Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut Marianao

MATEMÀTIQUES

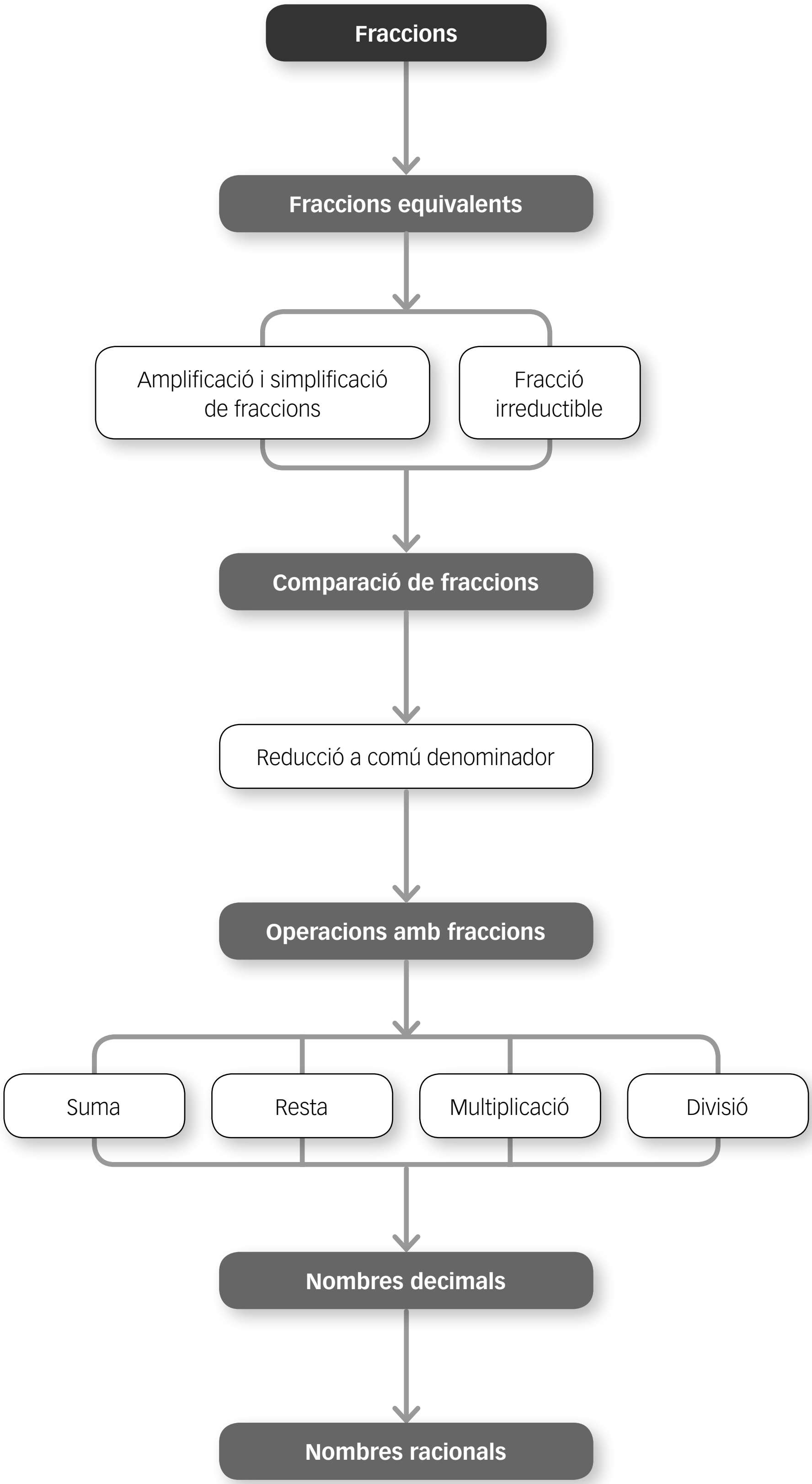
Dossier d'estiu

3r ESO

Nom i cognoms: ____

NOMBRES RACIONALS

ESQUEMA DE LA UNITAT



CURIOSITATS MATEMÀTIQUES

Fraccions i càmeres fotogràfiques

La fotografia ha avançat considerablement. Un dels aspectes més sorprenents és la possibilitat de captar imatges dels fenòmens que l'ull humà és incapaç d'apreciar a causa de la rapidesa amb què passen. Segur que has vist fotografies o pel·lícules on s'observa el moment en què explota un globus, esclata una gota d'aigua quan cau a terra...

Per aconseguir plasmar aquests moments, la càmera ha d'obrir i tancar l'obturador en fraccions de segon. L'obturador és la finestra que deixa passar la llum perquè incideixi en la pel·lícula. Si observes una càmera, hi veuràs marcats uns nombres (50, 100, 200...) que fan referència a aquesta velocitat de l'obturador. El nombre 50 vol dir que l'obturador s'obre i es tanca en $\frac{1}{50}$ de segon.

Les càmeres modernes tenen velocitats de fins a $\frac{1}{12.000}$ de segon.

L'origen de les fraccions

La necessitat i la utilitat de fer servir els nombres naturals per comptar és evident i pràcticament no requereix cap explicació, però per a què podien necessitar les fraccions els nostres avantpassats de fa 50.000 o 100.000 anys?

És fàcil imaginar-se la necessitat de les fraccions. Suposem que un petit grup de tres o quatre caçadors primitius es reuneix per caçar una peça gran, un cérvol o un bisó. Un cop caçada, probablement cap caçador estaria disposat que se l'endugués sencera un dels altres caçadors del grup. Se'ls presentava, per tant, la necessitat de repartir la peça i que cadascú es pogués emportar, aproximadament, un terç o un quart de l'animal, segons els caçadors que fossin.

Segurament va ser així com es va plantejar la necessitat d'aquests nombres nous, que van «en direcció contrària» als de comptar.

NOMBRES RACIONALS

CONTINGUTS PREVIS

CONVÉ QUE...

Repassis els **tipus de nombres** que ja coneixes: nombres naturals, enters, decimals i fraccions.

PERQUÈ...

T'ajudarà a comprendre què és el conjunt dels nombres racionals.

NATURALS → 1, 2, 3, ...

ENTERS → $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

DECIMALS → Exactes: $-0{,}2$; $1{,}34$; $6{,}243$
→ Periòdics: $-1{,}\widehat{3}$; $0{,}6\widehat{2}$; $56{,}\widehat{345}$; $5{,}32\widehat{87}$

FRACCIONS → $-\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{12}{4}$

CONVÉ QUE...

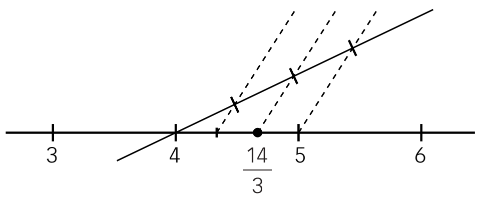
Recordis com **es representa una fracció en la recta numèrica**.

PERQUÈ...

Et servirà per establir relacions d'ordre entre els nombres racionals.

- Si la fracció és **PRÒPIA**, es divideix el segment d'extrems 0 i 1 en tantes parts com indiqui el denominador, i es prenen les que assenyala el numerador.
- Si la fracció és **IMPRÒPIA**, s'expressa la fracció com un nombre enter més una fracció pròpia, i s'aplica el mateix procés del cas anterior al segment que té per extrems aquell nombre enter i el seu consecutiu.

$$\frac{14}{3} \rightarrow \begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \hline 2 & 4 \end{array} \rightarrow \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$$



CONVÉ QUE...

Sàpigues **calcular potències de nombres enters** i fer-hi operacions.

PERQUÈ...

Les potències de fraccions tenen les mateixes propietats.

Si la base és un nombre enter positiu, la potència sempre és positiva.

$$5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3.125$$

Si la base és un nombre enter negatiu, la potència és positiva si l'exponent és parell, i negativa si l'exponent és senar.

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$$

NOMBRES RACIONALS

NOTACIÓ MATEMÀTICA

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$\frac{a}{b}$, a/b	Indiquen una **fracció de numerador *a* i denominador *b***.	$\frac{a}{b}$ o a/b expressen que de b parts n'agafem a.
$\frac{a}{b}$ de c	Indica la **fracció $\frac{a}{b}$ d'una quantitat *c***.	$\frac{a}{b}$ de c expressa la fracció d'una quantitat; el seu valor és el resultat de multiplicar a per c i dividir entre b. $\frac{3}{5}$ de $40 = \frac{3 \cdot 40}{5} = 24$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	Indiquen que la **fracció $\frac{a}{b}$ és equivalent a la fracció $\frac{c}{d}$**.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ indica que les fraccions són equivalents i en aquest cas es compleix que $a \cdot d = c \cdot b$.

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$\left(\frac{a}{b}\right)^n$	Indica la **potència d'una fracció**.	$\left(\frac{3}{7}\right)^4 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3^4}{7^4}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$	Indica la **potència negativa d'una fracció**.	La potència negativa d'una fracció és igual que la seva fracció inversa elevada al mateix exponent però positiu. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^4} = \left(\frac{7}{3}\right)^4 = \frac{7^4}{3^4}$

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$\mathbb{N}$	Indica el **conjunt dels nombres naturals**.	Els conjunts de nombres els indiquem amb lletres majúscules, generalment buides. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ representen els conjunts de nombres naturals, enters i racionals, respectivament.
$\mathbb{Z}$	Indica el **conjunt dels nombres enters**.	
$\mathbb{Q}$	Indica el **conjunt dels nombres racionals**.	

Què vol dir?		Com ho escrivim?
3,21	Indica un nombre **decimal exacte**.	Per escriure un nombre decimal separem amb una coma les xifres enteres de les decimals. El símbol $\frown$ sobre una xifra o grup de xifres indica que es repeteixen indefinidament. Aquest grup s'anomena **període**.
$1,\overset{\frown}{58}$	Indica un nombre **decimal periòdic pur**.	
$2,3\overset{\frown}{4}$	Indica un nombre **decimal periòdic mixt**.	

NOMBRES RACIONALS

PROJECTE MATEMÀTIC

Codis numèrics

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

- Reconèixer l'estructura dels codis de barres.
- Calcular el dígit de control d'un codi de barres.
- Relacionar el càlcul del dígit de control amb els nombres racionals i decimals.

PROBLEMES PROPOSATS

1 Estructura del codi de barres i el seu dígit de control

Actualment, les empreses identifiquen els seus productes amb un codi de barres. Així, als supermercats, quan es passa el codi de cada article pel lector òptic, aquest lector identifica l'article, en busca el preu a la base de dades del supermercat i l'anota en el tiquet.

El codi de barres és un sistema d'identificació que facilita la gestió de mercaderies i permet controlar-ne el subministrament. Cada codi de barres porta associat un nombre per facilitar-ne la interpretació. Quan parlem de codis de barres, ens referim a aquest nombre, ja que és més fàcil treballar-hi.

Hi ha diversos tipus de codificació, i el més estès a Europa és l'anomenat EAN13. Consta de tretze dígits que identifiquen cada producte de manera inequívoca:

- Els tres primers dígits (978) indiquen que el codi és un ISBN i els dos següents corresponen al país. A l'exemple són 84, els dígits associats a Espanya.
- Les set xifres següents identifiquen l'empresa i el producte. A l'exemple, 294 correspon a l'editorial Santillana, i 6820 identifica el producte.
- L'última xifra és l'anomenat dígit de control i es calcula en funció de les altres dotze xifres. En aquest cas és el 5. Amb el dígit de control es poden detectar erro rs en els codis del país, l'empresa o el producte.

Mètode de càlcul del dígit de control

Buscarem el dígit de control del codi de barres de l'exemple i comprovarem que està ben calculat.

1r Agafem les dotze primeres xifres per l'esquerra (totes menys l'última): 978842946820. Multipliquem els elements senars per 1 i els parells per 3. El resultat és:

$$9, 21, 8, 24, 4, 6, 9, 12, 6, 24, 2, 0$$

2n Sumem els valors que hem obtingut al pas anterior:

$$9 + 21 + 8 + 24 + 4 + 6 + 9 + 12 + \\ + 6 + 24 + 2 + 0 = 125$$

3r Dividim la suma resultant entre 10 i agafem el residu de la divisió.

$$\frac{125}{10} = 12 \text{ de quocient i } 5 \text{ de residu}$$

4t El dígit de control és el resultat de restar a 10 el residu del pas anterior: $10 - 5 = 5$

Per tant, el dígit està ben calculat.

Important: Si el residu de la divisió del pas 3r fos 0, agafaríem 0 com a dígit de control.

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS.

a) *En un supermercat han aparegut alguns codis amb dígits de control mal calculats. Indica en quin dels codis aquest dígit és erroni.*

9789501266566 *8411111500001*
9788429464115 *5449000000996*

b) *Observa que aquests dos codis tenen el mateix dígit de control:*

8410201030106 i *8420101030106*

- *Fixa't en l'ordre de les xifres de tots dos nombres. Què hi observes?*
- *Podries construir ràpidament diversos codis amb les mateixes xifres, de manera que el dígit de control fos el mateix?*

c) *Inventa una manera de calcular els dígits de control similar a la que es fa servir a EAN13.*

2 Càlcul del dígit de control amb nombres racionals i decimals

El mètode de càlcul del dígit de control per als codis de barres es basa en operacions senzilles amb nombres naturals.

En el pas 3r es tracta de resoldre un quocient en què el divisor és sempre 10. Sabent que una de les possibles interpretacions d'una fracció és com a quocient de dos nombres, analitzarem la relació entre el mètode de càlcul del dígit de control i els nombres racionals.

Imagina que el resultat obtingut en el pas 3r és 121. En aquest cas tindríem el quocient 121 : 10, que expressat com una fracció seria $\frac{121}{10}$.

Les fraccions que tenen per denominador una potència de 10 les anomenem fraccions decimals.

Aquesta fracció la podem escriure com una suma d'un nombre enter i una fracció impròpia, és a dir, expressar-la com un nombre mixt.

$$\frac{121}{10} = 12 + \frac{1}{10}$$

Quina fracció hauríem de sumar a la fracció anterior per obtenir un nombre enter?

Aquella fracció serà el que li falta a la part fraccionària de la descomposició, $\frac{1}{10}$, per arribar a la unitat.

$$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

El numerador d'aquesta fracció, 9, és el dígit de control corresponent a la suma 121.

Comprova-ho tu mateix.

FES AQUESTES ACTIVITATS.

a) *A continuació tens les sumes obtingudes en el 3r pas per a quatre codis diferents. Calcula el dígit de control associat fent servir fraccions.*

76 84 117 135

b) *Troba, en cada cas, el valor de la suma obtinguda en el pas 3r, sabent el valor del dígit de control i del nombre enter obtingut en la descomposició.*

- *Nombre enter: 7, dígit de control: 4*
- *Nombre enter: 10, dígit de control: 2*
- *Nombre enter: 9, dígit de control: 7*

També és possible calcular el dígit de control fent servir nombres decimals.

Hem vist que, una vegada obtinguda la suma de les xifres, calculem el quocient i el residu de la divisió d'aquesta suma entre 10. Ara bé, podem treballar de la mateixa manera expressant el resultat d'aquesta divisió com un nombre decimal.

Així doncs, podem calcular el resultat de manera ràpida, separant la xifra de la dreta amb una coma, ja que dividim entre 10. En el cas anterior, per a la suma 121 tindríem com a resultat 12,1.

Si restéssim aquest nombre de l'enter immediatament superior, 13, tindríem:

$$13 - 12{,}1 = 0{,}9$$

La xifra de les dècimes del resultat, 9, és el dígit de control.

FES L'ACTIVITAT SEGÜENT.

a) *A continuació tens les sumes obtingudes en el pas 3r per a quatre codis. Determina el dígit de control associat fent servir nombres decimals.*

95 74 106 132

b) *És correcte dir que el dígit de control és 4 si la suma del 3r pas és 94?*

ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Fer un esquema

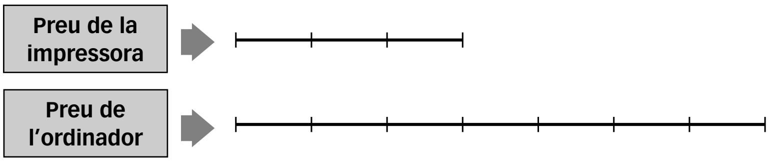
Estratègia En molts problemes és convenient fer un esquema que reflecteixi les condicions de l'enunciat. L'esquema estableix amb claredat les condicions de l'enunciat i ens pot guiar cap a la solució.

PROBLEMA RESOLT

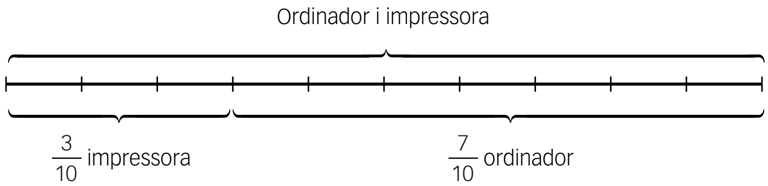
1 **Una persona compra un ordinador i una impressora per 1.080 €. Per la impressora paga $\frac{3}{7}$ del que paga per l'ordinador. Quin és el preu de l'ordinador? I el de la impressora?**

Plantejament i resolució

Si representem el cost de la impressora amb un segment de 3 parts iguals, el cost de l'ordinador s'ha de representar com un segment de 7 parts iguals.



El preu de l'ordinador i el de la impressora el representem amb un segment de 10 parts iguals.



Per tant, el preu de la impressora és: $\frac{3}{10}$ de 1.080 = 324 €

El preu de l'ordinador és: 1.080 − 324 = 756 €

PROBLEMES PROPOSATS

1 Dues empreses *A* i *B* han comprat 500 ordinadors en total. Els ordinadors que ha comprat l'empresa *A* són $\frac{3}{7}$ dels que ha comprat l'empresa *B*.
Quants ordinadors ha comprat cada empresa?

2 Una persona paga en dos terminis una impressora que li va costar 540 €. En el primer termini paga $\frac{3}{5}$ del que pagarà en el segon.

a) Quant paga en cada termini?

b) I si ho paga en tres terminis de manera que el primer és $\frac{2}{3}$ del segon i el segon i el tercer són iguals?

3 Una empresa està substituint els seus ordinadors per uns de més moderns. Actualment en tenen 27 més de nous que d'antics, i els ordinadors nous són $\frac{2}{3}$ del total.
Quants ordinadors de cada tipus té l'empresa?

4 Tres amics es reparteixen el temps de conducció durant un viatge que fan junts de la manera següent: el primer conduirà $\frac{3}{8}$ del que conduirà el segon. El tercer, $\frac{3}{4}$ del que condueixi el segon. Recorren un total de 630 quilòmetres. Quants en conduirà cadascú?

MATEMÀTIQUES AMB L'ORDINADOR

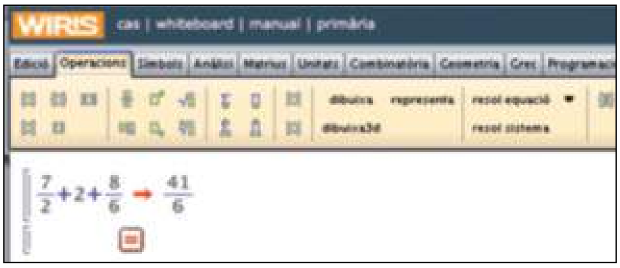
WIRIS

www.wiris.net/demo/wiris/ca

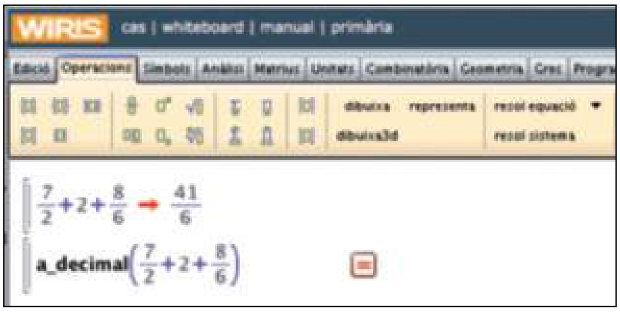
Calcula aquestes operacions. **a)** $\frac{7}{2} + 2 + \frac{8}{6}$ **b)** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

1 Teclegem la primera operació a la finestra de treball. Utilitzem l'eina de la pestanya *Operacions*.

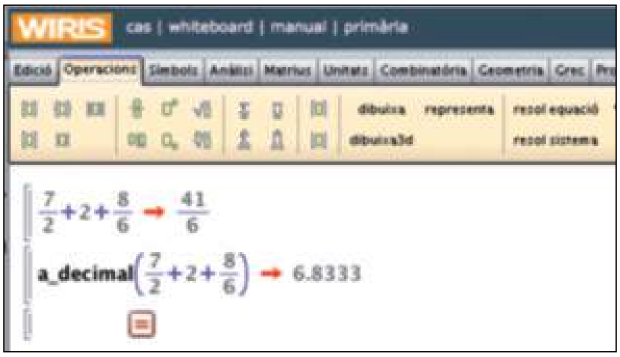
2 Fem clic a la icona i obtenim el resultat en forma de fracció irreductible.

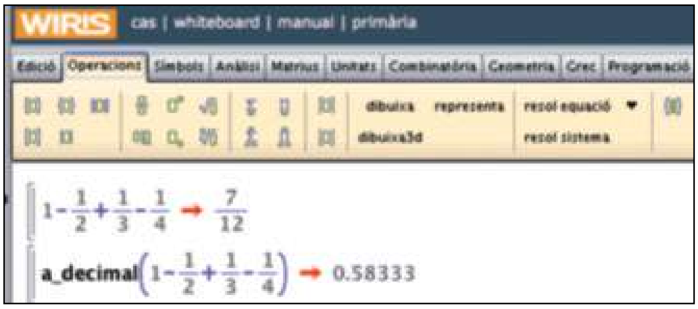


3 Per calcular l'aproximació decimal del resultat, només caldrà fer servir la funció **a_decimal().**



4 Fem clic a la icona i obtenim l'expressió decimal amb 5 xifres significatives.





ACTIVITATS

PRACTICA

1 Resol aquestes operacions amb fraccions, i dóna el resultat en forma de fracció i també l'aproximació decimal.

a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - 1$

b) $5 - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{7}{10}$

c) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

d) $\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3} - 1\right)$

INVESTIGA

2 Contesta les qüestions següents. Fes proves amb diferents nombres, si cal.

a) Com han de ser els nombres a i b perquè $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ tingui un denominador diferent de $a \cdot b$?

b) Què li passarà al al denominador si b és múltiple de a?

NOMBRES RACIONALS

RESUM DE LA UNITAT

Fraccions

- Tota fracció genera un nombre decimal exacte o periòdic, o bé un nombre enter.

$$\frac{12}{2} = 6 \qquad \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \frac{4}{3} = 1{,}\widehat{3} \qquad \frac{13}{6} = 2{,}1\widehat{6}$$

- Fracció d'una quantitat: $\frac{a}{b}$ de $C = \frac{a \cdot C}{b}$.

Fraccions equivalents

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si $a \cdot d = b \cdot c$

Amplificació

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{2.000}{5.000}$$

Simplificació

$$\frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \leftarrow \text{Fracció irreductible}$$

Comparació de fraccions

Reduïm a comú denominador; és més gran la de numerador més alt.

Operacions amb fraccions

Suma i resta de fraccions

Per **sumar** o **restar** fraccions, les reduïm a comú denominador i, després, sumem o restem els numeradors.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

m.c.m. (2, 3) = 6

Multiplicació de fraccions

El **producte** de dues fraccions és una fracció amb numerador el producte dels numeradors i amb denominador el producte dels denominadors.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Divisió de fraccions

El **quocient** de dues fraccions és el producte de la primera fracció per la inversa (fracció amb els termes canviats) de la segona.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Nombres racionals

Un **nombre racional** és un conjunt de fraccions equivalents entre si.

Cadascuna d'aquestes fraccions és un **representant** del nombre racional.

Nombres decimals

Els **nombres decimals** expressen quantitats amb unitats incompletes.

Tipus de nombres decimals

- Un nombre decimal és **exacte** si té una quantitat limitada de xifres decimals.
- Un nombre decimal és **periòdic** si té una quantitat limitada de xifres decimals i, a més, una o més xifres es repeteixen indefinidament. Aquestes xifres s'anomenen *període*.
- Un nombre decimal és **no exacte i no periòdic** si té una quantitat il·limitada de xifres decimals i no se'n repeteix cap indefinidament.

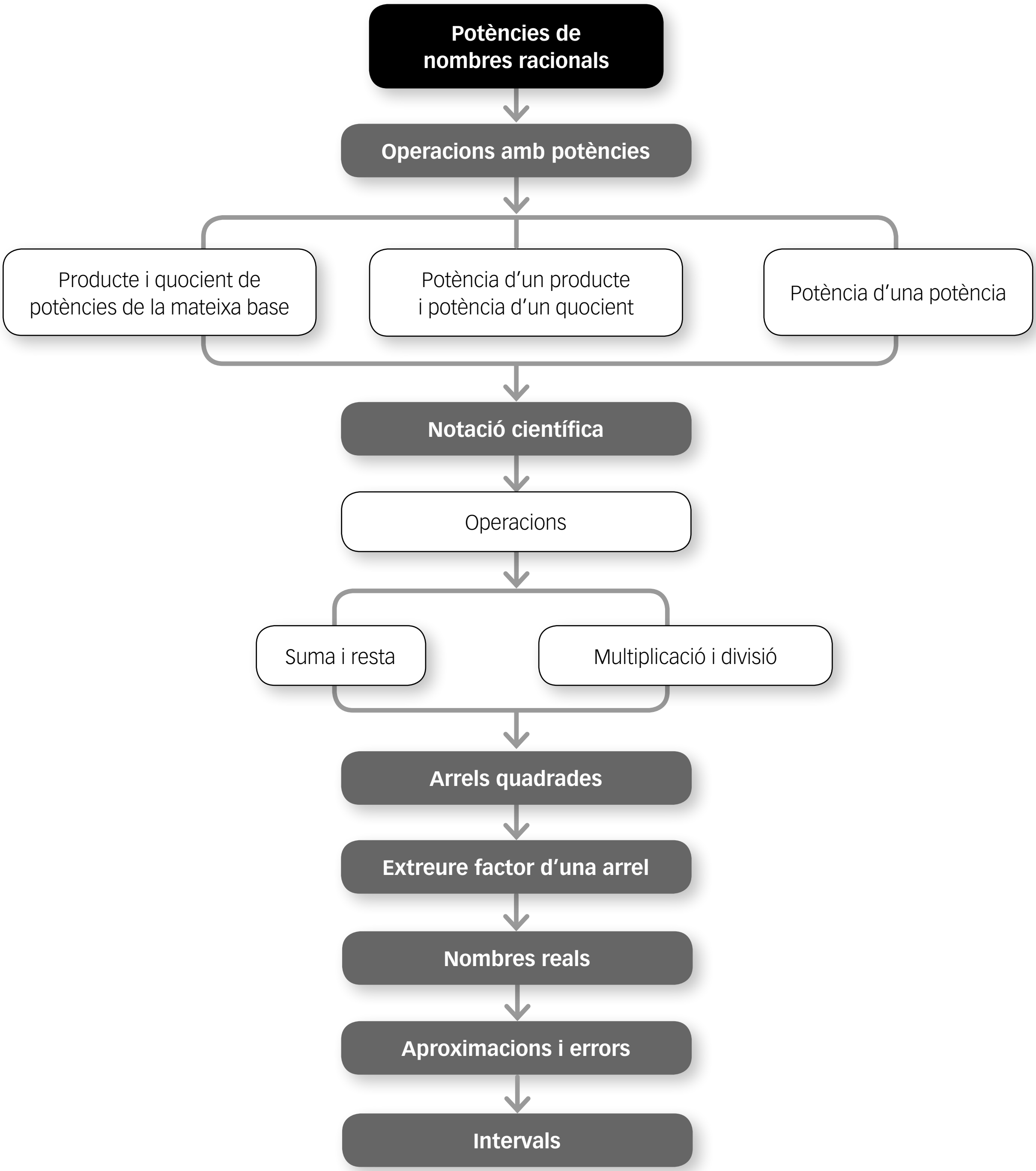
Nombres irracionals

Els nombres decimals no exactes i no periòdics no es poden expressar mitjançant una fracció i, per tant, no són racionals. S'anomenen **nombres irracionals**.

NOTES

POTÈNCIES I ARRELS

ESQUEMA DE LA UNITAT



CURIOSITATS MATEMÀTIQUES

Milions, bilions, quadrilions..., googol

Amb les xifres 1 i 0 podem escriure nombres tan grans com vulguem, fins i tot més grans del que podem imaginar.

Tots aquests nombres s'escriuen fent servir les potències de 10.

El milió (un 1 amb 6 zeros), el bilió (un 1 amb 12 zeros) o el trilió (un 1 amb 18 zeros) s'escriuen com a potències de 10 d'aquesta manera.

1 milió $= 1.000.000 = 10^6$

1 bilió $= 1.000.000.000.000 = 10^{12}$

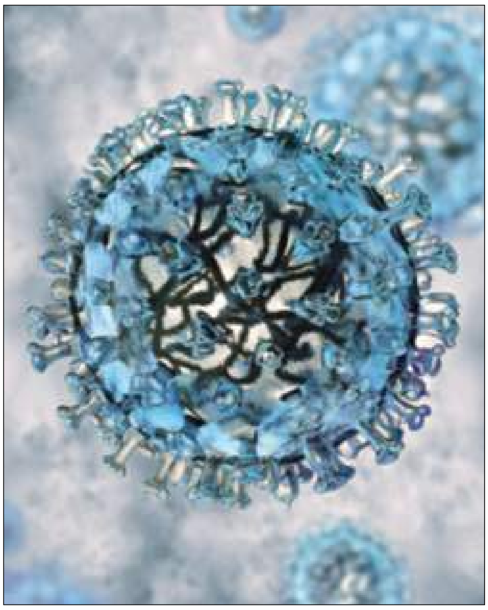
1 trilió $= 1.000.000.000.000.000.000 = 10^{18}$

1 quadrilió $= 1.000.000.000.000.000.000.000.000 = 10^{24}$

Cadascuna d'aquestes quantitats és un milió de vegades més gran que la immediatament anterior: un bilió és un milió de milions, un quadrilió és un milió de trilions, etc.

Les potències de 10 amb exponents grans s'han fet servir des de l'antiguitat. Arquimedes, al segle III aC, va determinar que el nombre de grans de sorra necessaris per omplir l'univers era 10^{51}. L'any 1938, el nebot del matemàtic Edward Kasner va inventar el terme *googol* per designar el nombre 10^{100}. Fins i tot els ordinadors tenen problemes per treballar amb nombres tan grans.

La mida del virus de la grip



Si tenen una mida mitjana, percebem les dimensions de la majoria dels cossos i les distàncies mitjançant els sentits. Però hi ha cossos o distàncies tan grans o tan petits que només en podem percebre les dimensions amb la imaginació o establint comparacions.

Les potències de 10 ens ajuden a percebre aquestes mides i distàncies.

- La longitud d'un passeig de 1.000 metres l'escrivim 10^3 m.
- La distància de la Terra al Sol és de 150 milions de quilòmetres

o 150.000 milions de metres: $1,5 \cdot 10^8$ km o $1,5 \cdot 10^{11}$ m.

Si es tracta de distàncies molt petites, les potències d'exponent negatiu també ens poden ajudar.

- La mida d'un mosquit és de 5 mm, és a dir, $5 \cdot 10^{-3}$ m.
- La mida del virus de la grip és d'1 micra, és a dir, 0,001 mm o 0,000001 m $=$ $= 1 \cdot 10^{-6}$ m.

CONTINGUTS PREVIS

CONVÉ QUE...

Coneguis què són les **fraccions decimals** i com s'expressen com a nombres decimals.

PERQUÈ...

T'ajudarà a comprendre com són les fraccions que expressen nombres decimals exactes.

Anomenem **FRACCIÓ DECIMAL** qualsevol fracció que tingui per denominador una potència de 10.

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \frac{5}{100} = 0{,}05 \qquad \frac{45.283}{10.000} = 4{,}5283$$

$$2{,}3 = \frac{23}{10} \qquad 0{,}23 = \frac{23}{100} \qquad 0{,}023 = \frac{23}{1.000}$$

Una fracció decimal expressa un nombre decimal exacte, i un nombre decimal exacte el podem expressar mitjançant una fracció decimal.

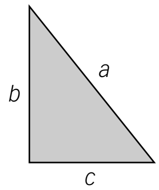
CONVÉ QUE...

Recordis el **teorema de Pitàgores**.

PERQUÈ...

Et farà falta per representar en la recta real alguns nombres irracionals.

Teorema de Pitàgores: en qualsevol triangle rectangle es compleix que la suma dels quadrats dels catets és igual al quadrat de la hipotenusa.



$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

CONVÉ QUE...

Sàpigues portar a terme **l'arrodoniment i el truncament de nombres decimals**.

PERQUÈ...

L'arrodoniment i el truncament de nombres reals segueixen les mateixes regles.

Per **ARRODONIR** o **TRUNCAR** un nombre decimal a un cert ordre, eliminem les xifres d'ordres inferiors a aquest. En el cas de l'arrodoniment, si la xifra següent a la xifra de l'ordre considerat és més gran o igual que 5, augmentem en una unitat aquesta última, i si és més petita la deixem igual.

	Arrodoniment a les mil·lèsimes	**Truncament a les mil·lèsimes**
7,6476	7,648	7,647
0,9274	0,927	0,927
$1,\widehat{7} = 1,7777...$	1,778	1,777

POTÈNCIES I ARRELS

NOTACIÓ MATEMÀTICA

Què vol dir? → **Com ho escrivim?**

$\sqrt{a}$	Indica l'**arrel quadrada d'un nombre.**	Sota el símbol de l'arrel podem expressar qualsevol operació entre nombres.
$\sqrt{a+b}$	Indica l'**arrel quadrada d'una suma** de nombres.	
$\sqrt{a-b}$	Indica l'**arrel quadrada d'una resta.**	
$\sqrt{a \cdot b}$	Indica l'**arrel d'un producte.**	
$a=\sqrt{b}$	El nombre *a* és el resultat de l'arrel quadrada de *b*.	

Què vol dir? → **Com ho escrivim?**

$\mathbb{I}$	Indica el **conjunt dels nombres irracionals.**	El conjunt dels nombres reals l'expressem amb la lletra $\mathbb{R}$ i es compon dels nombres racionals (conjunt $\mathbb{Q}$) i els irracionals (conjunt $\mathbb{I}$).
$\mathbb{R}$	Indica el **conjunt dels nombres reals.**	

Què vol dir? → **Com ho escrivim?**

P	Indica un **punt** de la recta real.	 Els punts els expressem amb lletres majúscules, i els segments amb les lletres que n'indiquen els extrems.
$\overline{AB}$	Indica un **segment** de la recta real que té per extrems els punts *A* i *B*.	

Què vol dir? → **Com ho escrivim?**

[*a*, *b*]	Indica un **interval tancat.**	Un interval és el conjunt de tots els punts d'un segment de la recta real. Si hi apareix el símbol [o], l'extrem pertany a l'interval, i si hi apareix el símbol (o), l'extrem no pertany a l'interval.
[*a*, *b*)	Indica un **interval semiobert.**	
(*a*, *b*]	Indica un **interval semiobert.**	
(*a*, *b*)	Indica un **interval obert.**	

PROJECTE MATEMÀTIC

La Terra i els seus moviments

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:
• Fer servir la notació científica per treballar amb nombres molt grans. • Treballar amb els moviments de la Terra. • Calcular la velocitat dels diferents moviments terrestres. • Conèixer científics que participaren en les investigacions geogràfiques.

1 Localització de punts a la Terra

Per situar punts en l'esfera terrestre s'ha de definir un sistema de coordenades. Saps quines són les coordenades que defineixen la situació de qualsevol punt de la Terra?

En primer lloc, definim l'equador com la línia imaginària formada pel cercle màxim perpendicular a l'eix de gir de la Terra. A partir d'aquest equador situem els punts cap al sud i cap al nord.

La situació d'un punt respecte de l'equador s'anomena latitud i va de 0 a 90 graus.

També hem de definir un meridià zero o línia vertical que ens serveixi per situar els punts a l'est i a l'oest respecte d'aquest meridià. El que es fa servir actualment és el que passa per Greenwich (Gran Bretanya).

La situació d'un punt respecte d'aquest meridià zero s'anomena longitud i va de 0 a 180 graus.

Cada punt de la Terra queda determinat de manera inequívoca amb aquestes coordenades: els graus de latitud (nord o sud respecte de l'equador) i els graus de longitud (est o oest respecte del meridià zero).

FES AQUESTES ACTIVITATS.

a) *Investiga on és Greenwich i per què es va triar aquest meridià.*

b) *Quan es va triar aquest meridià?*

c) *Aquest meridià passa per la península ibèrica. Amb l'ajuda d'un atles, assenyala alguna localitat que tingui longitud 0°.*

d) *Investiga sobre l'evolució de les representacions cartogràfiques.*

2 Forma i mida de la Terra

La Terra té, aproximadament, la forma d'una gran esfera. Estudis recents han descobert que és una mica aplatada en algunes zones, però per als càlculs que et demanem que facis a continuació considerarem que té la forma d'una esfera perfecta.

Quan facis les activitats que et proposem, expressa els resultats en notació científica.

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS.

a) *La unitat de longitud principal és el metre, que es va definir com la deumilionèsima part del quadrant (quarta part) del meridià terrestre. Quina és la longitud del meridià terrestre en metres?*

b) *Una milla nàutica, que és una unitat que es fa servir en navegació, equival a la longitud d'un minut del meridià terrestre. Tenint en compte que un meridià terrestre fa 360º, calcula la longitud d'una milla nàutica en metres.*

c) *Si poguessis fer un túnel que travessés la Terra passant pel centre, on arribaries? Aquest punt s'anomena antípodes.*

d) *Fent servir la definició de metre, calcula quina és la longitud del radi de la Terra.*

e) *Ara que ja saps quin és el radi de la Terra, calcula'n el volum.*

f) *Si la densitat mitjana de la Terra és de 5,5 tones per metre cúbic, quin n'és el pes?*

3 Moviment de rotació de la Terra

La Terra té un moviment de rotació de manera que fa una volta sobre el seu eix de gir cada 24 hores. El resultat més tangible d'aquest moviment és l'alternança dels dies i les nits.

A la fotografia següent, feta des de la Lluna, pots apreciar la línia fosca que separa la part de la Terra on és de dia d'aquella on és de nit.

FES LES ACTIVITATS.

a) *Quan la Terra rota sobre si mateixa, cada punt descriu una circumferència. La longitud d'aquesta circumferència és la mateixa per a tots els punts? En quins és més gran? I més petita?*

b) *Calcula la velocitat de rotació de la Terra a l'equador en metres per segon. Per fer-ho, troba la longitud de la circumferència a l'equador i divideix-la entre els segons que té un dia.*

c) *Troba la velocitat de rotació aproximada que hi ha al lloc on vius. Agafa com a radi de la circumferència en aquest lloc:*

$$r = R\left(1 - \frac{\text{graus de latitud}}{90^\circ}\right)$$

en què R és el radi de la circumferència.

d) *Hi ha altres llocs de la Terra on els seus habitants es desplacin a la mateixa velocitat de rotació que tu? Indica'n algun.*

4 Moviment de translació de la Terra

Tot i que al llarg de la història hi ha hagut altres teories, la Terra es mou al voltant del Sol, amb un moviment que anomenem de translació. Aquest moviment, juntament amb la inclinació del seu eix de gir, origina les estacions.

La trajectòria que segueix és una el·lipse, però s'assembla tant a una circumferència que podem considerar que és un moviment circular.

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS.

a) *Quant de temps triga la Terra a fer una volta completa al voltant del Sol?*

b) *Calcula la velocitat de translació de la Terra al voltant del Sol en quilòmetres per hora.*

Tingues en compte que la distància mitjana de la Terra al Sol és de 150 milions de quilòmetres aproximadament.

5 Un recorregut per la història

Fixar la forma i la mida de la Terra, així com la seva situació respecte de les estrelles, ha constituït un repte al llarg de milers d'anys.

En aquest procés hi han participat diversos científics. La seva aportació destaca en dos fets:

- El mesurament de la longitud de l'equador (feta en el territori de l'actual República de l'Equador), en què va participar Jorge Juan (a la fotografia).
- El mesurament de l'arc de meridià Dunkerke-Barcelona, a partir del qual es va fixar la longitud del metre.

FES AQUESTA ACTIVITAT.

Fes un treball d'investigació en què assenyalis, per a cadascun d'aquests dos esdeveniments, la situació política i econòmica en què es van desenvolupar, les qüestions matemàtiques que pretenien resoldre i els problemes que van superar. Hi pots afegir, a més, tots els aspectes que consideris interessants.

ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Començar pel final

Estratègia Molts problemes es resolen començant per les dades que es donen al principi de l'enunciat. Però hi ha altres problemes, com els que hi ha a continuació, que es resolen més fàcilment començant pel final. Si en algun dels problemes hi ha dades que sobren, se'n prescindeix.

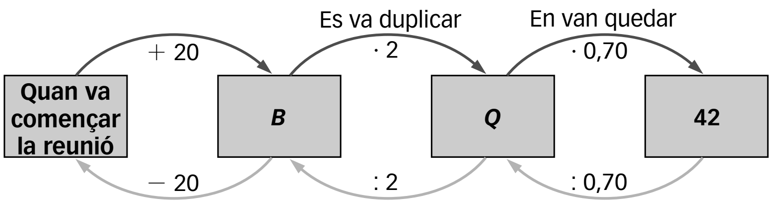
PROBLEMA RESOLT

La reunió anual dels veïns d'una comunitat va començar amb un grup reduït de persones. Deu minuts després van arribar 20 persones. Al cap de quinze minuts s'hi van incorporar altres persones, i el nombre d'assistents es va duplicar. Passada una hora, el 30% de les persones que hi havia va marxar i en van quedar 42. Amb quantes persones va començar la reunió?

Plantejament i resolució

A l'esquema següent es resumeix l'enunciat del problema, i s'assenyala amb fletxes de color clar el procés que se segueix començant per la dada final (42). En aquest problema hem d'ignorar les dades que sobren, que són les que es refereixen al temps.

Segons la part final de l'enunciat, si el 30 % de les persones que hi havia va marxar, en va quedar el 70 %, que són les 42 persones esmentades.



El nombre 42 l'obtenim multiplicant per 0,70 la quantitat Q: $0{,}70 \cdot Q = 42$. Aquesta quantitat Q l'obtenim dividint 42 entre 0,70, és a dir, $Q = 42 : 0{,}70 = 60$.

Un cop sabem la quantitat obtinguda, 60, les quantitats anteriors les trobem seguint la trajectòria de les fletxes de color clar. La quantitat inicial és 10.

$$10 \xleftarrow{-20} 30 \xleftarrow{:\,2} 60 \xleftarrow{:\,0{,}70} 42$$

PROBLEMES PROPOSATS

1 El dia del seu sant, la mare d'en Rubèn li va donar 9 €. Després, el seu pare li va donar els mateixos diners que tenia. A continuació, el seu germà li va donar 8 €. A la tarda, en Rubèn va convidar els seus amics i es va gastar la meitat dels diners que havia aplegat. Quan va acabar el dia li havien sobrat 30 €. Quants diners tenia en Rubèn al començament?

2 Un tren surt amb un nombre de viatgers de l'estació *A*. A la segona estació, *B*, hi pugen 30 persones i quan surten de la tercera estació, *C*, hi viatgen el triple de persones que hi havia quan va arribar a aquesta estació. A la quarta estació, *D*, baixen 13 persones del tren i n'hi queden 137. Quantes persones havien sortit de l'estació *A*?

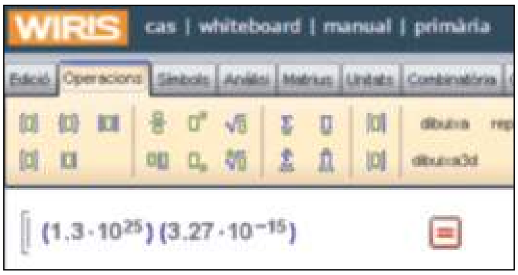
MATEMÀTIQUES AMB L'ORDINADOR

WIRIS
www.wiris.net/demo/wiris/ca

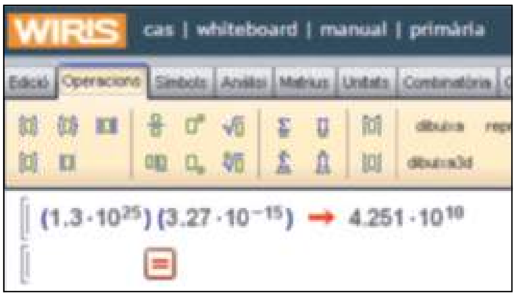
Realitza aquestes operacions i expressa el resultat en notació científica.

a) $(1{,}3 \cdot 10^{25}) \cdot (3{,}27 \cdot 10^{-15})$ **b)** $(1{,}3 \cdot 10^{25}) : (3{,}27 \cdot 10^{-15})$ **c)** $(3{,}27 \cdot 10^{-15}) : (1{,}3 \cdot 10^{25})$

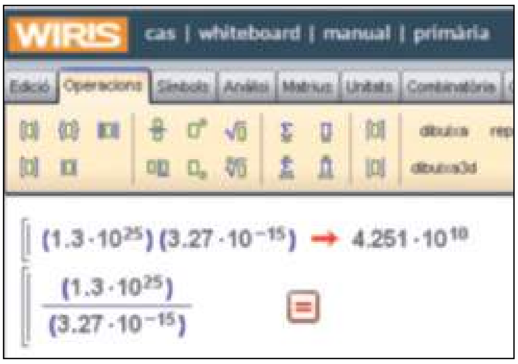
1 Escrivim la primera operació utilitzant l'eina del menú *Operacions* per escriure les potències.



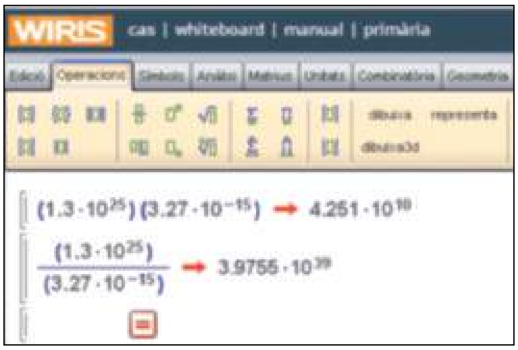
2 Fem clic a la icona, que apareix darrere de l'expressió, i obtenim el resultat en notació científica amb 4 xifres decimals.

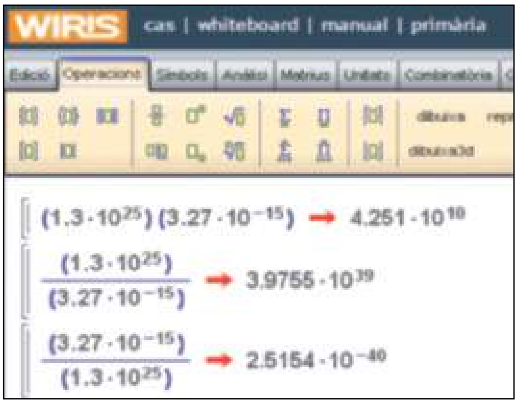


3 Per a la divisió, utilitzarem l'eina per indicar el quocient i per escriure les potències.



4 Fem clic a la icona, i obtenim el resultat en notació científica amb 4 xifres decimals.





ACTIVITATS

PRACTICA

1 Resol aquestes operacions i expressa el resultat en notació científica.

a) $(2{,}21 \cdot 10^{33}) \cdot (6{,}2 \cdot 10^{-17})$

b) $(2{,}21 \cdot 10^{33}) : (6{,}2 \cdot 10^{-17})$

c) $(6{,}2 \cdot 10^{-17}) : (2{,}21 \cdot 10^{33})$

INVESTIGA

2 Escriu un nombre en notació científica, $a \cdot 10^{b}$, i calcula'n l'invers en notación científica, $c \cdot 10^{d}$.

a) Quant val el producte $a \cdot c$?

b) Quina relació tenen els nombres b i d?

POTÈNCIES I ARRELS

RESUM DE LA UNITAT

POTÈNCIES

D'exponent enter positiu:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vegades}}$$

- Potència d'una potència: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- Producte de potències de la mateixa base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Quocient de potències de la mateixa base: $a^n : a^m = a^{n-m}$

D'exponent enter negatiu:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Notació científica

L'expressió d'un nombre en notació científica consisteix a representar-lo com el producte:
– D'un nombre enter, o bé d'un decimal amb una sola xifra, diferent de zero, a la part entera.
– D'una potència de 10 (positiva o negativa).

Operacions
- Suma i resta
  $6{,}032 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-7} = 6{,}032 \cdot 10^{-9} - 0{,}04 \cdot 10^{-9} = (6{,}032 - 0{,}04) \cdot 10^{-9} = 5{,}992 \cdot 10^{-9}$
- Multiplicació i divisió
  $(1{,}043 \cdot 10^9) \cdot (6{,}002 \cdot 10^7) = (1{,}043 \cdot 6{,}002) \cdot (10^9 \cdot 10^7) = 6{,}260086 \cdot 10^{16}$
  $(3{,}9 \cdot 10^{15}) : (1{,}2 \cdot 10^9) = (3{,}9 : 1{,}2) \cdot (10^{15} : 10^9) = 3{,}25 \cdot 10^6$

Nombres reals

Nombres irracionals

Conjunt dels nombres que no es poden expressar mitjançant fraccions.
Els nombres irracionals són nombres decimals amb una quantitat il·limitada de decimals no periòdics.
π
$\sqrt{2}; -\sqrt{3}; \sqrt{51}; \ldots$
$0{,}010010001\ldots; -14{,}12312412512\ldots; \ldots$

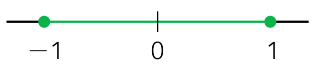
Aproximació de nombres reals

	Arrodoniment a les centèsimes	Truncament a les centèsimes
3,795	3,80	3,79
$3{,}\overset{\frown}{57}$	3,58	3,57
$\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$	1,73	1,73

Intervals

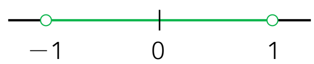
Un **interval** és un conjunt de nombres que es corresponen amb els punts d'un segment de la recta real.

[−1, 1]



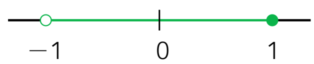
Conté tots els punts compresos entre −1 i 1, inclosos els extrems, −1 i 1.

(−1, 1)



Conté tots els punts compresos entre −1 i 1, exclosos els extrems, −1 i 1.

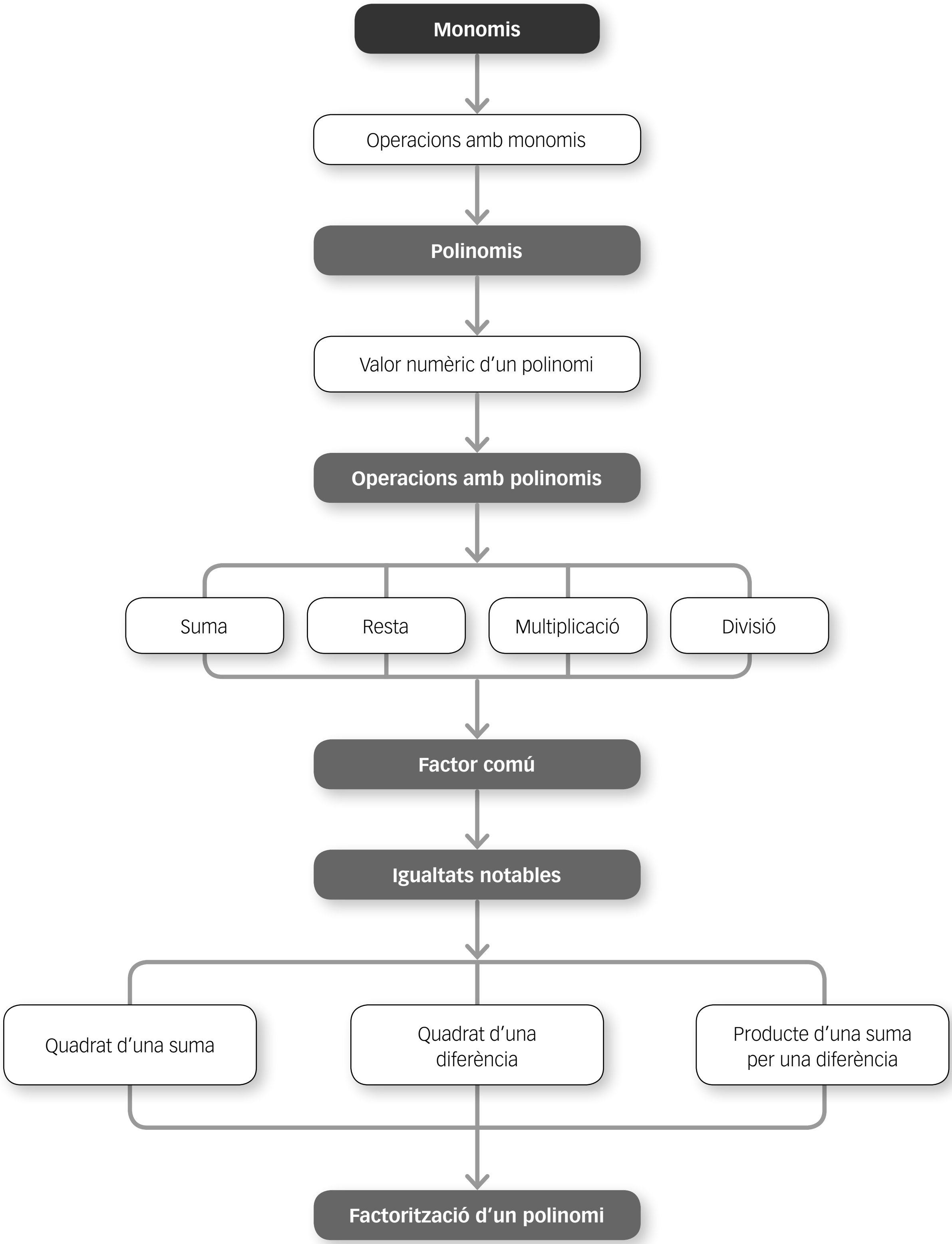
(−1, 1]



Conté tots els punts compresos entre −1 i 1, exclòs −1 i inclòs 1.

NOTES

PRESENTACIÓ DE LA UNITAT



CURIOSITATS MATEMÀTIQUES

Descomposició de quadrats i cubs perfectes

Es pot descompondre qualsevol quadrat perfecte en suma de dos quadrats ($a^2 = b^2 + c^2$)?

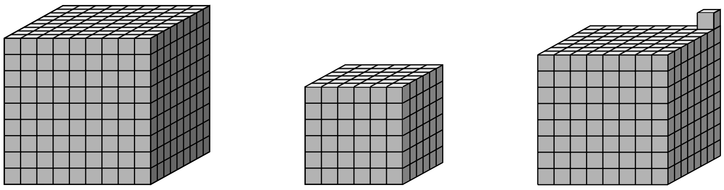
La llista de quadrats perfectes és: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144…

Dels quadrats anteriors, això és possible només per a $a^2 = 25$ (9 + 16) i $a^2 = 100$ (36 + 64). Per tant, la resposta a la pregunta anterior és que a vegades sí i a vegades no, és a dir, que no sempre es pot.

Què passa amb els cubs perfectes a^3, com, per exemple, 1, 8, 27, 64, 125…?

Leonhard Euler (1707-1783) va demostrar que: «Cap cub perfecte, per gran que sigui, es pot descompondre en suma de dos cubs perfectes més petits». En termes geomètrics, si tens un cub construït amb a^3 glaçons i intentes construir amb aquests glaçons dos cubs més petits (iguals o diferents), veuràs que és impossible; per a un dels cubs sempre ens faltaran o sobraran «glaçons», com es pot veure a la figura.

No només és impossible la igualtat $a^3 = b^3 + c^3$, sinó que també és impossible la igualtat $a^n = b^n + c^n$, per a $n > 2$, i a, b, c, nombres enters. Aquest és l'anomenat últim teorema de Fermat, demostrat pel matemàtic anglès Andrew J. Wiles el 1994.



$$9^3 = 6^3 + 8^3 + 1$$
$$729 = 216 + 512 + 1$$

La caiguda lliure

Els polinomis es presenten en molts contextos de la vida real. Un exemple d'aquests contextos és la caiguda lliure.

La caiguda lliure és el moviment que fa un cos deixat en llibertat en un camp gravitatori, sense estar afectat per cap altra força.

Un dels primers científics a estudiar el moviment dels cossos en caiguda lliure va ser l'italià Galileu (1564-1642).

Es diu que Galileu va llançar des de dalt de la torre de Pisa diverses esferes de pesos diferents (boles de marbre, de plom i de fusta) i va comprovar que arribaven a terra alhora.

La fórmula que expressa el moviment d'un cos en caiguda lliure ve donada pel polinomi:

$$P(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

en què t indica el temps recorregut des que va començar a caure el cos, g és l'acceleració de la gravetat a la Terra (9,8 m/s²) i $P(t)$ és el valor de l'espai recorregut pel cos en aquest temps t.

CONTINGUTS PREVIS

CONVÉ QUE... Recordis la **propietat distributiva**. **PERQUÈ...** Et farà falta per fer operacions amb polinomis.	**PROPIETAT DISTRIBUTIVA DE LA SUMA I DE LA DIFERÈNCIA RESPECTE DEL PRODUCTE** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ $2 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$ $5 \cdot (6 - 3) = 5 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 30 - 15 = 15$
CONVÉ QUE... Sàpigues **calcular el m.c.m. i el m.c.d.** **PERQUÈ...** Ho necessitaràs per sumar i restar polinomis amb coeficients fraccionaris.	El **MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE** de dos nombres és el més petit dels seus múltiples comuns. Es calcula multiplicant els factors primers comuns i no comuns elevats a l'exponent més gran. $\text{m.c.m.}\,(24, 36) = \text{m.c.m.}\,(2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$ El **MÀXIM COMÚ DIVISOR** de dos nombres és el més gran dels seus divisors comuns. El calculem multiplicant els factors primers comuns elevats a l'exponent més petit. $\text{m.c.d.}\,(24, 36) = \text{m.c.d.}\,(2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 3^2) = 2^3 \cdot 3 = 12$
CONVÉ QUE... Repassis la **jerarquia de les operacions**. **PERQUÈ...** Ho faràs servir per calcular el valor numèric d'un polinomi.	Quan apareixen operacions combinades, l'ordre establert és el següent: 1r Resolem les operacions dels parèntesis i claudàtors. 2n Fem les potències i les arrels. 3r Fem els productes i les divisions, d'esquerra a dreta. 4t Fem les sumes i restes, d'esquerra a dreta. $(-5)^2 + [3 + 27 : (-3)^3] = (-5)^2 + 3 + 27 : (-3)^3 =$ $= 25 + 3 + 27 : (-27) = 25 + 3 - 1 = 28 - 1 = 27$
CONVÉ QUE... Recordis les operacions de **multiplicació i divisió de potències amb la mateixa base**. **PERQUÈ...** Et serà útil per fer productes i quocients de monomis i polinomis.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$

NOTACIÓ MATEMÀTICA

Què vol dir? → **Com ho escrivim?**

$5x^3$	Expressa un monomi de grau 3 i coeficient 5.	En l'expressió general d'un monomi distingim parts diferents. $\underbrace{\overset{\text{Coeficient}}{a}\,x^{\overset{\text{Exponent = Grau}}{n}}}_{\text{Part literal}}$ En la part literal s'acostuma a fer servir la lletra x, però també s'utilitzen y, z, t, u, v…
ax^n	Expressa un **monomi de grau *n* i coeficient *a***.	

Què vol dir? → **Com ho escrivim?**

$P(x)$ $Q(x)$ $R(x)$	Indiquen **polinomis que només tenen una variable, *x***.	En la part literal s'acostuma a fer servir la lletra **x**, però també s'utilitzen $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$… $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x - 7$ $P(3) = 3^4 + 3 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 - 7 = 149$ $P(x, y) = 2x^2y + 3xy^2 - x^2 + 2xy - 34$ $P(2, 1) = 2 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 34 = = -20$
$P(x, y)$	Indica un **polinomi amb dues variables, *x* i *y***.	
$P(3)$	Indica el valor del polinomi $P(x)$ per a $x = 3$.	
$P(2, 1)$	Indica el valor del polinomi $P(x, y)$ per a $x = 2$, $y = 1$.	

Què vol dir? → **Com ho escrivim?**

$P(x) + Q(x)$ $P(x) - Q(x)$ $P(x) \cdot Q(x)$ $P(x) : Q(x)$	Indiquen **operacions bàsiques** que podem fer amb els polinomis $P(x)$ i $Q(x)$.	Escrivim els polinomis i entre ells hi col·loquem els signes de les operacions $+$, $-$, $\cdot$ i $:$. Per a la multiplicació no fem servir l'aspa $\times$, perquè la podríem confondre amb la variable x.

Què vol dir? → **Com ho escrivim?**

$Q(x)$	Indica el **polinomi quocient** d'una divisió de polinomis.	Quan fem una divisió de polinomis $D(x) : d(x)$, s'obté un polinomi quocient, $Q(x)$, i un polinomi residu, $R(x)$. $\underbrace{D(x)}_{\text{Dividend}} = \underbrace{d(x)}_{\text{Divisor}} \times \underbrace{Q(x)}_{\text{Quocient}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Residu}}$
$R(x)$	Indica el **polinomi residu** d'una divisió de polinomis.	

PROJECTE MATEMÀTIC

El NIF i el número de la Seguretat Social

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

- Calcular la lletra que correspon a cada número de DNI.
- Trobar el dígit de control d'un número de la Seguretat Social.
- Obtenir la lletra de DNI fent servir polinomis.
- Calcular el dígit de control del número de la Seguretat Social amb polinomis.

1 Càlcul de la lletra d'un número de DNI i del dígit de control d'un número de la Seguretat Social

El NIF (número d'identificació fiscal) està format per la unió de DNI i una lletra, associada a aquest número de manera única.

L'Enric ha anat a una agència de viatges per fer una reserva. Per fer-ho li demanen el NIF. Recorda el seu número de DNI, 5.366.821, però no la lletra que li correspon. Com pot calcular-la?

Mètode de càlcul

Per obtenir la lletra associada al número hem de seguir els passos següents.

1r Dividim el número de DNI entre 23, sense obtenir decimals, i anotem el residu de la divisió.

$$5.366.821 : 23 = 233.340{,}0434...$$

Quocient: 233.340; Residu: 1

2n Mirem en aquesta taula quina lletra està associada al residu, el nombre 1. La lletra és la R.

A	3	J	13	S	15
B	11	K	21	T	0
C	20	L	19	V	17
D	9	M	5	W	2
E	22	N	12	X	10
F	7	P	8	Y	6
G	4	Q	16	Z	14
H	18	R	1		

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS

a) *Determina la lletra dels NIF següents.*

49.125.369 *36.713.405*

22.557.217 *15.151.515*

b) *Escriu tres números diferents de DNI que tinguin associada la mateixa lletra.*

El número de la Seguretat Social té 12 xifres. Les dues primeres són l'indicatiu provincial, després vénen 8 xifres la primera de les quals és 1 o 0, i acaba amb dues xifres que s'anomenen dígit de control.

La Lluïsa treballa en un centre de salut i, quan introdueix un número de la Seguretat Social a l'ordinador, l'avisa que el dígit de control és erroni. Com es calcula el dígit de control?

Mètode de càlcul

El dígit de control l'obtenim a partir de les altres 10 xifres del número, de la manera següent.

1r Mirem la tercera xifra per l'esquerra, que serà un 1 o un 0. Si és un 1, agafem les 10 xifres i formem un nombre. Si és un 0, en prescindim i agafem les altres 9.

2n Dividim aquest nombre entre 47 i anotem el residu de la divisió, que escrivim com un nombre de dues xifres. Aquest residu és el dígit de control.

FES AQUESTES ACTIVITATS

a) *Comprova que el dígit de control d'aquests números és correcte: 281038585534; 160123456733.*

b) *Calcula el dígit de control per a aquests grups de 10 nombres: 4612568974; 2102365984.*

2 Càlcul de la lletra del DNI i del dígit de control fent servir polinomis

Tot i que en la realitat el càlcul de la lletra del DNI es fa com hem vist anteriorment, podríem fer aquesta associació de número i lletra amb un mètode alternatiu fent servir polinomis.

Una manera senzilla i ràpida d'assignar una lletra a un nombre de manera coherent seria:

1r Agafem el número del DNI. Aquest número té 7 o 8 xifres. Si té 7 xifres, el multipliquem per 10, fins a aconseguir un nombre de 8 xifres.

2n Substituïm aquest número en el polinomi següent i en calculem el valor numèric.

$$P(x) = \frac{x}{99.999.999} + 1$$

3r Determinem l'interval al qual pertany aquest nombre segons la taula i li associem la lletra corresponent.

A	[1,10; 1,14)	N	[1,58; 1,62)
B	[1,14; 1,18)	P	[1,62; 1,66)
C	[1,18; 1,22)	Q	[1,66; 1,70)
D	[1,22; 1,26)	R	[1,70; 1,74)
E	[1,26; 1,30)	S	[1,74; 1,78)
F	[1,30; 1,34)	T	[1,78; 1,82)
G	[1,34; 1,38)	V	[1,82; 1,86)
H	[1,38; 1,42)	W	[1,86; 1,90)
J	[1,42; 1,46)	X	[1,90; 1,94)
K	[1,46; 1,50)	Y	[1,94; 1,98)
L	[1,50; 1,54)	Z	[1,98; 2,02)
M	[1,54; 1,58)		

Així doncs, per al DNI 38.220.310, el valor del polinomi seria:

$$P(38220310) = \frac{2,00 - 1,10}{23} + 1 = 1,3822\ldots$$

I la lletra que li correspondria és la H.

Observem que, com que x és un nombre de 8 xifres, quan el dividim entre 99.999.999, obtenim un nombre decimal comprès entre 0,10 i 1,00.

Quan li sumem 1, el resultat estarà entre 1,10 i 2. Necessitem fer 23 intervals, un per a cada lletra. Per fer-ho, dividim en intervals de la mateixa longitud aquest conjunt de nombres:

$$\frac{2,00 - 1,10}{23} = 0,039\ldots \simeq 0,04$$

Per tant, cada interval té amplitud 0,04 (diferència entre els extrems).

Per calcular el dígit de control del número de la Seguretat Social podem actuar de manera semblant. Agafem les 10 primeres xifres del nombre (sense tenir en compte si la tercera xifra per l'esquerra és 1 o 0) i en calculem el valor segons el polinomi:

$$P(x) = \frac{x}{4.700.000.000}$$

El dígit de control estaria format per les dues primeres xifres decimals del resultat.

Per al número 1.912.451.204:

$$P(1912451204) = \frac{1.912.451.204}{4.700.000.000} = 0,4069045\ldots$$

En aquest cas, el dígit de control és el nombre 40.

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS.

a) *Fent servir polinomis, calcula la lletra que correspondria a aquests números de DNI.*

23.456.785 *10.152.458*

4.589.632 *15.002.369*

b) *Escriu dos números de DNI que tinguin la mateixa lletra associada quan fem el càlcul amb polinomis.*

c) *Determina tots els números de DNI que tinguin associada la lletra K amb aquest mètode.*

d) *Inventa't un mètode propi per assignar a cada número de DNI una lletra. Raona'n el funcionament.*

e) *Fent servir polinomis, calcula el dígit de control dels números següents.*

2315678580 *1615245870*

4508963233 *1500293695*

f) *Escriu dos grups de 10 xifres que tinguin el mateix dígit de control quan fem servir polinomis.*

g) *Determina tots els grups de nombres de 10 xifres que tinguin associat el dígit 61 amb aquest mètode.*

h) *Inventa un mètode propi per calcular el dígit de control d'un número de la Seguretat Social. Raona'n el funcionament.*

ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Expressar relacions en forma algebraica

Estratègia Per resoldre molts problemes s'ha d'expressar i relacionar les dades i condicions de l'enunciat per mitjà d'expressions algebraiques.

Després de llegir atentament l'enunciat del problema, anomenem amb lletres els nombres desconeguts i expressem les relacions i condicions de l'enunciat per mitjà d'aquestes lletres.

PROBLEMA RESOLT

En una bossa amb boles verdes i vermelles fem successivament aquests canvis.

1r Traiem 7 boles verdes i n'introduïm 5 de vermelles.

2n Dupliquem el nombre de boles verdes i n'extraiem 6 de vermelles.

3r Introduïm 3 boles verdes i tripliquem el nombre de vermelles.

4t Dividim entre 4 el nombre de boles verdes i entre 5 el de vermelles.

Plantejament i resolució

La taula següent mostra l'expressió algebraica del nombre de boles de cada color i del nombre total de boles després dels canvis successius.

	Nombre de boles verdes	Nombre de boles vermelles	Nombre total de boles
Inici	x ↓	y ↓	$x + y$ ↓
1r canvi	$x - 7$ ↓	$y + 5$ ↓	$(x - 7) + (y + 5) = x + y - 2$ ↓
2n canvi	$2(x - 7) = 2x - 14$ ↓	$(y + 5) - 6 = y - 1$ ↓	$(2x - 14) + (y - 1) = 2x + y - 15$ ↓
3r canvi	$(2x - 14) + 3 = 2x - 11$ ↓	$3(y - 1) = 3y - 3$ ↓	$(2x - 11) + (3y - 3) = 2x + 3y - 14$ ↓
4t canvi	$\frac{2x - 11}{4}$	$\frac{3y - 3}{5}$	$\frac{2x - 11}{4} + \frac{3y - 3}{5}$

PROBLEMA PROPOSAT

1 **En un rectangle, de dimensions *a* i *b*, es produeixen aquests canvis.**

1r En doblem la base i en reduïm l'altura 5 cm.

2n Afegim 6 cm a la base i 2 cm a l'altura.

3r Dividim la base entre 3 i afegim 1 cm a l'altura.

4t Afegim 2 cm a la base i reduïm l'altura a la meitat.

Completa la taula en què s'expressen algebraicament el perímetre i l'àrea del rectangle en cada canvi.

	Base	Altura	Perímetre	Àrea
Inici	a	b	$2a + 2b$	$a \cdot b$
1r canvi				
2n canvi				
3r canvi				
4t canvi				

MATEMÀTIQUES AMB L'ORDINADOR

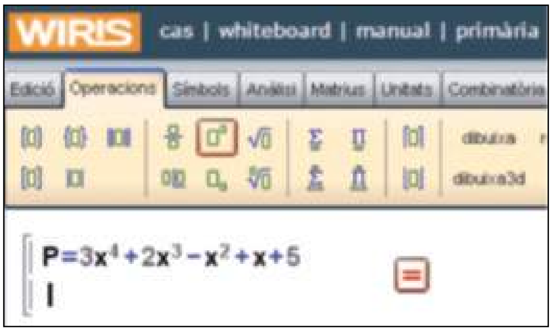
WIRIS

wiris.net/demo/wiris/ca

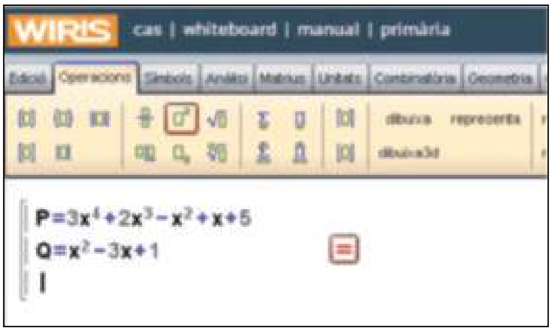
Calcula la suma i el producte dels polinomis següents.

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 5 \qquad Q(x) = x^2 - 3x + 1$$

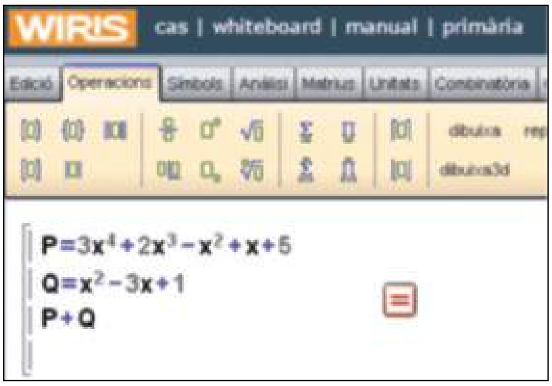
1 Anomenem *P* el primer polinomi. L'escrivim fent servir l'eina $\square^{\square}$ per als exponents i cliquem a la tecla **Intro**.



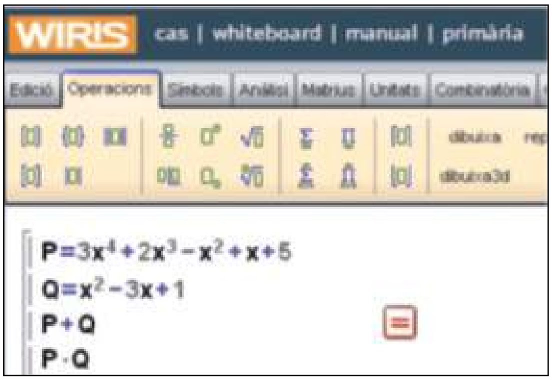
2 Anomenem *Q* el segon polinomi. L'escrivim també fent servir l'eina $\square^{\square}$ per als exponents i cliquem a la tecla **Intro**.



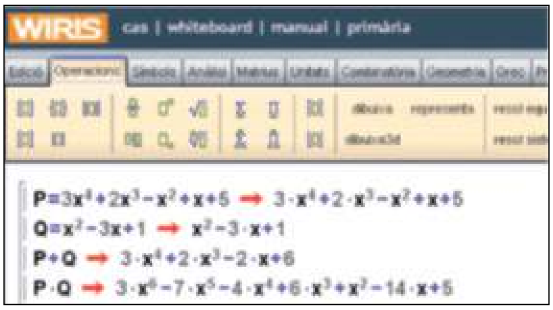
3 Escrivim la primera operació **P** + **Q**, i premem la tecla **Intro**.



4 Escrivim la segona operació **P** · **Q**, i premem la tecla **Intro**.



5. Finalment, cliquem al signe $\equiv$ que hi ha darrere de les expressions i obtenim els polinomis reduïts i els resultats de les operacions.



ACTIVITATS

PRACTICA

1 Suma i multiplica aquests polinomis.

a) $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x \qquad Q(x) = x - 1$

b) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 7 \qquad Q(x) = x^3 - x$

c) $P(x) = x^7 - 2 \qquad Q(x) = x^5 + 2$

d) $P(x) = 1 + 3x - 2x^2 \qquad Q(x) = -x + 5$

INVESTIGA

2 Inventa't tres polinomis $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$, i comprova si es verifiquen les propietats següents.

a) $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

b) $P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$

c) $P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q(x)$

Creus que es verifica per a qualsevol polinomi?

POLINOMIS

RESUM DE LA UNITAT

MONOMIS

Un **monomi** és una expressió algebraica formada pel producte d'un nombre, anomenat *coeficient*, i per una o més lletres elevades a un nombre natural, que configuren la *part literal* del monomi.

Dos **monomis** són **semblants** si tenen la mateixa part literal.

Polinomis

Termes → Monomis

Polinomi → $P(x) = 5x^3 + 7x^2 - \underbrace{4}_{\text{Terme independent}}$ → Grau 3

Valor numèric de $P(x)$ per a $x = 2$ → $P(2) = 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^2 - 4 = 64$

Operacions amb polinomis

Suma i resta

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \\ Q(x) = 2x^2 - x + 3 \end{array}\right\} P(x) + Q(x) \rightarrow \begin{array}{r} x^3 + x^2 + x + 1 \\ +\quad 2x^2 - x - 3 \\ \hline x^3 + 3x^2 \quad\quad - 2 \end{array}$$

$$P(x) = x^3 - x^2 + 2$$

$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5 \xrightarrow{\text{oposat}} -Q(x) = -x^3 - 2x^2 + 5$$

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x)) \rightarrow \begin{array}{r} x^2 - x + 2 \\ + -x^3 - 2x^2 \quad + 5 \\ \hline -x^3 - x^2 - x + 7 \end{array}$$

Multiplicació

$$\left.\begin{array}{l} T(x) = 2x^3 + x + 1 \\ S(x) = 2x^2 + x \end{array}\right\} T(x) \cdot S(x) \rightarrow \begin{array}{r} 2x^3 + \quad x + 1 \\ 2x^2 + x \\ \hline 2x^4 \quad\quad + x^2 + x \\ 4x^5 \quad + 2x^3 + 2x^2 \quad \\ \hline 4x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x \end{array}$$

Divisió

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + x^2 + x + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 \quad + 2x & 2x + 1 \\ \cline{1-1} x^2 + 3x + 1 & \\ -x^2 \quad + 1 & \\ \cline{1-1} 3x + 2 & \end{array}$$

Quocient: $2x + 1$ Residu: $3x + 2$

$$2x^3 + x^2 + x + 1 = (2x + 1)(x^2 - 1) + (3x + 2)$$

Regla de Ruffini

$$(2x^3 - x^2 - 4) : (x + 2) \rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 0 & -4 \\ -2 & & -4 & 10 & -20 \\ \hline & 2 & -5 & 10 & -24 \end{array} \leftarrow \text{Residu}$$

Quocient: $2x^2 - 5x + 10$

Igualtats notables

Quadrat d'una suma:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Quadrat d'una diferència:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Suma per diferència:

$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

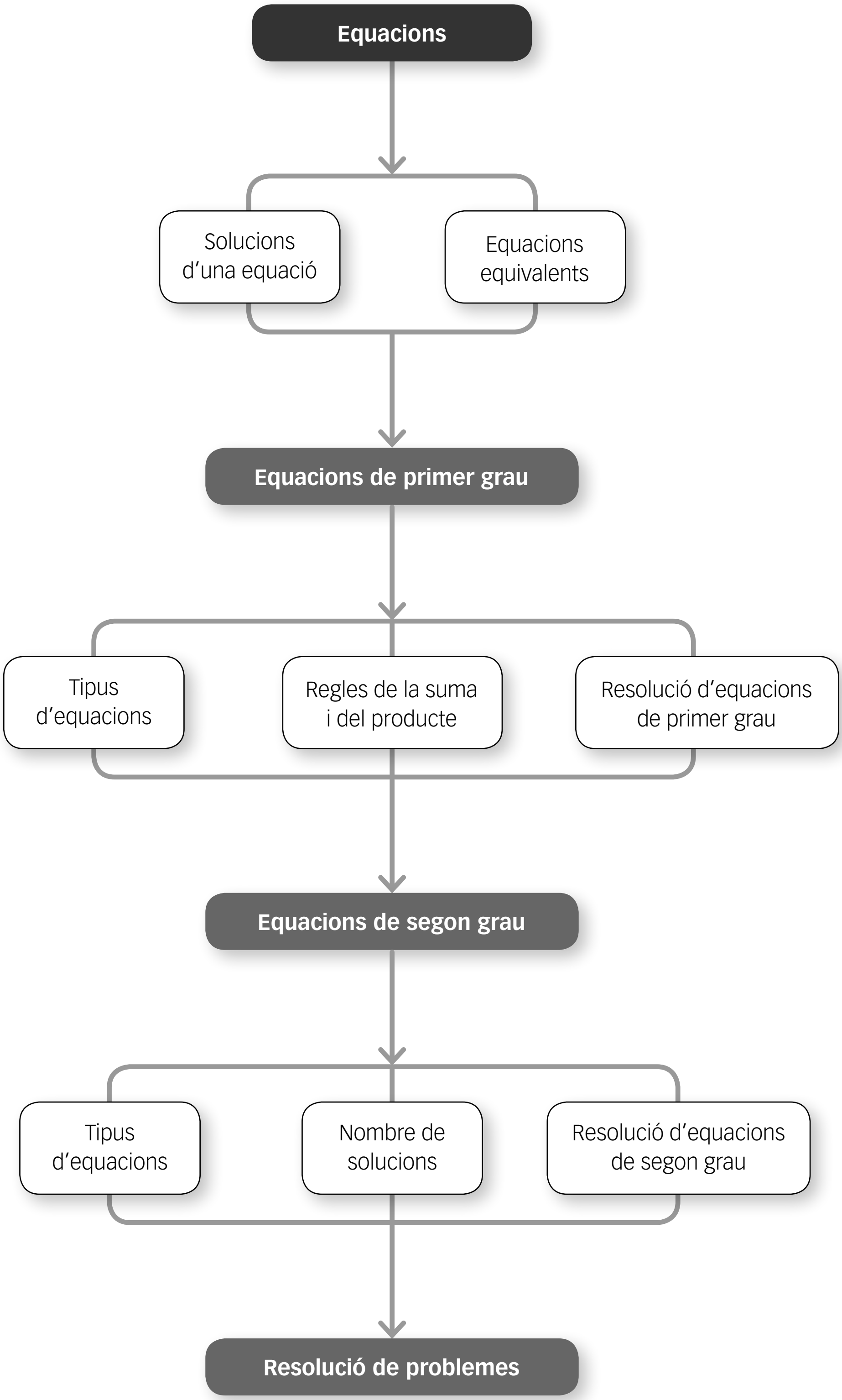
Factorització de polinomis

Factoritzar un polinomi és escriure'l com a producte dels seus polinomis divisors de grau més petit.

$P(x) = 4x^5 + 8x^4 + 5x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)(2x + 1)^2$

NOTES

ESQUEMA DE LA UNITAT



CURIOSITATS MATEMÀTIQUES

Les incògnites

L'ús de les lletres *x*, *y*, *z* per representar les incògnites, i l'ús de les primeres lletres de l'abecedari per a valors coneguts, apareixen al llibre *La géométrie* de Descartes. Es diu que quan el llibre s'estava imprimint, com que tenia una gran quantitat d'equacions, els treballadors de la impremta es quedaven sense lletres, i l'impressor va preguntar a Descartes si podia fer servir altres lletres per a les equacions. Descartes li va respondre que li era indiferent les lletres que utilitzés a les equacions. L'impressor va triar la *x* perquè en francès aquesta lletra es fa servir poc.

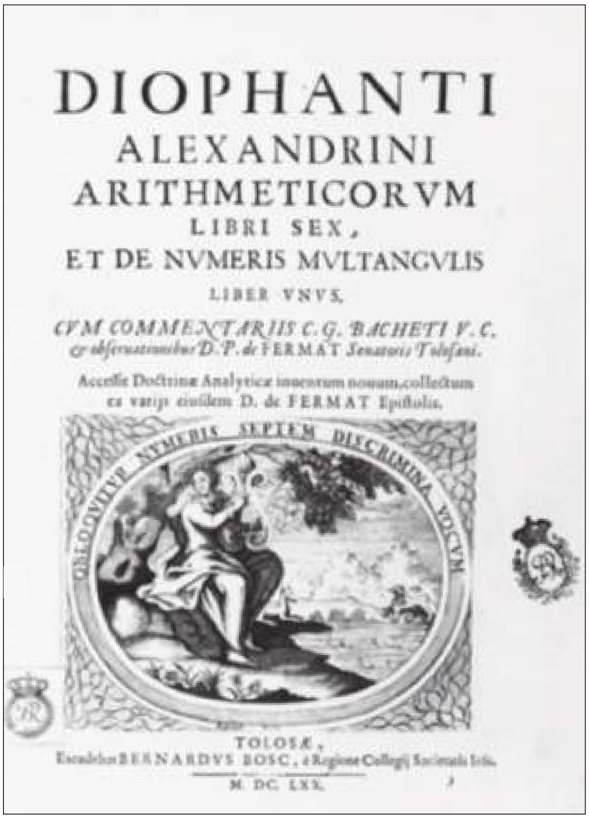
Altres versions afirmen que la *x* es va fer servir com a abreviatura de la paraula àrab *shei* ('cosa').

Diofant també feia servir una lletra grega amb accent per representar una quantitat desconeguda.

Un problema de Diofant

Diofant va ser un matemàtic amb una sola obra coneguda, *Aritmètica*. Es tracta d'una col·lecció de problemes que es resolen sempre reduint a una incògnita, que ell va anomenar *aritmo* ('nombre'). Amb l'*aritmo*, Diofant aconsegueix resoldre equacions de diferents graus.

Ara resoldrem un problema de Diofant de dues maneres: amb el mètode que ell feia servir i amb el procediment que utilitzem actualment.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

PROBLEMA

Descompon un nombre (per exemple, 100) en dues parts, la diferència de les quals et vingui donada (per exemple, 40).

Solució de Diofant

Suposem que la part petita és 1 *aritmo*.
La part gran és 1 *aritmo* més 40 unitats.
I la suma de totes dues és 2 *aritmos* més 40 unitats.
La suma anterior ha de ser 100.
Restem 40 de 2 *aritmos* i 40, i també de 100.
Els 2 *aritmos* que queden valdran 60 unitats.
I cada *aritmo* valdrà 30 unitats, que serà la part gran.

Solució actual

Part petita: x

Part gran: $x + 40$

$$x + (x + 40) = 100$$
$$2x + 40 = 100$$
$$2x + 40 - 40 = 100 - 40$$
$$2x = 60$$
$$x = 30 \rightarrow \text{part petita}$$
$$30 + 40 = 70 \rightarrow \text{part gran}$$

EQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

CONTINGUTS PREVIS

CONVÉ QUE... Coneguis què és el **grau** d'un polinomi. **PERQUÈ...** Et servirà per distingir les equacions de primer i de segon grau.	El **GRAU** d'un monomi és la suma dels exponents de la part literal. Per exemple, el grau de $9x^2y^3z$ és: $2 + 3 + 1 = 6$. El grau d'un polinomi coincideix amb el del seu monomi de grau més gran. $\text{grau}\,(x^3 + 2x^2 - x + 1) = \text{grau}\,(x^3) = 3$ $\text{grau}\,(xy^2 + 3x^3y - 1) = \text{grau}\,(3x^3y) = 4$
CONVÉ QUE... Sàpigues **calcular el valor numèric** d'un polinomi. **PERQUÈ...** Ho faràs servir per verificar les solucions.	$P(x) = x^2 - 3x + 2$ per a $x = 2$ $P(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$ $Q(x,y) = 2xy^2 + 3x^2y$ per a $x = 2,\ y = 1$ $Q(2,1) = 2 \cdot 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 = 16$
CONVÉ QUE... Estiguis habituat a **fer operacions amb polinomis**. **PERQUÈ...** Perquè et farà falta per resoldre equacions.	**Suma de polinomis** $(x^2 - 3x + 2) + (x + 3) = x^2 - 3x + 2 + x + 3 = x^2 - 2x + 5$ **Resta de polinomis** $(x^2 - 3x + 2) - (x + 3) = x^2 - 3x + 2 - x - 3 = x^2 - 4x + 1$ **Producte de polinomis** $(x^2 - 3x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot 3 - 3x \cdot x - 3x \cdot 3 + 2 \cdot x + 2 \cdot 3 =$ $= x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x + 2x + 6 = x^3 - 7x + 6$ **Divisió de polinomis** $\begin{array}{rr\|l} x^2 - 3x & +\ \ 2 & x + 3 \\ \cline{3-3} -x^2 - 3x & & x - 6 \\ \hline -\ 6x & +\ \ 2 & \\ 6x & +\ 18 & \\ \hline & 20 & \end{array}$
CONVÉ QUE... Sàpigues com s'**extreu el factor comú**. **PERQUÈ...** Et farà falta per resoldre equacions de segon grau.	**Extreure el factor comú** és una aplicació de la propietat distributiva. $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ $x^2 - 3x = x \cdot x - 3 \cdot x = x(x - 3)$

NOTACIÓ MATEMÀTICA

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$ax + b = 0$	Indica l'**expressió general d'una equació de primer grau**.	Quan escrivim una equació amb una sola incògnita acostumem a agafar la lletra x per designar la incògnita, tot i que també podem fer servir altres lletres, com y, z, t…
$ax^2 + bx + c = 0$	Indica l'**expressió general d'una equació de segon grau**.	La manera més usual d'expressar equacions és agrupar els termes en un membre de l'equació i igualar a zero.

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Indica les **dues solucions possibles d'una equació de segon grau**.	En una equació de segon grau, a és el coeficient de x^2, b és el coeficient de x i c és el terme independent. Quan en la fórmula de la solució apareix el símbol $\pm$, vol dir que l'equació té dues solucions, una sumant i una altra restant. La fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ equival a dues solucions, que són: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
x_1, x_2	Indiquen les **dues arrels d'una equació de segon grau**.	

Què vol dir?		Com ho escrivim?
Δ	Indica el **discriminant** d'una equació de segon grau.	El símbol $\Delta = b^2 - 4ac$ expressa un nombre que es calcula a partir dels coeficients de l'equació de segon grau. Es fa servir per conèixer el nombre de solucions reals que té una equació sense necessitat de resoldre-la.

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$x(ax + b) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}$	El claudàtor indica que hi ha **diverses possibilitats**.	Quan en una equació es representen diverses possibilitats, les agrupem en un claudàtor; per exemple, quan resolem una equació de segon grau, $ax^2 + bx = 0$, ens trobem amb el pas: $x(ax + b) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}$ que vol dir: «Si el producte de dos factors és zero, almenys un dels factors ha de ser zero».

PROJECTE MATEMÀTIC

Animals ràpids

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

- Conèixer la velocitat que poden assolir diversos animals.
- Resoldre problemes reals fent servir equacions.

1 Animals terrestres

La velocitat dels animals depèn en gran part del medi pel qual es desplacen.

Igual que els mitjans de transport construïts per l'home, els animals més ràpids són els que es desplacen per l'aire: els segueixen els que es desplacen per terra i, després, els que ho fan per l'aigua.

A la taula següent apareixen velocitats màximes a què arriben alguns animals terrestres.

Animal	Velocitat
Antílop americà	97 km/h
Cavall	69 km/h
Zebra	65 km/h
Cérvol	78 km/h
Girafa	58 km/h
Elefant	40 km/h
Llebrer	67 km/h
Goril·la	48 km/h
Guepard	115 km/h
Lleó	80 km/h

FES AQUESTES ACTIVITATS SUPOSANT QUE ELS ANIMALS ES MOUEN MITJANÇANT L'EQUACIÓ: $\mathbf{e = v \cdot t}$

a) *Un guepard és a 75 m d'un antílop. En el mateix instant en què el guepard comença a perseguir l'antílop, aquest inicia la fugida.*

- *Quin avantatge porta l'antílop després de 5 segons?*
- *En quanta distància es redueix l'avantatge de l'antílop cada segon?*
- *Quant de temps tarda el guepard a atrapar-lo?*

b) *Un lleó comença la persecució d'una zebra quan la distància que els separa és de 200 m. Quants segons tarda a atrapar-la? Fes-ne un esquema i resol el problema.*

c) *Un lleó comença a perseguir una zebra quan la té a una distància* d *(en m). Expressa en funció de* d *el temps que tarda a atrapar-la.*

d) *Un animal, separat* d *metres d'un altre, comença a perseguir-lo. Si les seves velocitats són* v_1 *i* v_2 *km/h, respectivament, expressa en funció de* d, v_1 *i* v_2 *el temps que tarda a atrapar-lo i quines condicions s'han de complir perquè ho aconsegueixi.*

EQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

2 Animals del mar i de l'aire

Els animals del mar i de l'aire més ràpids arriben a velocitats superiors a les dels animals que es desplacen per terra.

A la taula següent apareixen velocitats màximes d'alguns animals marins i alguns ocells.

Animal	Velocitat
Orca	55 km/h
Dofí	64 km/h
Peix espasa	90 km/h
Balena blava	40 km/h
Àliga daurada	300 km/h
Falciot	200 km/h
Cigne	90 km/h
Ànec	85 km/h

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS.

a) *Expressa les velocitats de la balena blava i del dofí en m/s. Arrodoneix a les unitats i fes-les servir per respondre la resta de les activitats.*

b) *Un dofí i una balena blava estan separats entre si 330 m. Si avancen per trobar-se,*

– *Quina distància els separa al cap de 10 s?*

– *En quants metres es redueix la distància cada segon?*

– *Quant temps tarden a trobar-se?*

c) *Si tots dos avancessin per trobar-se i estiguessin a* d *metres de distància, quant tardarien a trobar-se?*

d) *Dos animals, separats entre si una distància* d *(en m) van l'un cap a l'altre. Si les seves velocitats són* v_1 *i* v_2 *km/h, respectivament, expressa en funció de* d, v_1 *i* v_2 *el temps que tarden a trobar-se.*

e) *Calcula les velocitats de l'àliga daurada i del falciot en m/s. Arrodoneix-les a la unitat i fes-les servir per respondre la resta d'activitats.*

f) *Una àliga és a 810 m d'un falciot. S'hi dirigeix en línia recta sense que l'altre, que vola a 80 km/h cap a l'àliga, se n'adoni. Al cap de 3 s, el falciot veu l'àliga i comença fugir en direcció contrària a la velocitat màxima, i l'àliga el persegueix.*

– *A quina distància és l'àliga quan el falciot s'adona que l'està perseguint?*

– *En quina quantitat disminueix la distància entre tots dos cada segon en aquest període?*

– *Quan el falciot fuig, quant disminueix la distància cada segon?*

– *Quant de temps tarda l'àliga a atrapar-lo?*

g) *Determina el temps que tardaria una àliga a atrapar un falciot en un cas similar a l'anterior, si la distància inicial fos de 500 m i el falciot se n'adonés al cap de 5 s.*

h) *A quina distància mínima ha d'estar una àliga d'un falciot perquè aquest, que se n'adona immediatament i és a 100 m de la paret rocosa on es refugia, aconsegueixi salvar-se?*

EQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Escollir la incògnita

Estratègia En els problemes que presenten més d'una quantitat, mesura o nombre desconeguts, l'elecció adequada de la incògnita permet plantejar l'equació més senzilla.

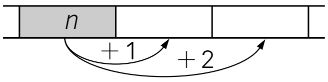
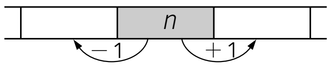
La incògnita ha de ser el nombre o quantitat desconeguts que proporcionen l'equació més senzilla.

PROBLEMA RESOLT

La suma dels quadrats de tres nombres naturals consecutius és 434.
Quins són aquests nombres?

Plantejament i resolució

Observa que la dificultat de l'equació depèn de l'elecció de la incògnita.

La incògnita és el nombre més petit	La incògnita és el nombre intermedi
	
Els nombres els expressem amb $n, n+1, n+2$.	Els nombres els expressem amb $n-1, n, n+1$.
PLANTEJAMENT	**PLANTEJAMENT**
$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 434$	$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 434$

Desenvolupa, en cada cas, l'equació del plantejament i simplifica.

Quin tipus d'equació resulta en cada cas? Quina és la més senzilla?

Resol l'equació més senzilla i troba els nombres.

PROBLEMES PROPOSATS

1 La diferència entre dos nombres naturals és 2, i el seu producte 168. Per trobar aquests nombres:

a) Escriu l'equació resultant si la incògnita és un dels nombres i si triem com a incògnita el nombre intermedi.

b) Resol l'equació més senzilla de les dues i determina els nombres.

2 Troba dos nombres naturals la diferència dels quals sigui 4 i el producte sigui 96.

3 La suma de tres nombres naturals consecutius és 96. Quins són aquests nombres?

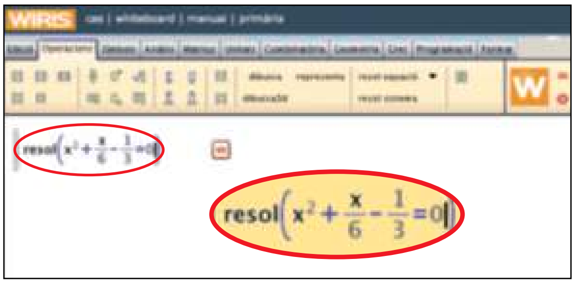
MATEMÀTIQUES AMB L'ORDINADOR

WIRIS

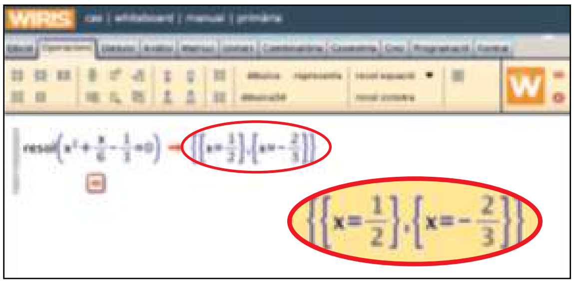
www.wiris.net/demo/wiris/ca

Resol aquestes equacions **a)** $x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{3} = 0$ **b)** $4x^2 - 8x + 13 = 0$ **c)** $5x^2 = 4x - \frac{4}{5}$

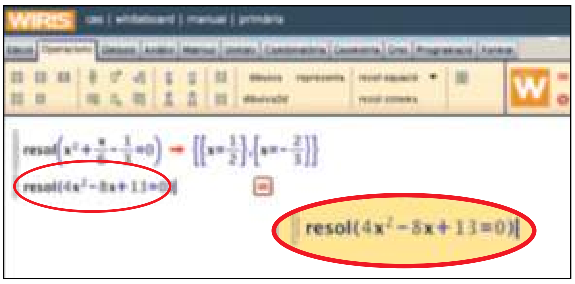
1 Per resoldre les equacions utilitzem la funció **resol()**. Introduïm la primera equació en aquesta funció.



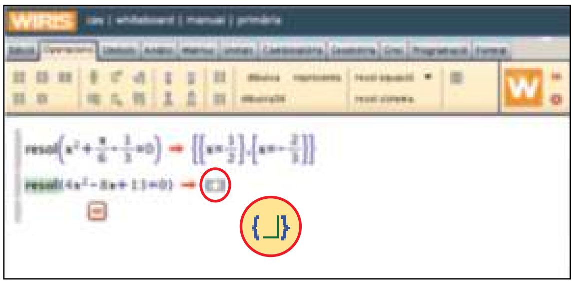
2 Fem clic a la icona i obtenim dos valors de x entre claudàtors. Aquests valors són les dues solucions de l'equació de segon grau.



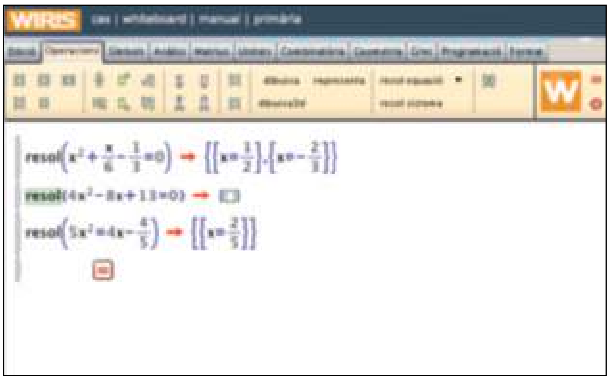
3 Tornem a utilitzar la funció **resol()**. Introduïm la segona equació que hem de resoldre.



4 Fem clic a la icona i obtenim un espai en blanc entre dos claudàtors; això passa perquè l'equació no té cap solució real.



5. Repetim el procés per a la tercera equació i obtenim un únic valor entre claudàtors. Això passa perquè l'equació té una única solució doble.



ACTIVITATS

PRACTICA

1 Resol les equacions següents:

a) $3x^2 - 11x + 6 = 0$

b) $2x^2 - 7x = 0$

c) $3x^2 - x + 6 = 0$

d) $x^2 = 5x + 14$

INVESTIGA

2 Dóna valors a b i c en una equació del tipus $x^2 + bx + c = 0$, i comprova que:

a) Si té dues solucions x_1 i x_2, aleshores: $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

b) Si té una solució x_1, aleshores: $x^2 + bx + c = (x - x_1)^2$

EQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU

RESUM DE LA UNITAT

EQUACIONS

Una **equació** és una igualtat algebraica que es verifica només per a uns valors determinats de les lletres que hi apareixen.

$$\underbrace{\underbrace{3x^3}_{\text{terme}} + \underbrace{7(x-1)^2}_{\text{terme}}}_{\text{1r membre}} = \underbrace{\underbrace{2x}_{\text{terme}} + \underbrace{5}_{\text{terme}} - \underbrace{(x-1)}_{\text{terme}}}_{\text{2n membre}} \rightarrow \text{grau 3}$$

Resolució d'equacions de primer grau

$$\frac{2(x+1)}{3} - \frac{x+3}{4} = -\frac{3-x}{2}$$

PRIMER. Eliminem els denominadors.

m.c.m. $(3, 4, 2) = 12$

$$12\left(\frac{2(x-1)}{3} - \frac{x+3}{4}\right) = 12\left(-\frac{3-x}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \cdot 2(x-1) - 3(x+3) = -6(3-x)$$

SEGON. Traiem els parèntesis.

$$8x - 8 - 3x - 9 = -18 + 6x$$

TERCER. Reduïm els termes semblants.

$$5x - 17 = -18 + 6x$$

QUART. Agrupem els termes amb x en un dels membres, i els nombres, a l'altre.

$$-17 + 18 = 6x - 5x$$

CINQUÈ. Aïllem la incògnita.

$$1 = x$$

SISÈ. Comprovem la solució.

$$\frac{2(1-1)}{3} - \frac{1+3}{4} = -\frac{3-1}{2} \rightarrow -1 = -1$$

Resolució d'equacions de segon grau

CAS 1. Si $b = 0$ i $c = 0$ $\rightarrow$ $ax^2 = 0$

$$ax^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{0}{a} = 0 \rightarrow x = 0$$

Solució única, $x = 0$.

CAS 2. Si $c = 0$ $\rightarrow$ $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax+b) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Dues solucions.

CAS 3. Si $b = 0$ $\rightarrow$ $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si $-\dfrac{c}{a} > 0$, dues solucions. Si és negatiu, no té solució.

CAS 4. Si $a \neq 0$ i $b \neq 0$ $\rightarrow$ $ax^2 + bx + c = 0$

FÓRMULA GENERAL $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $\Delta > 0$ té dues solucions. Si $\Delta = 0$, una solució, i si $\Delta < 0$, no hi ha solució.

Resolució de problemes mitjançant equacions

PRIMER. Identifiquem les dades conegudes i les desconegudes del problema. Escollim una dada desconeguda com a incògnita.

SEGON. Relacionem les dades conegudes i les desconegudes mitjançant una equació.

TERCER. Resolem l'equació.

QUART. Comprovem i interpretem la solució.

NOTES

ESQUEMA DE LA UNITAT

CURIOSITATS MATEMÀTIQUES

Problemes de mescles i aliatges

El fonament dels problemes de mescles és l'existència, en el mercat, de productes de la mateixa classe, però de qualitats i preus diferents. És per això que és interessant barrejar dues qualitats d'un mateix producte amb la finalitat d'obtenir una qualitat intermèdia amb un preu que estigui comprès entre els preus dels productes barrejats.

Un magatzem vol barrejar vi de 3 €/ℓ amb un altre vi de 6 €/ℓ per obtenir una barreja a 4,20 €/ℓ. Quants litres de cada classe s'han de barrejar per obtenir 3.000 litres de barreja?

Siguin x els litres de la primera classe i y els litres de la segona classe. Quan traduïm l'enunciat en equacions, resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3.000 \\ 3x + 6y &= 4{,}20 \cdot 3000 = 12.600 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{array}{lrcl} & -3x - 3y & = & -9.000 \\ & 3x + 6y & = & 12.600 \\ \hline \text{Sumem:} & 3y & = & 3.600 \rightarrow y = 1.200 \end{array}$$

Per tant, $x = 3.000 - y = 1.800$
S'han de barrejar 1.800 litres de vi de primera classe amb 1.200 litres de segona classe.

Els problemes d'aliatges són semblants als de mescles. Un aliatge és la barreja de dos metalls de valor diferent. El metall de més valor s'anomena metall fi. La llei de l'aliatge és el quocient entre el pes del metall fi i el pes total de l'aliatge. Per exemple, si un lingot d'aliatge de coure i or, de pes 0,8 kg, conté 600 g d'or i 200 g de coure, la seva llei és:

$$\text{llei} = \frac{\text{metall fi}}{\text{metall total}} = \frac{600 \text{ g}}{800 \text{ g}} = 0{,}75 = 750 \text{ mil·lèsimes}$$

SISTEMES D'EQUACIONS

CONTINGUTS PREVIS

CONVÉ QUE...

Repassis les **taules de valors**.

PERQUÈ...

T'ajudaran a trobar les solucions d'una equació o un sistema.

Donada l'equació $y = 3x - 1$, podem construir-ne la taula de valors.

Per a $x = -3$, $y = 3 \cdot (-3) - 1 = -10$. Després, fem el mateix amb la resta de valors de la taula.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−10	−7	−4	−1	2	5	8

CONVÉ QUE...

Recordis les **gràfiques de les funcions de proporcionalitat directa**.

PERQUÈ...

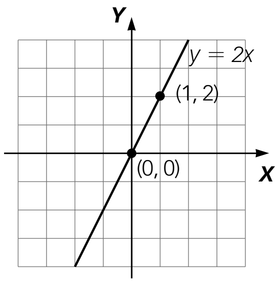
Les faràs servir per resoldre gràficament sistemes d'equacions.

Les **FUNCIONS DE PROPORCIONALITAT NUMÈRICA** són de la forma $y = mx$, en què x i y són les variables i m és un coeficient conegut. La representació gràfica és una recta.

La representació de la funció $y = 2x$ és una recta.

Per obtenir-la només hem de calcular dos valors i unir els punts resultants amb una línia recta.

$(x = 0, y = 0)$
$(x = 1, y = 2)$



CONVÉ QUE...

Sàpigues **resoldre equacions de primer grau**.

PERQUÈ...

Et farà falta per resoldre sistemes.

Donada l'equació $2x - 3 = 5x + 3$, en calculem la solució:

$$2x - 5x = 3 + 3 \rightarrow -3x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{-3} = -2$$

Després comprovem la solució:

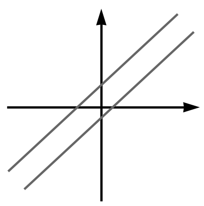
$$2 \cdot (-2) - 3 = 5 \cdot (-2) + 3 \rightarrow -4 - 3 = -10 + 3 \rightarrow -7 = -7$$

CONVÉ QUE...

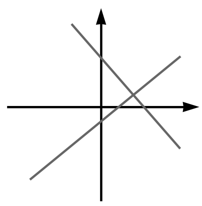
Coneguis les **posicions relatives de dues rectes en el pla**.

PERQUÈ...

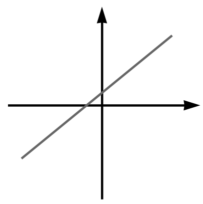
Et farà falta per comprovar gràficament el nombre de solucions d'un sistema.



Paral·leles



Secants



Coincidents

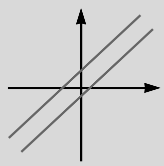
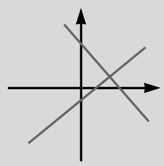
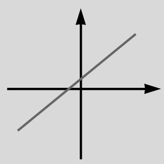
SISTEMES D'EQUACIONS

NOTACIÓ MATEMÀTICA

Què vol dir? →		Com ho escrivim?
$ax + by = c$	Indica una **equació de primer grau amb dues incògnites**.	Les incògnites de les equacions les acostumem a representar amb les últimes lletres de l'abecedari, normalment x, y, z, i representen quantitats desconegudes. Les primeres lletres de l'abecedari les fem servir per als coeficients de les incògnites i el terme independent, i representen quantitats conegudes.

Què vol dir? →		Com ho escrivim?
$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$	Representa un **sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites**.	Per escriure un sistema d'equacions posem les equacions l'una a sota de l'altra, i les agrupem amb un claudàtor de tancament, }. Això indica que la solució que busquem ha de complir totes les equacions que hi ha dins del claudàtor.

Què vol dir? →		Com ho escrivim?
$\begin{array}{rr} & 2x - 3y = 5 \\ + & -2x + 4y = -3 \\ \hline & y = 2 \end{array}$	Indica que estem sumant les equacions membre a membre.	Quan volem reduir un sistema d'equacions, col·loquem una equació a sota de l'altra mantenint les incògnites semblants alineades. Després, tracem una línia a sota i fem l'operació (suma o resta) que estigui indicada a la part esquerra.

Què vol dir? →		Com ho escrivim?
	Dues **rectes paral·leles** indiquen que el sistema **no té solució**.	Per resoldre un sistema d'equacions lineals gràficament representem les dues equacions sobre els mateixos eixos de coordenades. • Si les rectes es tallen en un sol punt, la solució del sistema és única. Aquest punt és la solució del sistema. • Si les rectes són paral·leles, el sistema no té solució, i si són coincidents, el sistema té infinites solucions.
	Dues **rectes secants** indiquen que el sistema té **una solució**.	
	Dues **rectes coincidents** indiquen que el sistema té **infinites solucions**.	

PROJECTE MATEMÀTIC

Problemes matemàtics clàssics

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

- Conèixer i resoldre problemes matemàtics clàssics.
- Resoldre problemes fent servir equacions i sistemes d'equacions.

1 Problemes antics

Els sistemes d'equacions lineals es coneixen i treballen des de fa milers d'anys. Alguns van ser resolts pels babilonis, que es referien a les incògnites amb paraules.

Els grecs resolien alguns sistemes fent servir mètodes geomètrics, i els indis també van treballar la resolució de sistemes.

Amb la introducció dels símbols a l'àlgebra, a partir del segle XVI, es van desenvolupar les tècniques de resolució actuals.

Alguns dels problemes que proposem aquí tenen una gran tradició matemàtica. D'alguns en sabem l'origen, com el problema de l'eixam, que és de procedència índia, i el del cavall i la mula, que s'atribueix a Euclides, però de la majoria no en sabem la font.

Els problemes d'aquesta pàgina, i alguns dels de la pàgina següent, es resolen fàcilment mitjançant sistemes d'equacions, d'altres mitjançant una equació, mentre que n'hi ha que quan mirem de resoldre'ls mitjançant sistemes o equacions se n'allarga la resolució i és més senzill resoldre'ls mentalment.

RESOL ELS PROBLEMES SEGÜENTS.

a) *Un pastor porta a la fira el seu petit ramat d'ovelles, que ven a tres firaires: al primer li ven la meitat de les ovelles del ramat, més mitja ovella; al segon, la meitat de les ovelles que li queden, més mitja ovella, i al tercer li ven l'última ovella. Quantes ovelles té el ramat? Quantes n'ha venut a cada firaire?*

b) *Els indis escrivien molts dels seus problemes de manera poètica. Aquest n'és un. «D'un eixam d'abelles, una cinquena part es posa sobre una flor de kadamba, una tercera part sobre una flor de silinda. El triple de la diferència entre tots dos nombres vola cap a les flors de kutaja, i queda una abella voletejant en l'aire, atreta per l'embriagadora aroma d'un gessamí i d'un pandanus. Digue'm, dona bonica, el nombre d'abelles.»*

c) *Un cavall i una mula caminaven junts amb sacs al llom. El cavall es lamentava de la seva enutjosa càrrega, i la mula li va dir: «De què et queixes? Si et prengués un sac, la meva càrrega seria el doble de la teva. En canvi, si et dono un sac, la teva càrrega s'igualarà a la meva». Digueu-me, doctes matemàtics, quants sacs portava el cavall i quants la mula?*

d) *El problema següent també el podem resoldre mentalment, reflexionant sobre les dades. «M'encanten els animals. En tinc uns quants a casa. Tots són gossos menys dos, tots són gats menys dos i tots són lloros menys dos. És a dir, que tinc... quants animals?»*

e) *En un corral hi ha conills i gallines, que tenen un nombre total de 60 caps i 192 potes. Troba el nombre de conills i gallines. Abans de resoldre el problema, respon: Podrien ser tots els animals conills? I gallines?*

2 Altres problemes clàssics

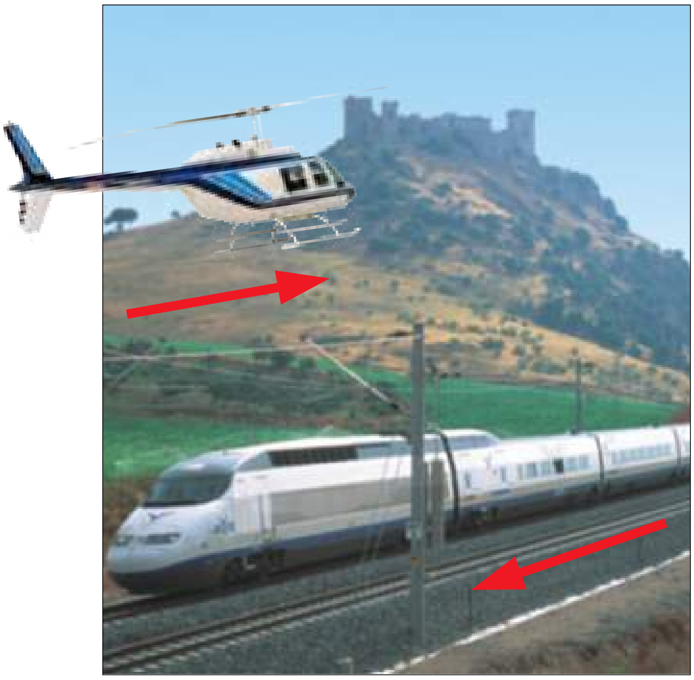
A continuació tens més problemes, no tan antics, però sí molt comuns, que es poden plantejar amb endevinalles. Resol-los.

RESOL ELS PROBLEMES.

a) *Un tren surt a les 8 del matí d'una ciutat,* A, *amb destinació a una altra ciutat,* B. *La seva velocitat mitjana durant el recorregut és de 80 km/h. Un helicòpter surt a la mateixa hora de la ciutat* B, *i sobrevola la via fèrria per trobar el tren. La seva velocitat mitjana és de 400 km/h.*

En el mateix instant que es troben, l'helicòpter torna a la ciutat B. *Quan hi arriba canvia el rumb i es dirigeix una altra vegada cap al tren. Quan el troba, gira cua i torna a la ciutat, i així successivament.*

Sabent que la distància entre totes dues ciutats és de 320 km, i suposant que l'helicòpter no perd velocitat en els canvis de direcció, quants quilòmetres recorre?



b) *Un elefant mascle i un elefant femella pesen un total de 15.500 kg. La femella i una cria pesen 9.500 kg, mentre que el mascle i la cria pesen junts 10.000 kg. Quant pesen tots tres junts? I cadascun?*

c) *La senyora O'Toole, una persona decididament estalviadora, està intentant pesar-se ella, el seu nadó i el seu gos, tot per un cèntim. Quan puja a la bàscula, marca 170 lliures. Si ella pesa 100 lliures més que el pes combinat del gos i el nadó, i el gos pesa el quaranta per cent del pes del nadó, pot determinar el pes del petit querubí, vostè? (Endevinalla de Sam Loyd.)*

d) *Una etapa d'una volta ciclista de 180 km la va recórrer el vencedor a una velocitat mitjana de 40 km/h. La segona etapa de la volta també era de 180 km, però tenia un port de primera categoria a la meitat del recorregut. El vencedor d'aquesta etapa va pujar la primera meitat de l'etapa a una velocitat mitjana de 20 km/h, i del port a la meta va avançar a 60 km/h. En quina de les dues etapes va invertir més temps?*

e) *Quant costen set sardines i mitja a un ral i mig la sardina i mitja?*

f) *Un ramader té pinso per alimentar una vaca durant 27 dies, i si fos una ovella en tindria per a 54 dies. Per a quant de temps tindria pinso si hagués d'alimentar la vaca i l'ovella?*

ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Escollir la incògnita

Estratègia En els problemes en què desconeixem més d'una quantitat, mesura o nombre, l'elecció adequada de la incògnita ens permet plantejar una equació més senzilla.

Quan escollim la incògnita, hem de buscar que l'equació resultant sigui la més senzilla de resoldre.

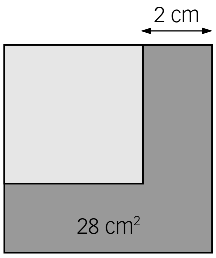
PROBLEMA RESOLT

Si el costat d'un quadrat augmenta 2 cm, la seva àrea augmentarà 28 cm^2. Quina és l'àrea del quadrat gran?

Plantejament i resolució

Resoldrem el problema de dues maneres:

- Triant com a incògnita el que es demana al problema, és a dir, l'àrea del quadrat gran.
- Triant com a incògnita el costat del quadrat petit.



Incògnita: l'àrea del quadrat gran	Incògnita: l'àrea del quadrat petit
$x \longrightarrow$ Àrea del quadrat gran $\sqrt{x} \longrightarrow$ Costat del quadrat gran $\sqrt{x} - 2 \rightarrow$ Costat del quadrat petit **PLANTEJAMENT** La diferència d'àrees és igual a 28 cm^2. $x - (\sqrt{x} - 2)^2 = 28$ $x - x + 4\sqrt{x} - 4 = 28$ $4\sqrt{x} = 32 \rightarrow \sqrt{x} = 8 \rightarrow x = 8^2 = 64$ Àrea $= 64$ cm^2	$x \longrightarrow$ Costat del quadrat petit $x + 2 \rightarrow$ Costat del quadrat gran **PLANTEJAMENT** La diferència d'àrees és igual a 28 cm^2. $(x + 2)^2 - x^2 = 28$ $x^2 + 4x + 4 - x^2 = 28$ $4x = 24 \rightarrow x = 6$ Costat del quadrat gran $= 8$ cm Àrea $= 64$ cm^2

L'equació més senzilla és la de la dreta.

PROBLEMES PROPOSATS

1 La suma dels quadrats de tres nombres naturals consecutius és 434. Quins són aquests nombres? Fes tres plantejaments diferents i indica l'equació més senzilla.

2 La suma dels quadrats de tres nombres parells consecutius és 116. Quins són aquests nombres?

Fes, com en el problema anterior, tres plantejaments i indica quin dóna l'equació més senzilla després de simplificar.

3 L'àrea d'un pati rectangular és de 675 m^2. Si la llargada i l'amplada són dos nombres senars consecutius, quines són les dimensions del pati? Fes dos plantejaments diferents.

MATEMÀTIQUES AMB L'ORDINADOR

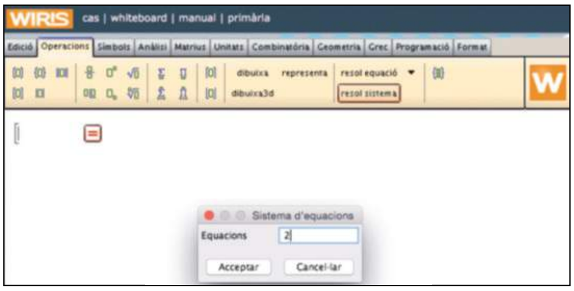
WIRIS

http://www.wiris.net/demo/wiris/ca/

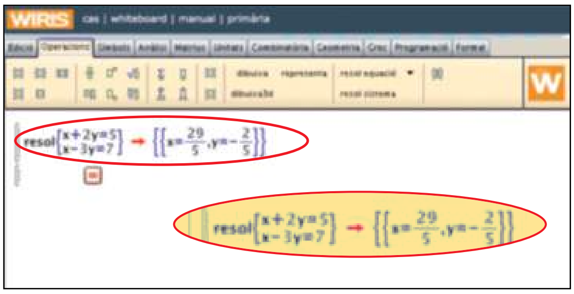
Resol aquests sistemes d'equacions lineals.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ x - 3y = 7 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 5 \end{array}\right\}$

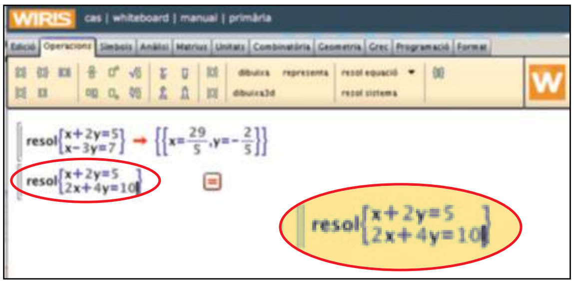
1 Seleccionem l'eina **resol sistema** de la pestanya *Operacions* i escrivim el nombre d'equacions. Després, cliquem a Acceptar.



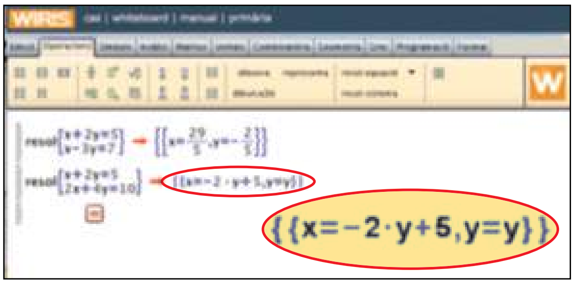
2 Escrivim les equacions que formen el sistema i fem clic a la icona **=**. Les solucions es mostren entre claudàtors.



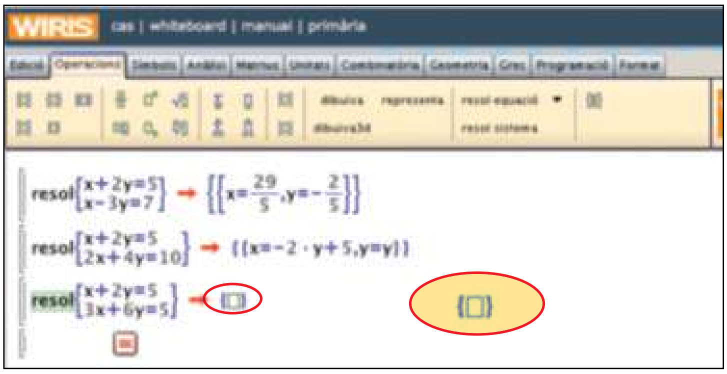
3 Introduïm el segon sistema d'equacions fent servir l'eina **resol sistema**.



4 Cliquem **=** i es mostra una equació entre claudàtors. Això significa que el sistema té infinites solucions.



5. Repetim el procés amb el tercer sistema i obtenim un espai entre claudàtors. Significa que el sistema no té cap solució.



ACTIVITATS

PRACTICA

1 Determina la solució d'aquests sistemes d'equacions lineals.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - \dfrac{2}{5}y = 1 \\ 15x - 2y = 5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 5x - 7y = 11 \\ 11x + \dfrac{5}{6}y = 1 \end{array}\right\}$

INVESTIGA

2 Dóna valors a *a, a'*, *b* i *b'* al sistema

$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$ i comprova que si té una solució,

aleshores *a* i *a'*, *b* i *b'* no són proporcionals.

SISTEMES D'EQUACIONS

RESUM DE LA UNITAT

EQUACIONS LINEALS AMB DUES INCÒGNITES

Són equacions del tipus $ax + by = c$.

Una solució d'una equació lineal amb dues incògnites.

$3x + y = 6 \rightarrow$ Solucions: (1, 3), (0, 6), (2, 0)...

SISTEMES DE DUES EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= k \\ a'x + b'y &= k' \end{aligned}\right\}$$

x i y són les incògnites

a i a' són els coeficients de x

b i b' són els coeficients de y

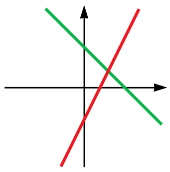
k i k' són els termes independents

Solució d'un sistema

Una solució d'un sistema de dues equacions és un parell de nombres que verifiquen les dues equacions.

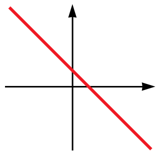
Compatible determinat

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \text{ Té solució única.}$$



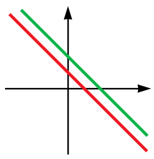
Compatible indeterminat

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4 \end{aligned}\right\} \text{ Té infinites solucions.}$$



Incompatible

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + y &= 4 \end{aligned}\right\} \text{ No té solució.}$$



RESOLUCIÓ D'UN SISTEMA

Mètode de substitució

Aïllem una incògnita en una equació i la substituïm a l'altra equació.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 5 - x \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$2x - y = 4 \xrightarrow{y = 5 - x} 2x - (5 - x) = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$$

$$x = 5 - y \xrightarrow{x = 3} x = 5 - 3 = 2$$

Solució: $x = 3$ i $y = 2$.

Mètode d'igualació

Aïllem la mateixa incògnita a les dues equacions i igualem les expressions que obtenim.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} y &= 5 - x \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}\right\}$$

$$5 - x = 2x - 4 \rightarrow 9 = 3x \rightarrow x = 3$$

$$y = 5 - x \xrightarrow{x = 3} y = 2$$

Solució: $x = 3$ i $y = 2$

Mètode de reducció

Busquem un sistema equivalent en el qual els coeficients d'una mateixa incògnita siguin iguals i oposats.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\times 2} \left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 10 \\ -2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \cancel{2x} + 2y &= 10 \\ + -\cancel{2x} + y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

$$3y = 6 \rightarrow y = 2$$

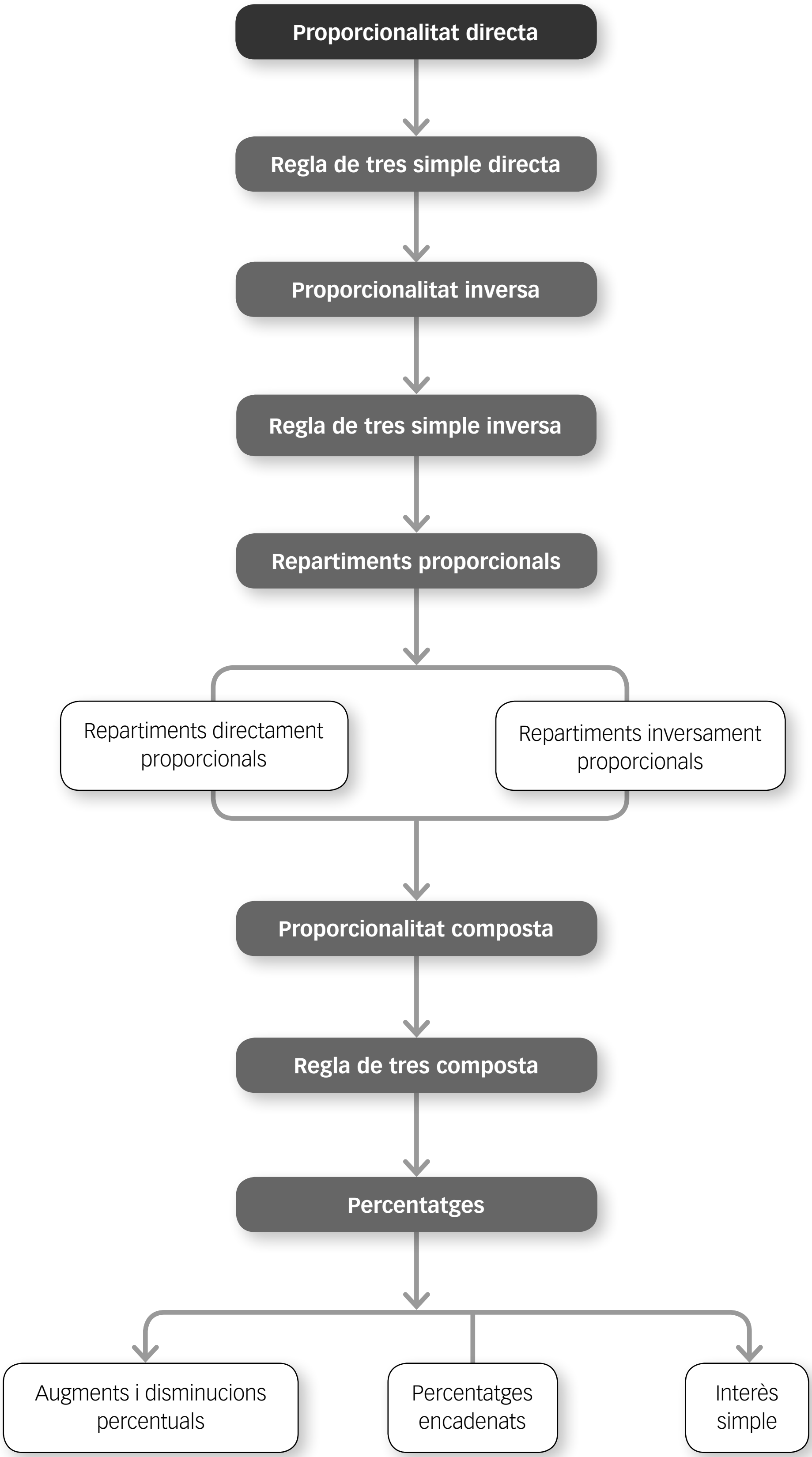
$$x + y = 5 \xrightarrow{y = 2} x + 2 = 5 \rightarrow x = 3$$

Solució: $x = 3$ i $y = 2$.

NOTES

PROPORCIONALITAT NUMÈRICA

ESQUEMA DE LA UNITAT



CURIOSITATS MATEMÀTIQUES

Les factures

Quan compres alguna cosa, el venedor t'ha de donar sempre una factura. La factura acredita la venda i és l'únic mitjà de reclamació en cas que hi hagi defectes. Una factura, perquè sigui vàlida, ha de tenir les característiques següents.

a) Nom i domicili de la societat, empresa o particular que ven el producte.
b) Número de factura.
c) Signatura del venedor.
d) Segell de l'empresa.
e) NIF de l'empresa.

Mira l'exemple i fixa't que s'hi compleixen les condicions necessàries perquè la factura sigui legal.

Venbarat
La botiga més barata d'Europa
c/ Bellavista, 23
99999 La Ciutat de l'Alegria
Telèfon: (00) 000 0000 - Fax: (00) 000 0000

NÚM. FACTURA: 201
DATA: 20 de desembre del 2015
NIF: H00000000

Quantitat	Descripció	Preu/unitat (euros)	Total (euros)
5	Producte XX	12,25	61,25
3	Producte YY	10	30,00
		Subtotal 1	91,25
		20 % de descompte	18,25
		Subtotal 2	73,00
		21 % IVA	15,33
		COST FINAL	88,33

Venbarat

LI AGRAÏM LA CONFIANÇA!

Els homes primitius coneixien la proporcionalitat?

L'home primitiu no sabia fer servir equacions ni fórmules, però va descobrir que com més temps caminava, més camí recorria. Aquesta idea és la base de la proporcionalitat.

En tribus que s'han mantingut en un nivell cultural molt primitiu, els antropòlegs observen que els indígenes mesuren les grans distàncies en dies o llunes (un mes lunar són 28 dies). Però, quin sentit té mesurar distàncies en temps? Cap sentit físic, ja que són magnituds completament diferents. Només en té si s'ha descobert la proporcionalitat que hi ha entre totes dues. Llavors sí que és natural mesurar una distància en dies de camí. Això mateix ha continuat fent l'home durant segles, fins a l'actualitat.

PROPORCIONALITAT NUMÈRICA

CONTINGUTS PREVIS

CONVÉ QUE... Sàpigues què és una **magnitud**. **PERQUÈ...** Les relacions que estudiaràs hi fan referència.	Una **MAGNITUD** és qualsevol característica que es pot mesurar i expressar mitjançant una quantitat o nombre. Són magnituds: l'altura, la longitud, el pes, la superfície, el volum, el preu... No són magnituds: els mesos de l'any, el nom de les persones... i, en general, qualsevol característica no quantificable mitjançant nombres.
CONVÉ QUE... Distingeixis entre **raó i proporció**. **PERQUÈ...** Et farà falta per comprendre les propietats de la proporcionalitat entre magnituds.	Una **RAÓ** és un quocient entre dos nombres o quantitats comparables; per exemple: $\frac{2}{3}$, $\frac{2{,}2}{3}$, $\frac{3}{6{,}8}$... Una **PROPORCIÓ** és una igualtat de dues raons: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, en què a, b, c i d són nombres i $a \cdot d = b \cdot c$; per exemple: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1{,}2}{1{,}6} = \frac{0{,}6}{0{,}8}$...
CONVÉ QUE... Recordis quan dues magnituds són **directament o inversament proporcionals**. **PERQUÈ...** Et servirà com a punt de partida per comprendre com es treballa amb magnituds.	Dues magnituds són **DIRECTAMENT PROPORCIONALS** quan, en multiplicar-ne (o dividir-ne) qualsevol per un nombre, l'altra queda multiplicada (o dividida) pel mateix nombre. El costat d'un quadrat, c, i el seu perímetre, P, són magnituds directament proporcionals: si $c = 2$, llavors $P = 8$; si $c = 4$, llavors $P = 16$... $\frac{2}{8} \overset{\cdot 2}{\underset{\cdot 2}{=}} \frac{4}{16} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 3}{=}} \frac{6}{24}$ Dues magnituds són **INVERSAMENT PROPORCIONALS** quan en multiplicar-ne qualsevol per un nombre, l'altra queda dividida entre el mateix nombre. El nombre d'obrers i el temps que tarden a pintar una tanca són magnituds inversament proporcionals: 2 obrers tarden 8 hores, 4 obrers tarden 4 hores, 8 obrers tarden 2 hores… $2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = 8 \cdot 2$

NOTACIÓ MATEMÀTICA

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$	Indica una **proporcionalitat directa**.	Per expressar una proporcionalitat, directa o inversa, acostumem a fer servir les primeres lletres de l'abecedari, *a*, *b*, *c*... per als valors de la primera magnitud, i *a'*, *b'*, *c'*... per als valors de la segona.
$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = k$	Indica una **proporcionalitat inversa**.	En tots dos casos, la constant de proporcionalitat la representem amb la lletra *k*.

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$\left.\begin{array}{l} a \rightarrow b \\ c \rightarrow x \end{array}\right\}$	Totes dues expressions indiquen una proporció en forma de **regla de tres**. La primera expressió ho fa de manera genèrica i la segona, amb un exemple concret.	Quan escrivim una regla de tres, tant si és directa com inversa, representem les quantitats conegudes amb les lletres *a*, *b*, *c*, i el terme escollit, amb la lletra *x*.
$\left.\begin{array}{l} 2 \rightarrow 5 \\ 6 \rightarrow x \end{array}\right\}$		Les fletxes, que ens indiquen les raons, a vegades les substituïm simplement per ratlles. Després, ho agrupem tot amb un claudàtor de tancament, }.

Què vol dir?		Com ho escrivim?
%	Escrit després d'una quantitat indica que l'expressem en **tant per cent**.	Per expressar una quantitat en tant per cent escrivim la quantitat, deixem un espai i, després, col·loquem el símbol %.
‰	Indica que la quantitat que la precedeix està expressada en **tant per mil**.	Per expressar una quantitat en tant per mil escrivim el nombre, un espai i el símbol ‰. 5 ‰, 7 ‰, 12,35 ‰, 9,34 ‰, 12 ‰

Què vol dir?		Com ho escrivim?
i	Indica l'**interès** que s'obté en invertir una quantitat de diners (capital).	Amb la lletra *i* indiquem l'interès que obtenim quan invertim un capital.
C	Indica el **capital** invertit.	La lletra *C* la fem servir per representar el capital. A vegades distingim entre el capital inicial que invertim, C_0, i el capital final que obtenim, C_f, que resulta de sumar el capital inicial i l'interès.
r	Iindica el **rèdit** al qual s'inverteix el capital.	El rèdit és una quantitat que ve donada en tant per cent i que acostumem a indicar amb la lletra *r*.
t	Indica el **temps** durant el qual s'inverteix el capital.	Fem servir la lletra *t* per assenyalar el temps durant el qual tenim invertit el capital.

PROJECTE MATEMÀTIC

Els impostos

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

- Calcular percentatges successius.
- Comprendre els conceptes que intervenen en l'IVA i en la declaració de la renda de les persones físiques: rendes, retencions i desgravacions.
- Estudiar un exemple pràctic de càlcul de l'IVA i de la base imposable d'una declaració de la renda.

1 L'IVA i el procés per calcular-lo

L'IVA (impost sobre el valor afegit) és un impost indirecte que incideix sobre el consum i s'abona en el moment de fer de transaccions, entrega de béns i prestacions de serveis, en el desenvolupament empresarial o professional.

L'IVA actua carregant un percentatge sobre el preu de cada producte. Aquest percentatge varia en funció del producte de què es tracti. Els productes de primera necessitat, per exemple, tenen un IVA molt reduït (4 %) o reduït (10 %), i la resta tenen un IVA superior, un 21 %.

Des de la matèria primera fins al consumidor, un producte va passant per diferents persones, cadascuna de les quals, per la feina que ha fet, apuja el preu d'aquest producte; és per aquest valor afegit que cal pagar un percentatge: a Hisenda l'IVA.

SITUACIÓ PROBLEMÀTICA

Un fabricant elabora un producte que ven a un majorista per 240 €. El majorista paga al fabricant el 10 % d'IVA. Després el majorista ven el producte a una botiga per valor de 300 €. El botiguer paga al majorista el 10 % d'IVA.

El botiguer ven el mateix producte al públic a un preu de 390 € més el 10 % d'IVA. Quant paga d'IVA cadascú? Quin és el valor total de l'IVA?

RESPON LES PREGUNTES EMPLENANT ELS REQUADRES.

a) *Quina quantitat d'IVA cobra i ha d'ingressar a Hisenda el fabricant?*

És el ☐ *% de* ☐ € = ☐ €

b) *Quina quantitat d'IVA cobra i quina quantitat ha d'ingressar a Hisenda el majorista?*

- Calcula l'IVA que cobra:

És el ☐ *% de* ☐ € = ☐ €

- *El majorista paga la diferència entre el que ell ha cobrat d'IVA i el que va pagar per IVA al fabricant:*

☐ − ☐ = ☐ €

c) *Quina quantitat d'IVA cobra i quina quantitat ha d'ingressar el botiguer?*

- *Calcula l'IVA que cobra:*

És el ☐ *% de* ☐ € = ☐ €

- *El botiguer paga a Hisenda la diferència entre el que ell cobra d'IVA i el que va pagar d'IVA al majorista:*

☐ − ☐ = ☐ €

d) *Quant li costa el producte al comprador?*

☐ + ☐ = ☐ €
PVP IVA Total

e) *Comprova que el que paga el consumidor final d'IVA coincideix amb la suma del que han pagat per aquest concepte les tres persones que han intervingut en el procés.*

☐ = ☐ + ☐ + ☐
IVA final, IVA fabricant, IVA majorista, IVA botiga

2 La declaració de la renda

A més dels impostos indirectes com l'IVA, hi ha altres tipus d'impostos, anomenats directes, com l'impost sobre la renda de les persones físiques (IRPF), l'impost sobre el patrimoni, etc.

L'IRPF és un impost directe que paguen la majoria de les persones que obtenen ingressos en concepte de:

– Rendes del treball.
– Rendes del capital mobiliari.
– Rendes del capital immobiliari.

D'altra banda, hem de tenir en compte que en la declaració, que normalment es fa durant els mesos de maig-juny, s'hi han de reflectir les rendes corresponents a l'any anterior i que, prèviament, s'han fer retencions a compte sobre el que s'ha de pagar. A més a més, també hi ha deduccions familiars, pagaments a la Seguretat Social, etc.

Treballarem amb un exemple molt senzill de declaració de la renda, amb les dades fictícies següents. Emplena els camps en funció de l'ordre indicat i determina si al senyor Vidal li retornaran diners o haurà de pagar a Hisenda per aquest impost.

SITUACIÓ PROBLEMÀTICA

El senyor Vidal, casat i amb dos fills, va tenir com a sou brut, corresponent a l'any 2006, 21.000 € amb les característiques següents:

– Retencions a compte: 14 % del total
– Cotització a la Seguretat Social: 1.068 €
– Despeses deduïbles del treball: 5 %

- Rendiments de les rendes mobiliàries (compte corrent): 480 €

– Retenció: 18 %
– Despesa d'administració deduïble: 12 €

- Altres deduccions:

– Pels dos fills: 180 €/fill
– 162 € pel rendiment del treball dependent.

1r Calculem, en primer lloc, el rendiment net de les rendes del treball:

$\boxed{}$	−	$\boxed{}$	−	$\boxed{}$	=	$\boxed{}$
Renda treball		Seg. Social		Despesa deduïble del treball		Rendimient net del treball

2n Fem el mateix amb la renda mobiliària:

$\boxed{}$	−	$\boxed{}$	=	$\boxed{}$
Renda mobiliària		Despesa administració		Rendimient net del mobiliari

3r La base imposable serà la suma dels rendiments nets del treball i mobiliari:

$\boxed{}$	+	$\boxed{}$	=	$\boxed{}$
R. net treball		R. net mobiliari		Base imposable

4t Apliquem a aquesta base una escala de gravamen. Per simplificar, suposem que és del 18,7 % de la base; per tant, la quota íntegra és:

18,7 % de $\boxed{}$ = $\boxed{}$ €

5è Calculem el total de deduccions:

$\boxed{}$	+	$\boxed{}$	=	$\boxed{}$
Per fills		Per treball dependent		Total

6è La quota líquida la calculem així:

$\boxed{}$	−	$\boxed{}$	=	$\boxed{}$
Quota íntegra		Deduccions		Quota líquida

7è La quota diferencial (QD) és igual a la quota líquida menys les retencions a compte:

$\boxed{}$	−	$\boxed{}$	−	$\boxed{}$	=	$\boxed{}$
Quota líquida		Retenció treball		Retenció mobiliari		Quota diferencial

8è Resultat final:

a) Si QD $<$ 0, surt a retornar $\boxed{}$ €

b) Si QD $>$ 0, surt a pagar
- Juny: 60 % $\boxed{}$ €
- Nov.: 40 % $\boxed{}$ €

Els impostos acostumen a variar al llarg dels anys segons el govern de torn i la situació econòmica del país. Investiga quines retencions s'aplicarien en aquest moment als ingressos del senyor Vidal i també quant cotitzaria actualment a la Seguretat Social. Existeix ara la deducció per fill? Quant pot deduir una persona per fill?

ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Elaborar nombres índex

Estratègia Els nombres índex els elaborem quan volem estudiar en un període de temps l'evolució dels valors d'una variable.
Per elaborar nombres índex d'una sèrie de dades agafem una dada com a base i li atribuïm el valor 1 o 100 (índex 1 o índex 100).

PROBLEMA RESOLT

Compara el creixement de l'audiència dels programes *Notícies tarda* i *Notícies nit*.

NOMBRE MITJÀ D'ESPECTADORS					
Mesos	**Gener**	**Febrer**	**Març**	**Abril**	**Maig**
Notícies tarda	800.000	825.000	840.000	945.000	1.025.000
Notícies nit	2.500.000	2.650.000	2.680.000	2.695.000	2.705.000

Plantejament i resolució

Elaborarem nombres índex per a cada programa agafant com a base, en tots dos casos, el nombre d'espectadors durant el mes de gener. Per calcular l'índex d'un mes qualsevol només hem de multiplicar-ne el nombre d'espectadors per aquests quocients.

Notícies tarda

$$\frac{100}{800.000} = 0{,}000125$$

Notícies nit

$$\frac{100}{2.500.000} = 0{,}00004$$

Mesos	***Notícies tarda*** (índex en % sobre el mes de gener)	***Notícies nit*** (índex en % sobre el mes de gener)
Gener	100	100
Febrer	$825.000 \cdot 0{,}000125 = 103{,}125$	$2.650.000 \cdot 0{,}00004 = 106$
Març	$840.000 \cdot 0{,}000125 = 105$	$2.680.000 \cdot 0{,}00004 = 107{,}2$

Calcula tu la resta de nombres índex.

PROBLEMA PROPOSAT

1 A la taula mostrem el nombre d'accidents que hi ha hagut en dues autopistes del 2010 al 2015.

NOMBRE D'ACCIDENTS						
Anys	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Autopista Nord	320	360	380	400	375	380
Autopista Sud	400	415	425	445	440	460

a) Calcula el nombre índex dels accidents en cada autopista, i expressa'ls en tants per cent, agafant com a referència el nombre d'accidents l'any 2010.

b) Indica en quina de les autopistes el nombre d'accidents va augmentar.

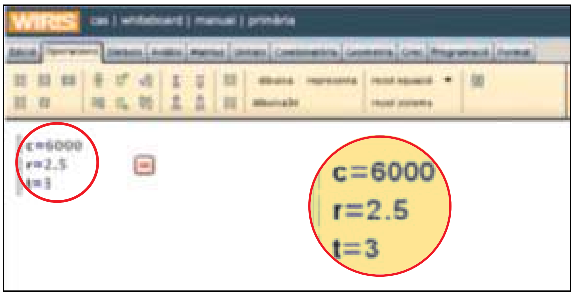
MATEMÀTIQUES AMB L'ORDINADOR

WIRIS

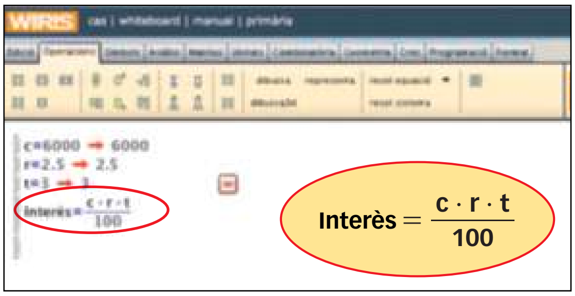
http://www.wiris.net/demo/wiris/ca/

Calcula l'interès obtingut i el capital final després d'invertir 6.000€ amb un interès simple del 2,5% anual durant 3 anys.

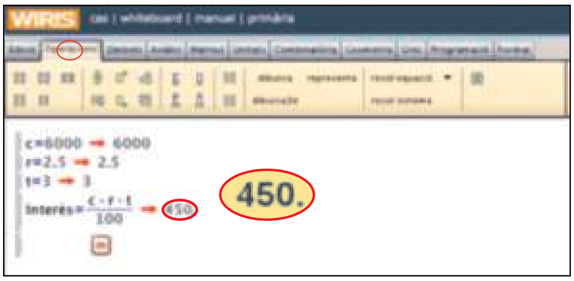
1 Escrivim els valors de les dades que intervenen en el càlcul: c = capital, r = rèdit, t = temps.



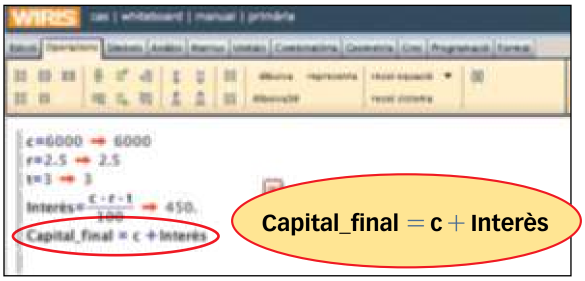
2 Escrivim la fórmula de l'interès simple utilitzant l'eina per escriure la fracció.



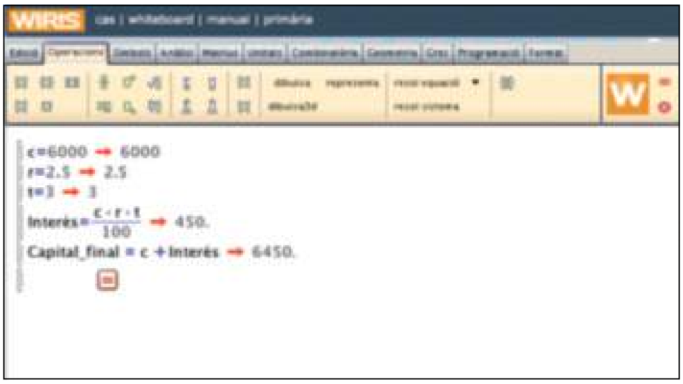
3 Fem clic a la icona i es mostren les dades introduïdes i el valor de l'interès simple al costat de la seva fórmula.



4 Situem el cursor darrere de l'últim resultat. Pitgem la tecla Intro i calculem el capital final suman el capital inicial i l'interès obtingut.



5. Fem clic a la icona i es mostra el valor del capital final al costat de la fórmula.



ACTIVITATS

PRACTICA

1 Calcula el capital final i l'interès obtingut en invertir 12.500 € amb un interès simple de l'1,5% anual durant 2 anys.

2 Troba el capital final i l'interès obtingut en invertir 600€ amb un interès simple del 3% anual durant 6 mesos. I si el període d'inversió fos de 120 dies?

INVESTIGA

3 Prova amb diferents valors de c, r i t, perquè l'interès obtingut en invertir una quantitat de diners sigui exactament una quarta part d'aquesta.

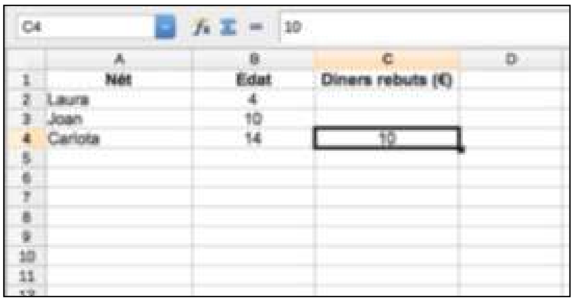
I per què el capital final sigui un 25% més gran que la quantitat invertida?

MATEMÀTIQUES AMB L'ORDINADOR

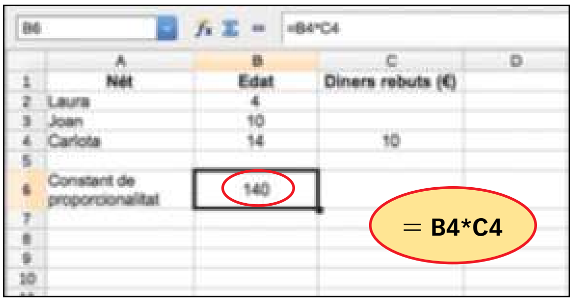
OpenOffice.CALC
openoffice.cat/ca

En Martí ha decidit repartir els diners que té estalviats entre els seus 3 néts de manera inversament proporcional a les seves edats. La Laura té 4 anys, en Joan, 10 i la Carlota, 14.
Si la Carlota ha rebut 10 €, quants diners tenia estalviats en Martí?

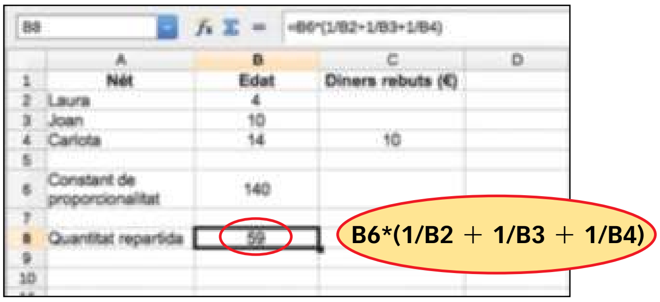
1 Introduïm les dades del problema al full de càlcul.



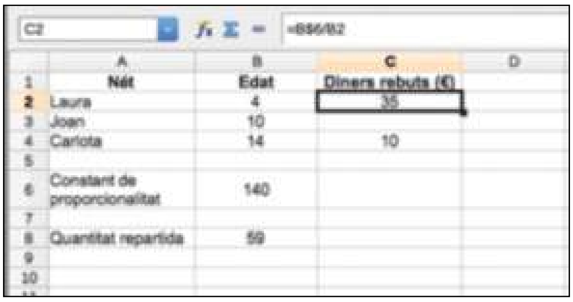
2 Calculem la constant de proporcionalitat: escrivim a la cel·la **B6** la funció = **B4*C4**.

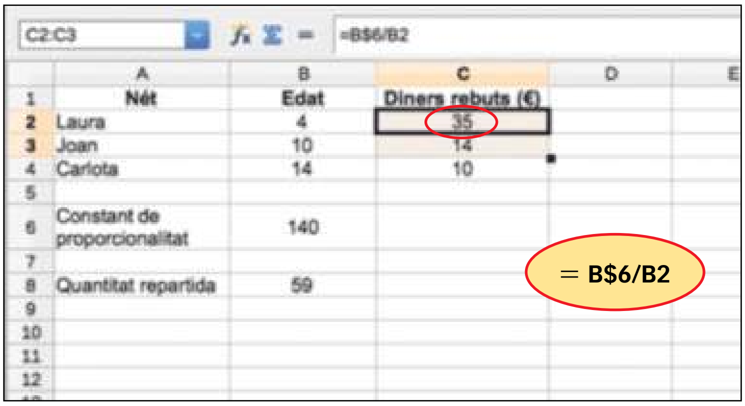


3 Per calcular el nombre de diners que es repartiran, escrivim a la cel·la **B8** la funció = **B6*(1/B2 + 1/B3 + 1/B4)**.



4 Escrivim a la cel·la **C2** la funció = **B$6/B2** per calcular els diners que rep la Laura.





ACTIVITATS

PRACTICA

1 Comprova fent servir un full de càlcul si has resolt correctament les activitats 66, 67 i 68 de la unitat 6.

INVESTIGA

2 Escull tres valors diferents per a, b i c, i comprova que repartir una quantitat de manera inversament proporcional a a, b i c, és igual a repartir-la de manera directament proporcional a $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ i $\frac{1}{c}$.

PROPORCIONALITAT NUMÈRICA

RESUM DE LA UNITAT

PROPORCIONALITAT

Magnituds directament proporcionals

Nre. de quilos	1	2	3	4	5	6	...
Preu (€)	40	80	120	160	200	240	...

$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \ldots = k$ (constant de proporcionalitat)

Magnituds inversament proporcionals

Velocitat (km/h)	30	60	120	240	...
Temps (h)	20	10	5	2,5	...

$a \cdot b = a' \cdot b' = \ldots = k$ (constant de proporcionalitat)

Repartiments proporcionals

DIRECTAMENT PROPORCIONALS

Reparteix 3.600 en parts directament proporcionals a 2, 4 i 6.

$$k = \frac{3.600}{2+4+6} = 300 \rightarrow \begin{cases} (2) \rightarrow 300 \cdot 2 = 600 \\ (4) \rightarrow 300 \cdot 4 = 1.200 \\ (6) \rightarrow 300 \cdot 6 = 1.800 \end{cases}$$

INVERSAMENT PROPORCIONALS

Reparteix 310 en parts inversament proporcionals a 2, 3 i 5.

$$k = \frac{310}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 300 \rightarrow \begin{cases} (2) \rightarrow \frac{300}{2} = 150 \\ (3) \rightarrow \frac{300}{3} = 100 \\ (5) \rightarrow \frac{300}{5} = 60 \end{cases}$$

Regla de tres

DIRECTA

Un mecànic cobra 62,50 € per una feina de 5 hores. Quant cobrarà per una feina de 7 hores?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si per 5 hores} \xrightarrow{\text{cobra}} 62{,}50 \\ \text{per 7 hores} \xrightarrow{\text{cobrarà}} x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{5}{7} = \frac{62{,}50}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 87{,}50\text{ €}$$

INVERSA

Si triguem 5 hores a recórrer 600 km a 120 km/h, quant de temps trigarem si anem a 100 km/h?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si a 120 km/h} \xrightarrow{\text{triguem}} \text{5 hores} \\ \text{a 100 km/h} \xrightarrow{\text{trigarem}} x \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 120 \cdot 5 = 100x \rightarrow x = \frac{120 \cdot 5}{100} = 6 \text{ hores}$$

Proporcionalitat composta

Regla de tres composta

5 amics paguen 240 € per llogar durant 4 dies unes habitacions en un hotel. Quants dies es podran allotjar al mateix hotel 8 amics si tenen un pressupost de 960 €?

5 amics → 240 € → 4 dies

8 amics → 960 € → x dies

Percentatges

Els percentatges es poden calcular amb regles de tres.

100 ------ a

Total ---- x

Augmentar el t% equival a calcular el $(100 + t)$% de la quantitat.

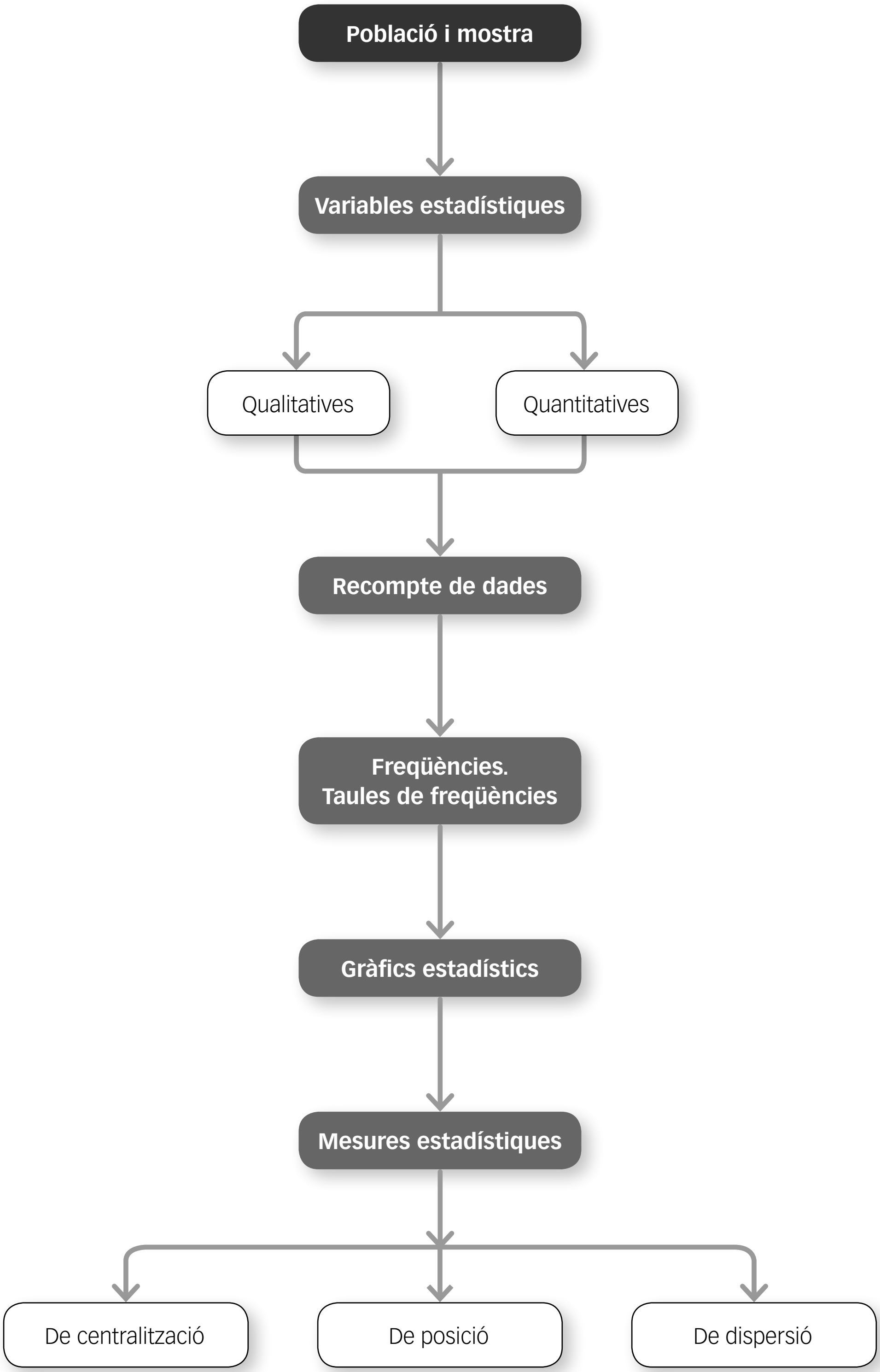
Disminuir el t% equival a calcular el $(100 - t)$% de la quantitat.

Els **percentatges encadenats**, $t_1, t_2, t_3 \ldots, t_n$, d'una quantitat equivalen a calcular el $t_1\% \cdot t_2\% \cdot \ldots \cdot t_n\%$ de la quantitat.

L'interès simple, I, és el benefici que origina una quantitat de diners, anomenada capital, C, en un temps, t, a un rèdit anual, r%.

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

ESQUEMA DE LA UNITAT



CURIOSITATS MATEMÀTIQUES

Compte amb les mitjanes

La mitjana de dos nombres és igual a la seva suma dividida entre 2. Tot i això, a vegades no es poden aplicar directament aquests càlculs, com veurem a l'exemple següent.

Un ciclista vol fer una excursió que consisteix a sortir de la ciutat A, pujar al cim B, situat a 30 km, i tornar a la ciutat A sense aturar-se. Per les seves condicions atlètiques, el ciclista pot fer el recorregut de pujada i baixada a una velocitat mitjana de 20 km/h.

Així doncs, inicia l'ascens i, quan arriba a B, comprova que en la pujada només ha fet una mitjana de 10 km/h, i calcula que per aconseguir la mitjana de 20 km/h en tot el recorregut, a la baixada ha de portar una velocitat mitjana de 30 km/h, ja que:

$$\frac{10 + 30}{2} = \textit{20 km/h}$$

Té raó, el ciclista?

No té raó, perquè la velocitat mitjana no es pot calcular d'aquesta manera, sinó que s'hauria de trobar el quocient de l'espai total recorregut i el temps dedicat.

Com que l'espai recorregut és: 30 km + 30 km = 60 km, el temps per pujar és 3 hores (ha pujat a 10 km/h) i el temps per baixar és 1 hora (ha baixat a 30 km/h). Per tant, el temps total és 4 hores. Així doncs, la velocitat mitjana serà:

$$v_m = 60 : 4 = 15 \text{ km/h}$$

ESTADÍSTICA

CONTINGUTS PREVIS

CONVÉ QUE...

Recordis la **classificació de les variables estadístiques**.

PERQUÈ...

La confecció de taules i gràfics estadístics varia en funció del tipus de variable.

Tipus	Propietats	Exemples
Qualitatives	Els valors de la variable no són nombres, sinó modalitats.	– Sexe {*dona*, *home*}. – Color dels cabells {*morens*, *castanys*...}.
Quantitatives	Els valors que pren la variable són nombres.	– Pes. – Nombre de germans.
Quantitatives discretes	En cada tram, la variable només pot prendre un nombre finit de valors.	– Nombre d'amics: *entre 2 i 5, només puc tenir 3 o 4 amics*.
Quantitatives contínues	La variable pot agafar tants valors com vulguem en un tram.	– Altura: *entre 1,70 i 1,80 m d'altura hi ha 1,71; 1, 715*...

CONVÉ QUE...

Distingeixis els diferents **tipus d'intervals**.

PERQUÈ...

Es fan servir per treballar amb variables estadístiques contínues.

Obert: (2, 5) conté tots els punts entre 2 i 5, sense incloure'ls.

Tancat: [2, 5] conté tots els punts entre 2 i 5, tots dos inclosos.

Obert per la dreta i tancat per l'esquerra: [2, 5) conté tots els punts entre 2 i 5, i conté el 2 però no conté el 5.

Obert per l'esquerra però tancat per la dreta: (2, 5] conté tots els punts entre 2 i 5, i conté el 5 però no conté el 2.

CONVÉ QUE...

Sàpigues trobar el **punt mitjà** d'un interval.

PERQUÈ...

Et farà falta per calcular punts en variables estadístiques contínues.

El **PUNT MITJÀ** d'un interval es calcula sumant els extrems i dividint el resultat entre 2. És el punt que equidista dels dos extrems.

El punt mitjà de l'interval [2, 5] és: $\frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

CONVÉ QUE...

Recordis què és el **valor absolut** d'un nombre.

PERQUÈ...

Ho necessitaràs per trobar mesures estadístiques.

El **VALOR ABSOLUT** d'un nombre és aquest mateix nombre prescindint del seu signe; és a dir, si és positiu, el seu valor absolut és ell mateix, i si és negatiu, en canviem el signe.

El valor absolut de -3 és $|-3| = 3$ i el valor absolut de 3 és $|3| = 3$.

NOTACIÓ MATEMÀTICA

Què vol dir?		Com ho escrivim?
x_i	Indica el **valor** de cada dada que obtenim en un estudi estadístic.	La notació x_i indica el valor o modalitat obtinguda en cada dada: l'índex, i, expressa l'ordre de la dada, és a dir, si és el primer x_1, si és el segon x_2… El nombre de fills de 10 veïns d'un bloc és: 0, 3, 1, 1, 0, 2, 2, 1, 0, 0. $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 1\ldots$ Si les dades les expressem agrupades, el significat de x_i no és el valor de cada dada, sinó els possibles valors que poden aparèixer.
f_i	Indica la **freqüència absoluta** del valor x_i.	La freqüència absoluta s'acostuma a representar amb f_i, en què el subíndex i indica que pertany al valor x_i.
h_i	Indica la **freqüència relativa** del valor x_i.	La freqüència relativa l'acostumem a representar amb h_i, $h_i = \frac{f_i}{N}$. A l'exemple, $h_1 = 0{,}4$; $h_2 = 0{,}3\ldots$
N	Indica el **nombre total de dades** que prenem en l'estudi.	El nombre total de dades d'un estudi el representem, normalment, amb les lletres N o n. A l'exemple, $N = 10$.

Nombre de fills x_i	0	1	2	3
Nombre de veïns f_i	4	3	2	1

Què vol dir?		Com ho escrivim?
F_i	Indica la **freqüència absoluta acumulada** fins a la classe i, inclosa.	La freqüència acumulada l'escrivim amb la mateixa lletra, però en majúscules i mantenint el subíndex.
H_i	Indica la **freqüència relativa acumulada** fins a la classe i, inclosa.	

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	4	0,4	4	0,4
1	3	0,3	7	0,7
2	2	0,2	9	0,9
3	1	0,1	10	1

Què vol dir?		Com ho escrivim?
$\overline{x}$	Indica la **mitjana** d'unes dades.	La mitjana aritmètica la representem amb $\overline{x}$.
Me	Indica la **mediana** d'unes dades.	La mediana l'acostumem a representar amb Me, tot i que també la podem anomenar amb Md.
Q_1, Q_2, Q_3	Indica el **quartil** 1r, 2n i 3r.	Els quartils es denoten amb la lletra Q.
Mo	Indica la **moda** d'unes dades.	La moda la denotem amb Mo.
R	Indica el **recorregut**.	El recorregut l'escrivim amb la lletra R.
DM	Representa la **desviació mitjana**.	La desviació mitjana la representem amb DM.
σ^2	Indica la **variància**.	La variància l'escrivim σ^2, i la desviació típica σ, tot i que a vegades es fa servir s^2 i s per designar aquestes mesures.
σ	Representa la **desviació típica**.	
CV	És el **coeficient de variació**.	El coeficient de variació el representem amb CV.

PROJECTE MATEMÀTIC

La població catalana

En aquest projecte pretenem que aprenguis a:

- Conèixer estadísticament la població catalana i calcular les densitats de població i les taxes de natalitat i mortalitat.
- Obtenir informació a partir de l'anàlisi de gràfics estadístics.
- Elegir els gràfics adequats per representar taules de dades.

1 Anàlisi estadística de la població catalana

Aquestes són les dades de la població catalana de l'1 de gener del 2014, per províncies i l'extensió en km^2 d'aquestes.

Província	Població	km^2
Barcelona	5.523.784	7.726,4
Girona	756.156	5.905,0
Lleida	438.001	12.168,4
Tarragona	800.962	6.308,2
TOTAL	7.518.903	32.108,0

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS.

a) *Quina província té més població?*

b) *Quina té més extensió? I menys?*

c) *Calcula la densitat de població de les diferents províncies. Quina en té més?*

d) *Representa gràficament la densitat de les províncies. Quin tipus de gràfic faràs servir? Per què l'has triat?*

SITUACIÓ PROBLEMÀTICA

Per estudiar l'evolució de la població definim les taxes de naixements, defuncions i matrimonis. Aquestes taxes les expressem per cada mil habitants; així doncs, una taxa de naixements de 120 per mil significa que per cada mil habitants van néixer 120 nadons.

FES AQUESTES ACTIVITATS.

a) *Troba la taxa de naixements, defuncions i matrimonis a Catalunya l'any 2014 si saps que hi va haver 26.068 matrimonis, 71.238 naixements i 60.807 defuncions.*

b) *Calcula la taxa de creixement vegetatiu (naixements menys defuncions) l'any 2014.*

c) *Troba la taxa de naixements a les diferents provínices i representa-la, sabent que el nombre de naixements va ser: 52.163 (Barcelona), 7.369 (Girona), 4.134 (Lleida) i 7.572 (Tarragona).*

2 Ús i interpretació de gràfics per representar dades

SITUACIÓ PROBLEMÀTICA

Observa el nombre de naixements a Catalunya en el període 2006-2014:

Any	Naixements
2014	71.238
2013	71.591
2012	77.438
2011	80.861
2010	84.015
2009	84.849
2008	89.024
2007	83.716
2006	82.077

FES LES ACTIVITATS SEGÜENTS.

Com representaries les dades: mitjançant un diagrama de barres, un histograma o un gràfic de sectors? Representa'ls de manera adequada.

SITUACIÓ PROBLEMÀTICA

Aquesta taula mostra les cinc comarques més poblades a Catalunya l'1 de gener del 2014.

Comarca	Habitants
Barcelonès	2.227.238
Vallès Occid.	899.532
Baix Llobregat	806.249
Maresme	437.919
Vallès Orient.	403.623

FES AQUESTES ACTIVITATS.

a) *Quin percentatge de la població total (7.518.903) representen les dades per separat? I juntes?*

b) *Representa les dades mitjançant un gràfic de sectors. Et sembla un gràfic adequat?*

SITUACIÓ PROBLEMÀTICA

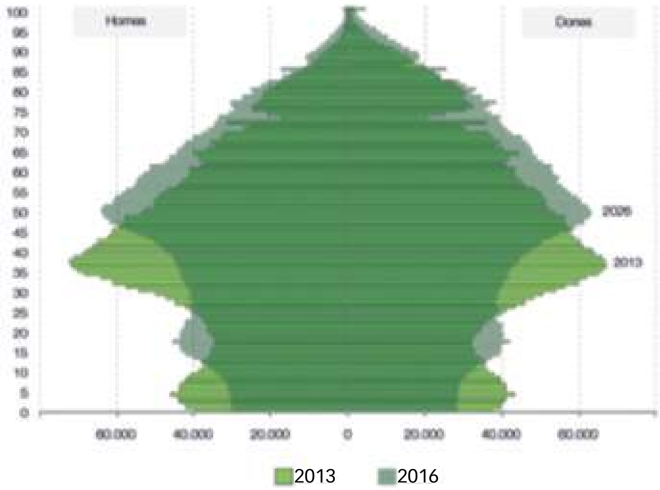
A continuació tens representades les piràmides de població a Catalunya projectades els anys 2013 i 2026.

Hi apareix, per cada sexe i segment d'edat, el nombre de persones que representa sobre el total de la població.

FES AQUESTA ACTIVITAT.

Comenta cadascuna de les piràmides. Com evolucionarà la població catalana?

Piràmide de població
Anys 2013 i 2026. Catalunya



Font: Idescat, Projeccions de població 2013-2051: principals resultats

ESTRATÈGIES DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Fer enquestes

Estratègia Per saber quin partit polític pot guanyar unes eleccions, el programa de televisió amb més audiència, etc., s'ha de fer una enquesta. Quan es fa una enquesta a una població es formula una sèrie de preguntes a un conjunt de persones (mostra). Si la població és petita –per exemple, els alumnes d'una classe–, l'enquesta s'aplica a tota la població.

L'element principal d'una enquesta és el qüestionari, que conté totes les preguntes que s'han de formular.

PROBLEMA RESOLT

1 **Respon el qüestionari següent. Després, classifica les respostes, calcula els percentatges i representa les respostes de cada pregunta en un gràfic de barres o de sectors.**

Qüestionari

1. Edat ________
2. Sexe ________
3. Assignatura que més t'agrada ________
4. Assignatura que menys t'agrada ________
5. Assignatura que t'és més fàcil ________
6. Assignatura que t'és més complicada ________
7. Assignatures que trauries ________
8. Assignatures que afegiries ________
9. Assignatures que més estudies i en què obtens més rendiment ________
10. Assignatura que menys estudies i en què obtens més rendiment ________
11. Ets partidari de classe en jornada de 9 a 3 de la tarda, sí o no? ________
12. Temps diari que dediques a estudiar:
    ☐ 2 hores o més ☐ Entre 1 hora i 2 hores ☐ Menys d'1 hora
13. Temps diari que dediques a veure la televisió:
    ☐ 2 hores o més ☐ Entre 1 hora i 2 hores ☐ Menys d'1 hora
14. El nivell d'exigència de la teva classe és alt, mitjà o baix? ________
15. En general, digues com consideres la teva relació amb el professor:
    ☐ Molt bona ☐ Bona ☐ Regular ☐ Dolenta ☐ Molt dolenta
16. La teva actitud cap a les matemàtiques és:
    ☐ Molt bona ☐ Bona ☐ Regular ☐ Dolenta ☐ Molt dolenta
17. Normalment, el fracàs escolar en matemàtiques és alt. Quins factors creus que hi influeixen? Tria'n dos:
    ☐ Falta de coneixements bàsics en els alumnes.
    ☐ Dificultat intrínseca de la matèria.
    ☐ Els alumnes no estudien prou.
    ☐ Hi ha poques hores de classe a la setmana.

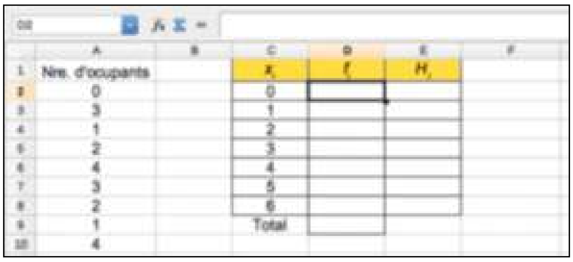
MATEMÀTIQUES AMB L'ORDINADOR

OpenOffice. CALC
openoffice.org/ca

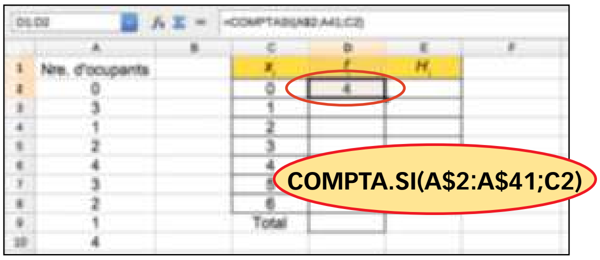
Fes una taula de freqüències per a les dades següents d'un estudi relatiu al nombre d'ocupants per habitatge en una població.

0 3 1 2 4	**3 2 1 4 5**	**1 1 3 3 3**	**2 2 2 1 3**
2 1 3 0 6	**5 5 3 2 1**	**0 3 4 2 4**	**1 1 3 6 0**

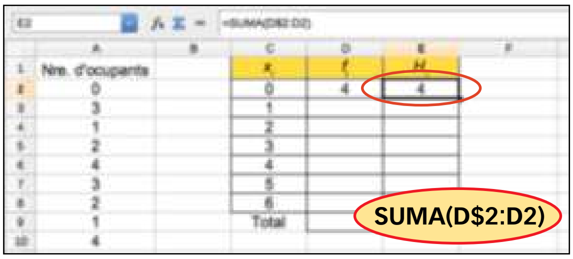
1 Escrivim a la columna **A** totes les dades obtingudes, i a les cel·les **C2:C8** escrivim els possibles valors de la variable.



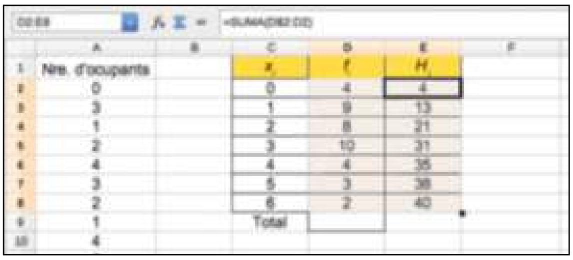
2 Amb la funció **=COMPTASI()** calculem a la cel·la **D2** el nombre de cops que es repeteix el valor de **C2** a la columna **A**.

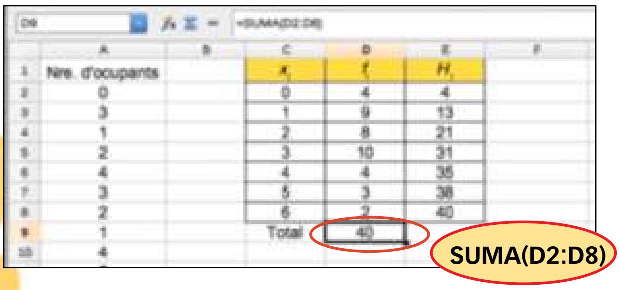


3 Amb la funció **SUMA()** calculem a la cel·la **E2**, el valor de la freqüència acumulada.



4 Copiem el contingut de les cel·les **D2** i **E2** i ho enganxem a les columnes **D** i **E**, respectivament.





ACTIVITATS

PRACTICA

1 Construeix una taula de freqüències per a les dades següents d'un estudi estadístic:

2 2 5 1 4	5 6 2 3 5	4 5 2 1 1
2 2 4 4 3	2 3 4 4 2	1 5 2 5 1

INVESTIGA

2 Amb ajuda d'una taula comprova que:

La mitjana dels quadrats de les desviacions és igual a la mitjana dels quadrats de les dades menys el quadrat de la mitjana.

ESTADÍSTICA

RESUM DE LA UNITAT

Estadística

És la ciència que s'encarrega de recopilar i ordenar dades que fan referència a diversos fenòmens per analitzar-les i interpretar-les posteriorment.

Freqüències

Freqüències absolutes: f_i

Freqüències relatives: $h_i = \frac{f_i}{N}$

Freqüència absoluta acumulada: $F_i = \sum_{i=1}^{i} f_i$

Freqüència relativa acumulada: $H_i = \sum_{i=1}^{i} h_i = \sum_{i=1}^{i} \frac{f_i}{N}$

Gràfics estadístics

Diagrama de barres

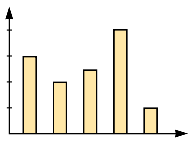
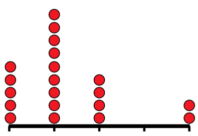


Diagrama de punts



Polígon de freqüències

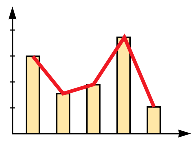
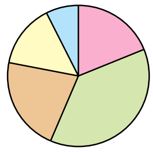


Diagrama de sectors



Mesures estadístiques

Mesures de centralització

Mitjana aritmètica: $\overline{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_1}{N}$

Mediana: *Me*, valor central de les dades ordenades.

Moda: *Mo*, valor més repetit.

Mesures de dispersió

Rang o recorregut: $R = Màx. - Mín.$

Desviació mitjana: $DM = \frac{\sum f_i \cdot |x_1 - \overline{x}|}{N}$

Variància: $\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_1 - \overline{x})^2}{N}$

Desviació típica: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_1 - \overline{x})^2}{N}}$

Coeficient de variació: $CV = \frac{\sigma}{x}$

Mesures de posició

Primer quartil, Q_1: deixa a l'esquerra el 25 % de les dades.

Segon quartil, Q_2: deixa a l'esquerra el 50 % de les dades. Coincideix amb la mediana.

Tercer quartil, Q_3: deixa a l'esquerra el 75 % de les dades.

NOTES