqrt{18} + 3\sqrt{8} =$	g) $-7\sqrt{200} + 5\sqrt{32} - 9\sqrt{50} =$
d) $-5\sqrt{12} + 4\sqrt{48} - 2\sqrt{72} =$	h) $-2\sqrt{98} + 6\sqrt{144} + 10\sqrt{40} =$

14. Racionalitza els denominadors dels quocients següents:

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$	f) $\frac{6}{2 - \sqrt{2}}$
b) $\frac{7}{2\sqrt{7}}$	g) $\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$
c) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$	h) $\frac{5}{\sqrt{3} + 2}$
d) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$	i) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$
e) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	j) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

15. Diques si els següents radicals es poden calcular o no i calcula'ls quan es pugui (escriuint totes les solucions possibles). Iustifica les respostes.

a) $\sqrt[3]{-125}$	d) $\sqrt[4]{0,0025}$
b) $\sqrt{-100}$	e) $\sqrt[5]{1024}$
c) $\sqrt[6]{-0.000001}$	f) $\sqrt{10000}$

16. Escriu en forma de potència o de radical segons s'escaigui:

$$6^{\frac{1}{3}} \quad 7^{\frac{-2}{3}} \quad 8^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[11]{3^7} \quad \sqrt{13} \quad \sqrt[6]{4^5}$$

17. Expressa en forma d'una sola potència:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 3^{\frac{-2}{6}} \cdot 3^{\frac{-4}{5}} = & \text{b) } \frac{5^{\frac{4}{3}}}{5^{\frac{-2}{9}}} = & \text{c) } \left(4^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{-2}{9}} = & \text{d) } 5^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{2}{3}} = \\ \text{e) } \frac{20^{\frac{-4}{5}}}{2^{\frac{-4}{5}}} = & \text{f) } \frac{a^3 \cdot a^{-2}}{a^{\frac{-1}{4}}} = & \text{g) } (b^{-5})^{\frac{-2}{3}} \cdot b^{\frac{-9}{4}} = & \text{h) } \frac{100}{\sqrt[3]{0,0001}} = \end{array}$$

18. Simplifica els radicals següents:

$$\text{a) } \sqrt[5]{2^5} \quad \text{b) } \sqrt{11^2} \quad \text{c) } \sqrt[4]{3^{16}} \quad \text{d) } \sqrt[6]{7^3}$$

19. Digues si les igualtats següents són certes o falses i perquè:

$$\text{a) } \sqrt{20} = 10 \quad \text{b) } \sqrt{5^2} = 5 \quad \text{c) } \sqrt{3} = \sqrt[4]{6} \quad \text{d) } \sqrt{3} = \sqrt[4]{9}$$

20. Expressa amb un sol radical (reduïx, primer de tot, els radicals a comú índex):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt[7]{2} = & \text{b) } \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[5]{8} = & \text{c) } \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt{3} = \\ \text{d) } \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^2} = & & \text{e) } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[7]{5^6}} = \end{array}$$

21. Expressa amb un sol radical:

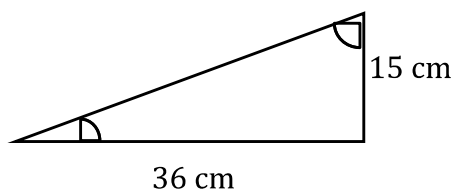
$$\sqrt[4]{\sqrt{5}} \quad \sqrt[6]{\sqrt{a}} \quad \sqrt[4]{\sqrt[5]{20}}$$

22. Calcula, aplicant fórmules notables:

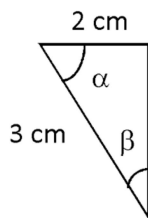
$$\text{a) } (3 + \sqrt{5})^2 \quad \text{b) } (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \quad \text{c) } (6 + \sqrt{6})^2$$

SA 2: Trigonometria

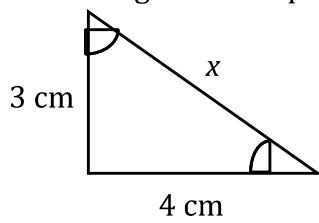
1. Escriu les raons trigonomètriques de l'angle α i β :



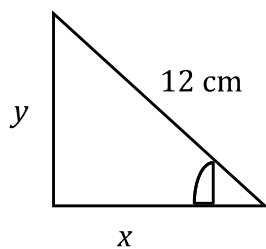
2. Troba les raons trigonomètriques dels angles α i β :



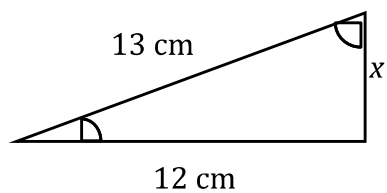
3. Escriu les raons trigonomètriques dels angles α i β :



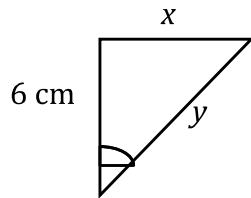
4. Sabent que $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, troba x i y .



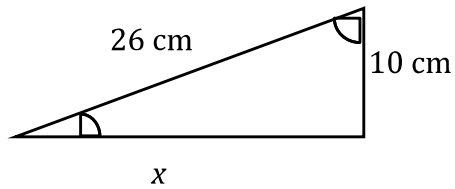
5. Troba $\cos \alpha$ i $\cos \beta$ en el triangle rectangle de la figura:



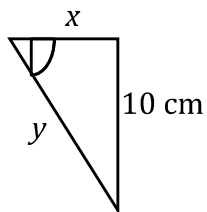
6. Si $\cos \alpha = 0'75$, troba x i y .



7. Troba $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{tg} \beta$ en el triangle rectangle de la figura:



8. Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$, troba x i y .



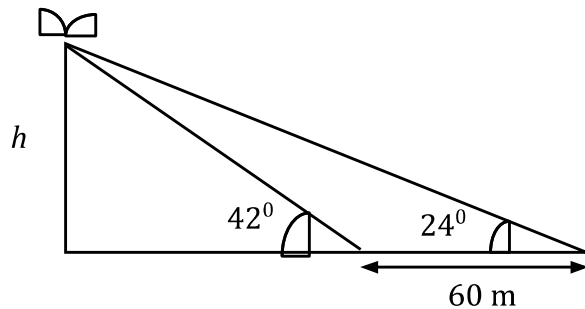
9. Completa, fent servir la calculadora:

	17°	39°	$42^\circ 30'$	$19^\circ 28' 37''$	84°
$\sin$					
$\cos$					
tg					

10. Completa, fent servir la calculadora:

	α
$\sin \alpha = 7/19$	
$\cos \alpha = 0,764$	
$\operatorname{tg} \alpha = 7,43$	
$\cos \alpha = 0,045$	
$\sin \alpha = 0,034$	
$\operatorname{tg} \alpha = 65,43$	

11. Una escala recolzada a la paret forma un angle de 60° amb l'horitzontal. Si el peu de l'escala es troba a 2'5 m de la paret, quina és la longitud de l'escala ?
12. La finestra d'una casa es troba a 10 m del terra. Tenim una escala també de 10 m . Per raons de seguretat l'escala ha de formar un angle màxim de 75° amb l'horitzontal. Podrem arribar a la finestra ?
13. Quin angle formen amb l'horitzontal els raigs de sol en el moment en què un pal vertical de 2 m fa una ombra d'1,5 m ?
14. Un estel està unit al terra amb un fil de 100 m que forma un angle de 41° amb l'horitzontal. Si el fil es troba tens, a quina altura vola l'estel ?
15. Des d'un far situat a 40 m sobre el nivell del mar es veu un vaixell sota un angle de 55° . A quina distància del far es troba el vaixell ?
16. Des d'un cert punt es veu la part més alta de la torre d'un castell sota un angle de 60° . Si ens allunyem 250 m de la torre, l'angle es redueix a 30° . Quina és l'altura de la torre ?
17. A quina altura vola l'ocell de la figura ?



18. Sabent que α és un angle agut i que $\sin \alpha = 0,8$, calcula $\cos \alpha$ i $\tan \alpha$.

1. Teoria:

a) *Equacions de la recta:*

L'equació de la recta en forma contínua és

L'equació de la recta en forma general és on $A = \dots$, $B = \dots$ i $v = \dots$

L'equació de la recta en forma explícita és

b) *Vectors perpendiculars:*

Si un vector té per components (a,b) , un vector perpendicular pot ser el que té per components $(\dots, \dots)$

c) *Rectes perpendiculars:*

Dues rectes són perpendiculars si es compleix que les seves pendent
.....

d) *Rectes paral·leles:*

Dues rectes són paral·leles si tenen el mateix

Si les equacions de dues rectes en forma explícita són $y=mx+n$ i l'altra és $y=m'x+n'$ es compleix que

2. Donats els següents vectors $v=(-2,3)$ i $w=(-1,3)$

a) Fes les operacions: $v - 2w$

b) Calcula el mòdul del vector v

c) Escribe les components d'un vector perpendicular a w :

d) Si el vector v té l'origen en el punt $(2,5)$, en quin punt té l'extrem?

3. Escribe les equacions de les rectes que compleixen les següents condicions:

a) Té vector director $(2,1)$ i passa pel punt $(-3,5)$. En forma explícita

b) És paral·lela a la recta $4x+y-5=0$ i passa per l'origen de coordenades.
En forma general

c) És perpendicular a la recta $y=2x-4$ i passa pel punt $(1,3)$. En forma contínua

d) Passa pels punts $(2,3)$ i $(4,6)$. En forma general.

4. Digues si les següents rectes són paral·leles, coincidents, perpendiculars o cap dels casos anteriors. En el cas que es tallin, calcula el punt de tall:

a) $1x + 6y - 5 = 0$ $2x + 12y + 15 = 0$

b) $y=2x + 5$ $y = \frac{-1}{2}x + 5$

5. Calcula l'àrea i el perímetre de la figura determinada pels següents punt: $(3,1)$, $(5,2)$, $(6,4)$ i $(4,3)$

SA 4: Polinomis i fraccions algebraiques

1. Simplifica les següents expressions algebraiques:

$$1. \frac{b-3}{b^2-2b-3}$$

$$6. \frac{20xyz^3}{60x^2yz^3}$$

$$2. \frac{7a^3}{14a}$$

$$7. \frac{8a}{a^2+3a}$$

$$3. \frac{x^2+3x+2}{x^2-4x-5}$$

$$8. \frac{12x}{3x+6}$$

$$4. \frac{6x^2y}{30x}$$

$$9. \frac{10x-5x^2}{2x^2}$$

$$5. \frac{9x^4y^2z}{x^6y}$$

$$10. \frac{x^2-25}{x-5}$$

2. Fes les següents operacions amb fraccions algebraiques:

$$1. \frac{1}{2x} - \frac{2}{10x}$$

$$6. \frac{7}{2x-8} - \frac{2}{x-4}$$

$$2. \frac{1}{7x} + \frac{2}{x}$$

$$7. \frac{2x}{x+1} + \frac{x}{4x+4}$$

$$3. \frac{10}{xy^2} + \frac{5}{y^2}$$

$$8. \frac{5}{x+6} + \frac{3}{x+3}$$

$$4. \frac{9}{a^3} - \frac{7}{a}$$

$$9. \frac{4}{x+3} - \frac{5x}{x-3}$$

$$5. \frac{2}{3x+6} + \frac{5}{x+2}$$

$$10. \frac{7x}{x^2-16} + \frac{2}{x+4}$$

3. Factoritza completament aquests polinomis:

a) $x^4 - x^2$

b) $x^4 - 2x^2 + 1$

c) $x^6 - x^2$

d) $x^4 - 3x^3 + 5x^2$

4. Factoritza els polinomis següents:

- a) $x^3 + 3x^2 - 4x + 12$
- b) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$
- c) $x^3 - 1$
- d) $x^3 - 4x^2 - 5x$

5. Factoritza els polinomis següents:

- a) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ (indicació: 4 és una arrel)
- b) $-2x^3 + 2x^2 + 18x - 18$ (indicació: -3 és una arrel)
- c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- d) $3x^3 - x^2 - 7x + 5$
- e) $-x^3 + 25x$
- f) $x^3 - 8$

Solucions exercici 2

- | | | |
|--------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\frac{3}{10x}$ | 5. $\frac{17}{3x+6}$ | |
| 2. $\frac{15}{7x}$ | 6. $\frac{3}{2x-8}$ | |
| 3. $\frac{5x+10}{xy^2}$ | 7. $\frac{9x}{4x+4}$ | 9. $\frac{-5x^2-11x-12}{x^2-9}$ |
| 4. $\frac{-7a^2+9}{a^3}$ | 8. $\frac{8x+33}{x^2+9x+18}$ | 10. $\frac{9x-8}{x^2-16}$ |

Solucions exercici 1

- | | | |
|---|--|---------------------------------|
| 1. $\frac{1}{b+1}, b \neq -1, b \neq 3$ | 5. $\frac{9yz}{x^2}, x \neq 0, y \neq 0$ | |
| 2. $\frac{a^2}{2}, a \neq 0$ | 6. $\frac{x}{3}, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ | |
| 3. $\frac{x+2}{x-5}, x \neq -1, x \neq 5$ | 7. $\frac{8}{a+3}, a \neq 0, a \neq -3$ | 9. $\frac{10-5x}{2x}, x \neq 0$ |
| 4. $\frac{xy}{5}, x \neq 0$ | 8. $\frac{4x}{x+2}, x \neq -2$ | 10. $x+5, x \neq 5$ |

SA 5 i 6: Equacions i sistemes

1. Resol les equacions següents:

a. $\frac{x+1}{3} + \frac{x-5}{5} = \frac{3x-3}{6}$

b. $\frac{2x-7}{20} - \frac{4x-7}{5} = \frac{3x-9}{3}$

2. Resol les equacions amb x al denominador següents:

a. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$

b. $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$

3. Resol les equacions biquadrades següents:

a. $25x^4 - 26x^2 + 1 = 0$

b. $x^4 - 9x^2 = 0$

4. Resol les equacions amb radicals següents:

a. $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$

b. $\sqrt{3x-5} + \sqrt{x+2} = 4$

5. Resol les equacions de grau superior a 2 següents, has d'explicar totes les passes i tots els resultats que utilitzis:

a. $x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = 0$

b. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

6. Resol els següents sistemes:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ 2x^2 - y^2 = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x^2 + 4xy = 57 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - xy = 14 \\ x^2 + xy = -6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} xy = 20 \\ \frac{x}{y} = 5 \end{cases}$

Solucions: a) $x = 3, y = 1$; $x = 3, y = -1$; $x = -3, y = 1$; $x = -3, y = -1$;

b) $x = 5, y = 2$; $x = 2, y = 5$ c) $x = 2, y = 3$; $x = -3, y = -2$;

d) $x = 3, y = 4$; $x = \frac{19}{7}, y = \frac{32}{7}$; e) $x = 2, y = -5$; $x = -2, y = 5$;

SA7: Inequacions

Resol les següents inequacions:

1. $5x + 3 > 7$

2. $2 - x > 1 - 5x$

3. $2x^2 + 3x - 4 < 0$

4.
$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 1 < 0 \\ 1 - 3x < 0 \end{cases}$$

5.
$$\frac{4x + 5}{-x - 1} < 2$$

6.
$$\frac{-x^2 + 3x + 5}{2x^2 - x - 2} > 0$$

7. $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 < 0$

8. $|4x - 2| = 3$

9. $|7 - 8x| < 3$

10. Representa gràficament el conjunt solució del següent sistema d'inequacions i determina al·lègriament els seus vèrtexs

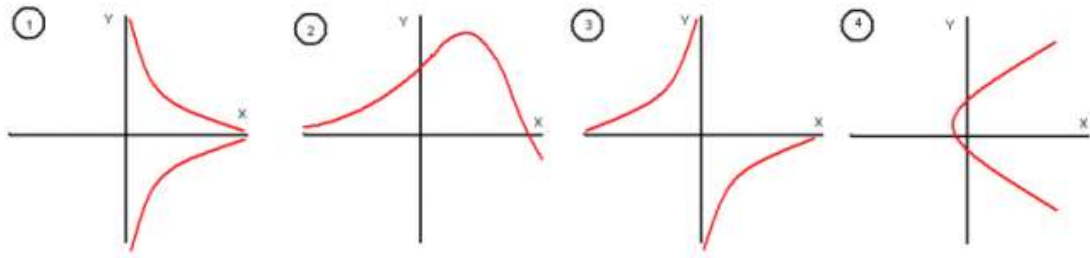
$$\begin{cases} 5x + 3y \leq 7 \\ 4x + y \geq -1 \end{cases}$$

Solucions:

1. $x > 4/5$	6. $-1.19 < x < -0.78 \vee 1.28 < x < 4.19$
2. $x > -0.25$	7. $x < -4 \vee -4 < x < 3$
3. $-2.35 < x < 0.85$	8. $x = 1.25, x = -0.25$
4. $x > 3.7$	9. $0.5 < x < 1.25$
5. $x < -1.17 \vee x > -1$	

SA 8: Funcions

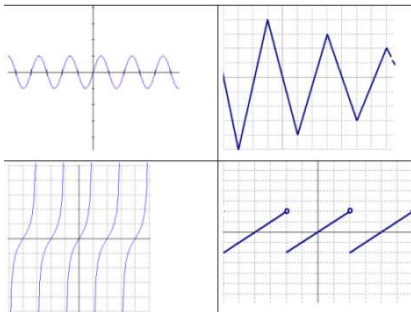
1. Observa les gràfiques següents i decideix si es tracta de funcions o no.



2. Troba el domini de les següents funcions:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ b) $g(x) = \frac{2}{x^2 - 6x}$

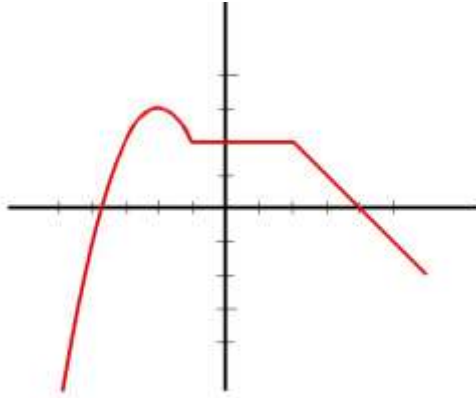
3. Indica quines de les següents funcions són periòdiques i quines no. Indica quin és el domini i quin el recorregut:



4. Presenten algun tipus de simetria aquestes funcions?

a) $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2}$ b) $g(x) = x^2 - 3$

5. Observa la gràfica de la funció:



- a) Descriu-ne el domini i el recorregut
- b) Estudia'n el creixement i el decreixement
- c) Troba els màxims i els mínims

6. Representa gràficament la següent funció definida a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3; & x < -2 \\ 2x - 2; & x \geq -2 \end{cases}$$

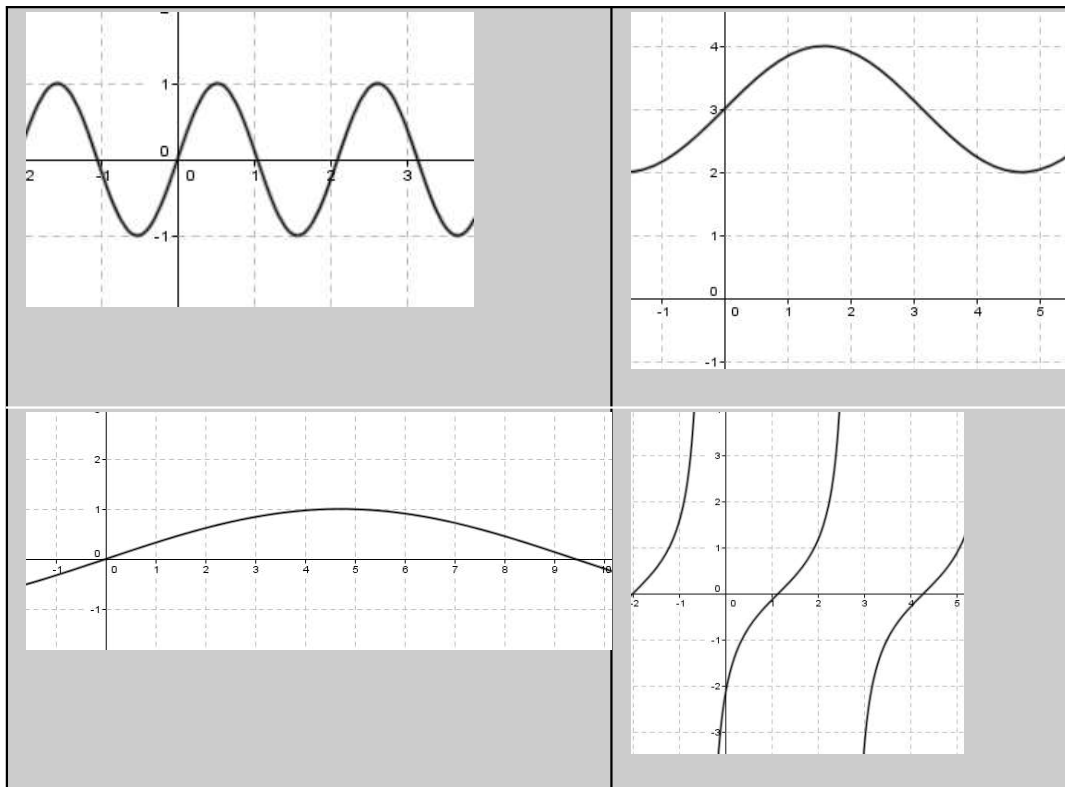
7. En la funció anterior, indica quin tipus de gràfic té la funció en cada interval. Indica si és una paràbola, una recta o una hipèrbola. Indica quin és el vèrtex i la pendent (si n'hi ha), els punts de tall amb els eixos i els intervals de creixement i decreixement.

8. Representa les següents funcions. Indica quins són els punts de tall amb els eixos i en quins punts s'assoleixen els màxims i mínims:

- a) $y = \sin x$ (Representa-la en l'interval $[-1, 7]$)
- b) $y = 0.6^x$

9. Escriu quina seria l'equació de cadascun dels següents gràfics. Tria entre les següents opcions.

$y = \sin 3x$ $y = \tan(x+2)$ $y = \cos 0.3x$ $y = \sin x + 3$ $y = \sin(x/3)$



10. Troba la funció inversa de les següents funcions

a) $f(x) = 2 - x^2$ b) $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$