

AULA NO CANÒNICA:

Fotografiant el canvi de base

Utilització de la perspectiva en fotografia per observar i calcular un canvi de base.



Títol de la fotografia: *Aula no canònica.*

Autor: *Aram López Palahí.*

Centre: *Institut Thalassa - Montgat*

Resum

L'activitat per equips consisteix a dibuixar un parell de vectors \vec{a} i \vec{b} (que donarem en una matriu) al terra de la classe utilitzant com a referència les rajoles quadrades, i els vectors canònics \hat{i} i \hat{j} . Els alumnes faran una fotografia zenital per observar com els queda l'espai en base canònica. Després, utilitzant la càmera del seu telèfon mòbil, hauran de buscar una perspectiva per prendre una nova fotografia en què els vectors \vec{a} i \vec{b} es percebin perpendiculars i de la mateixa longitud. Sobre la fotografia calcularan quantes vegades necessiten els vectors \vec{a} i \vec{b} per obtenir \hat{i} i \hat{j} , i els escriuran com una nova matriu. Acabaran buscant la relació entre la matriu inicial i la que han aconseguit (una l'inversa de l'altra), i l'aplicaran per a canvis de base posteriors.

Índex

Resum	1
Índex	2
Contextualització curricular	3
Competències	3
Sabers	5
Objectius	6
Material	6
Metodologia	6
Temporització aproximada de la sessió	10
Avaluació	10
Disseny Universal d'Aprenentatge	11
Activitats complementàries	12
Rotacions de determinant +1	12
Reflexions de determinant -1	12
Aplicació del canvi de base	13
Aspectes fotogràfics: Correcció de perspectiva	13

Contextualització curricular

Aquesta activitat s'emmarca en el temari de *Matrius i Determinants* de batxillerat, tant en la modalitat científica com en les matemàtiques aplicades a les ciències socials. Es recomana la seva pràctica un cop finalitzat el desenvolupament del temari, per a que accions com calcular un determinant d'una matriu 2×2 , o fer-ne la seva inversa, no sigui un obstacle a l'hora d'aplicar el contingut teòric al llarg de la pràctica experimental.

Competències

Les competències específiques de les matemàtiques a batxillerat que es treballaran:

Competència	Argumentació	Criteris
CE1. Modelitzar i resoldre problemes de la vida quotidiana i de diversos àmbits de coneixement, incloent-hi el matemàtic, aplicant diferents estratègies i formes de raonament, per plantejar i resoldre reptes.	La fotografia està present en la quotidianitat dels alumnes. Aquesta activitat permet observar les transformacions de l'espai un cop feta una fotografia i fa present el treball matemàtic cada cop que es captura una imatge.	1.3 Obtenir solucions i fer propostes creatives a les situacions plantejades en contextos diversos, tant de la vida quotidiana com de l'àmbit acadèmic.
		1.4 Analitzar i valorar diferents modelitzacions, eines i estratègies.
CE3. Formular conjectures o problemes, utilitzant el raonament i l'argumentació, la creativitat i les eines tecnològiques, per generar nou coneixement matemàtic.	Els alumnes hauran d'identificar la relació entre la matriu inversa i un canvi de projecció a partir d'una conjectura que podran comprovar algebraicament fent la inversa d'una matriu, i empíricament a partir de l'observació de la seva fotografia.	3.2 Fer conjectures matemàtiques de manera autònoma i raonada en un context en el qual l'alumnat tingui llibertat creativa fent ús, si cal, d'eines tecnològiques (fotografia matemàtica).
CE6. Vincular i contextualitzar les matemàtiques a altres	Descobrir com una matriu 2×2 ens defineix una	6.1 Reconèixer i utilitzar les matemàtiques presents a la

<p>àrees de coneixement, abordant les situacions que se'n desprenguin, per modelitzar i resoldre problemes i desenvolupar la capacitat crítica, creativa i innovadora en situacions diverses.</p>	<p>transformació de l'espai, i com això s'aplica a la creació de videojocs, el processament d'imatges audiovisuals, les fotografies que fem de manera quotidiana estableix un fort vincle entre les matemàtiques i el dia a dia de l'alumne.</p>	<p>vida quotidiana usant els processos inherents a la investigació científica i matemàtica: inferir, mesurar, comunicar, classificar, predir, etc. en situacions susceptibles de ser abordades en termes matemàtics.</p>
		<p>6.2 Reconèixer i utilitzar les connexions entre les matemàtiques i altres matèries en situacions susceptibles de ser abordades en termes matemàtics.</p>
<p>CE7. Comunicar i representar, de forma individual i col·lectiva, conceptes, procediments i resultats matemàtics usant el llenguatge oral, escrit, gràfic i multimèdia, mitjançant diferents tipus de suports, incloent-hi els tecnològics, per donar significat al coneixement, transferir-lo i compartir-lo.</p>	<p>Per aquesta activitat canviem de suport habitual, seguint la metodologia Thinking Classroom, per tal de fomentar la cooperació entre companys. També, ens recolzem en suports gràfics com són el dibuix de vectors per representar una matriu, o la presa de fotografies per visualitzar la transformació de l'espai, i posteriorment observar els resultats de forma col·lectiva.</p>	<p>7.1 Mostrar organització en comunicar les idees matemàtiques.</p>
		<p>7.6 Utilitzar l'expressió artística i creativa per comunicar, representar i expressar idees i raonaments matemàtics, com per exemple la fotografia matemàtica, els vídeos matemàtics, les obres visuals i la música.</p>
<p>CE9. Cooperar, desenvolupant les destreses socials necessàries per participar activament en els equips de treball inclusius reconeixent la diversitat i el valor de les</p>	<p>El treball en equip fa cabdal l'interacció de les idees matemàtiques entre companys, posant en valor les aportacions de tothom per a que cadascú identifiqui les seves fortaleces i superi</p>	<p>9.1 Aportar i compartir estratègies i raonaments matemàtics amb els companys i valorar l'èxit col·lectiu com una estratègia de millora personal.</p>

aportacions dels altres, per compartir i construir coneixement matemàtic de manera col·lectiva.	les seves pors participant d'una activitat que ofereix un espai de participació per a tothom.	9.4 Ajudar a identificar errors i dificultats d'aprenentatge de les companyes i companys fent aportacions constructives i concretes que puguin ajudar a superarlos i a millorar.
---	---	---

Sabers

Els sabers específics de les matemàtiques que es tractaran:

Sentit algebraic
Model matemàtic
- Ús de les matrius i de les seves operacions per modelitzar moviments en el pla (isometries, congruència i semblança).
Sentit socioemocional
Creences, actituds i emocions
- Predisposició a endinsar-se en determinats aspectes de l'abstracció matemàtica com a únic camí per millorar-ne l'aplicabilitat.
- Capacitat creativa fent propostes matemàtiques innovadores relacionades amb aspectes artístics, culturals, socials i tecnològics en els quals el gaudi de fer matemàtiques sigui present.
Presa de decisions
- Destreses per explorar i valorar diferents estratègies en el tractament matemàtic d'un problema o d'una situació.
Inclusió, respecte i diversitat
- Habilitat a aportar idees i arguments que ajudin a l'aprenentatge dels companys.

- Capacitat de consensuar opinions i estratègies diverses a l'hora de prendre una decisió col·lectiva en el desenvolupament d'una activitat matemàtica.

- Apreciació de l'èxit col·lectiu com un èxit individual.

Objectius

- Relacionar la notació matricial amb l'organització de vectors i traslladar-los al pla cartesià **(CE6)**.
- Visualitzar empíricament una transformació de l'espai a partir de l'ús de tecnologia quotidiana **(CE1)**.
- Identificar la matriu inversa com a eina per a obtenir vectors en una nova base **(CE3)**.
- Col·laborar activament en el treball en equip aportant expertesa en diversos tipus de representació gràfica, d'àlgebra matricial i associació de continguts **(CE9)**.
- Participar en l'exposició de les conclusions obtingudes a partir de l'observació **(CE7)**.

Material

- Una càmera fotogràfica per alumne o grup (la del telèfon mòbil és suficient).
- Retoladors de pissarra blanca (dos colors per equip).
- Pissarres per a metodologia Thinking Classroom (una per equip).
- Baralla de cartes o qualsevol altre sistema per a fer grups aleatoris d'alumnes.
- Fregona i cubell (probablement el més important).
- Si es considera necessari, ordinador i sistema de projecció per fer ús de l'applet

Metodologia

PREPARACIÓ DE L'AULA

Cal obrir espai per a treballar a les parets i al terra, per tant és recomanable enretirar les cadires i taules a un extrem de l'aula. És una bona idea enganxar prèviament les pissarres Thinking Classroom, una per grup, a les parets, deixant espai entre grups per a treballar còmodament.

En cas que es consideri necessari, si tenim alumnes que se'n poden beneficiar, es pot preparar la projecció del simulador d'aquesta activitat (adjunt en [aquest enllaç](#)). El simulador permet representar els vectors sobre la base canònica i transformar-los en la seva pròpia base. Això és en pantalla el que els alumnes faran amb la càmera treballant la perspectiva, però treu la màgia de la descoberta i només s'hauria d'utilitzar en casos d'alumnat amb gran dificultat.

AGRUPAMENT DELS ALUMNES

Seguirem una metodologia Thinking Classroom, per tant, formarem **grups visiblement aleatoris**. En el nostre cas, es reparteixen cartes i els alumnes amb el mateix nombre formen un equip (de 3 membres, en el nostre cas). A cada equip se'ls proporciona **una pissarra** i dos **retoladors esborrables** de colors diferents.



Agrupament aleatori d'alumnes. Imatge: font pròpia

INDICACIONS PER A L'ALUMNAT

A cada equip li assignem una matriu 2×2 per a que treballin. Explicarem que les columnes de la matriu son dos vectors que hauran de dibuixar a terra, des del mateix punt d'origen, des d'on també hauran de dibuixar els vectors \hat{i} i \hat{j} de la base canònica.



Dibuixant la base canònica. Imatge: font pròpia



Dibuixant els vectors. Imatge: font pròpia



Dibuixant els vectors. Imatge: font pròpia.



Vectors en base canònica. Imatge: font pròpia.

FOTOGRAFIA MATEMÀTICA

Seguidament, els alumnes hauran de fer una fotografia del seu dibuix a terra, però buscant una perspectiva on els vectors d'inici es vegin ortonormals (sobre la pantalla de la càmera, formant un angle recte i de la mateixa longitud aparent). Es recomana utilitzar els marges de la pantalla digital



Vectors inicials en la perspectiva que els mostra ortonormals. Imatge: font pròpia



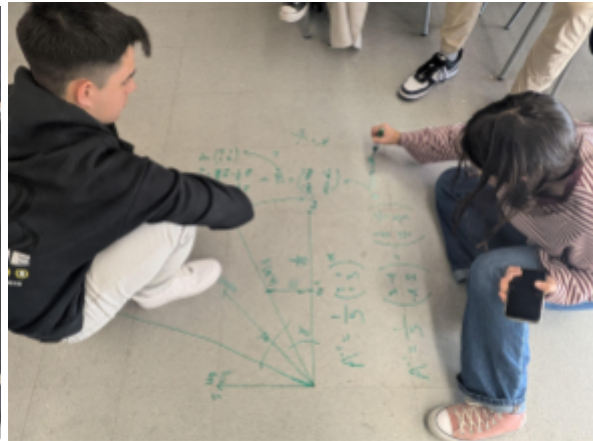
Vectors en la perspectiva que els mostra ortonormals. Imatge: font pròpia.

MATRIU CANVI DE BASE

Els alumnes, sobre la imatge que han capturat, hauran d'escriure els vectors \hat{i} i \hat{j} en base als vectors \vec{a} i \vec{b} que ara es veuen perpendiculars. Aquesta mesura, normalment, serà aproximada. Els resultats obtinguts s'han de situar en una nova matriu 2x2. Demanarem que trobin la relació entre la matriu original i l'obtinguda. En aquest punt, normalment quan un equip descobreix que una matriu és la inversa de l'altra, la resta d'equips segueixen amb èxit trobant les seves pròpies conclusions.



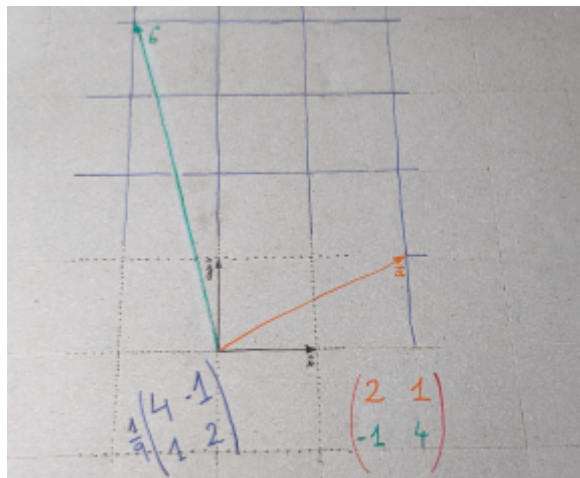
Estratègies per a la mesura dels vectors en la nova base.
Imatge: font pròpia.



Càlcul de la matriu inversa i comprovació dels resultats.
Imatge: font pròpia.



Matriu dels vectors i, j en base no canònica. Imatge: font pròpia.



Perspectiva zenital dels resultats. Imatge: font pròpia.

EXPOSICIÓ DE RESULTATS

Els equips hauran d'explicar el procés de principi a fi, explicant els resultats obtinguts. Per aquest punt, si es desitja, podem demanar als alumnes que han pres un rol menys participatiu que expliquin el procediment seguit. També es pot demanar que, de tot el procés, cada equip n'exposi una part.

RECOLLIR I NETEJAR

Ja per acabar, queda el pas més important. Recollir i fregar el terra, per deixar la classe a punt per l'hora següent.



Deixant l'aula a punt per després. Imatge: font pròpia.

Temporització aproximada de la sessió

- Preparació de l'aula: 5 minuts
- Agrupament dels alumnes: 5 minuts
- Indicacions per a l'alumnat: 10 minuts
- Fotografia matemàtica: 10 minuts
- Matriu canvi de base: 10 minuts
- Exposició de resultats: 10 minuts
- Recollir i netejar: 5 minuts

Avaluació

Atès que l'activitat està molt enfocada en l'experimentació i el treball cooperatiu, l'avaluació ha de ser formativa i basar-se en l'observació i el producte final. Es pot estructurar mitjançant una llista de control basada SÍ/NO en les Competències Específiques (CE) abans mencionades.

Resolució de problemes i Modelització (CE1, CE6)	
L'alumne és capaç de situar correctament els vectors de la matriu original a terra, prenent la base canònica de les rajoles com a referència.	SÍ/NO
L'alumne comprèn el vincle entre el canvi de base matemàtic i la perspectiva òptica de la fotografia	SÍ/NO
Raonament i Conjectures (CE3)	
L'equip extreu correctament les noves components dels vectors a partir de la fotografia realitzada.	SÍ/NO
L'alumne arriba a la conclusió, de manera autònoma o guiada, que la nova matriu obtinguda correspon a la matriu inversa de la matriu original	SÍ/NO
Comunicació i Representació (CE7)	
Participa amb claredat en l'exposició final, argumentant els resultats obtinguts i el procediment que l'equip ha dut a terme.	SÍ/NO

Treball Cooperatiu (CE9)	
S'integra i col·labora de manera activa en el grup aleatori assignat (metodologia Thinking Classroom).	SÍ/NO
Participa en les tasques col·lectives derivades de l'activitat, com ara el traçat inicial i la neteja final de l'aula.	SÍ/NO

Disseny Universal d'Aprenentatge

L'activitat es dissenya amb mesures d'accessibilitat integrades a la dinàmica general de la classe, evitant adaptacions individualitzades que puguin estigmatitzar. Així doncs, s'apliquen les següents estratègies globals:

- Si hi ha un alumne amb dificultats de visió espacial o que es bloqueja amb el dibuix a gran escala, farem que tots els alumnes de l'aula tinguin accés a la projecció o al suport del simulador digital interactiu (applet), permetent-los visualitzar i experimentar primer la transformació a la pantalla abans o durant la pràctica física.
- Si hi ha un alumne amb dificultats de discriminació visual, farem que tots els alumnes de l'aula utilitzin retoladors de pissarra de colors d'alt contrast (clarament diferenciats per a la base canònica i la nova base) i que defineixin les mides de manera sobredimensionada per fer-ho evident a simple vista.
- Si hi ha un alumne amb dificultats motrius per ajupir-se o dibuixar a terra, o amb ansietat a l'hora d'exposar en públic, farem que tots els alumnes de l'aula es reparteixin els rols de l'activitat (dibuixant, calculador a la pissarra vertical, fotògraf, portaveu) de manera flexible dins de cada equip, valorant totes les tasques com a imprescindibles per a l'èxit col·lectiu.
- Si hi ha un alumne amb dificultats per seguir instruccions de manera exclusivament oral, farem que tots els alumnes de l'aula rebin el suport de les coordenades i l'estructura del que han de fer de manera gràfica o escrita (ja sigui a la pissarra de l'aula o en una fitxa).

- Si hi ha un alumne amb dificultats d'integració social o de relació, farem que tots els alumnes de l'aula formin els grups de treball a través d'un sistema visiblement aleatori (com el repartiment d'una baralla de cartes), trencant les dinàmiques de grup tancades i afavorint un entorn cooperatiu i equitatiu per a tothom.

Activitats complementàries

SESSIONS POSTERiors

Com a continuació de l'activitat, serà una bona idea treballar amb el simulador de canvi de base (adjunt en [aquest enllaç](#)). Observar nous canvis de base, ara sí a partir del càlcul, però sempre tenint present i referenciant l'experimentació.

Rotacions de determinant +1

Una rotació del pla cartesià es pot presentar com una transformació de l'espai a partir d'una matriu 2×2 de determinant +1. Observar una matriu de canvi de base que compleixi amb aquesta condició i visualitzar la seva acció sobre un sistema de vectors pot ser de gran utilitat per als alumnes. Aquest punt ens permetrà treballar sobre el càlcul del mòdul i la normalització dels vectors de la nova base, per tal d'aconseguir el determinant desitjat. Relacionar els elements de la matriu amb els valors del $\sin(\theta)$ i del $\cos(\theta)$ ajudarà també a construir de forma genèrica una matriu rotació per a qualsevol angle de gir θ .

Reflexions de determinant -1

A diferència de les rotacions, les reflexions són canvis de base de determinant -1. Construir una matriu d'aquestes característiques i veure com actua sobre un conjunt de vectors donat afavorirà que els alumnes vegin l'aplicació de les matrius en entorns, per exemple, de disseny gràfic.

Combinar reflexions i rotacions també és fàcil, descobrint que aquestes matrius es poden multiplicar per obtenir un operador que concateni les dues accions.

Aplicació del canvi de base

D'un parell de vectors qualsevol en podem definir una base pròpia. En la pràctica que hem realitzat, els alumnes han vist com reescriure els vectors de la base canònica en la nova base. Ara bé, la matriu del canvi de base es pot aplicar sobre qualsevol vector en base canònica, per a escriure'l en la nova base. Aquest exercici és interessant doncs es pot resoldre amb notació matricial de forma ràpida o a partir d'un sistema d'equacions. Realitzar tots dos procediments i obrir un debat a classe sobre com el producte matricial, que ens resol el sistema, és de gran interès per comprendre amb profunditat les operacions algebraiques.

Aspectes fotogràfics: Correcció de perspectiva

En la presa de fotografies, hi ha un aspecte important a considerar. La majoria de càmeres digitals implementen una correcció dels angles generant un punt de fuga en les imatges, que fa que línies naturalment paral·leles convergeixin en un punt extern a la imatge, afegint sensació de profunditat que en fotografia té sentit, però que per a la nostra pràctica dificulta la percepció del canvi de base.



Contrapicat sense corregir la perspectiva. Imatge: Guillermo Lujik



Mateixa imatge amb la perspectiva corregida. Imatge: Guillermo Lujik

Sobre la correcció d'imatges en parla Guillermo Lujik en el forum Fujistas, on proporciona un algoritme matricial per a fer el tractament de les imatges.

Lujik, G. (2023, 24 de setembre). Cómo se implementa la Corrección de perspectiva

<https://fujistas.com/foro/threads/como-se-implementa-la-correccion-de-perspectiva.73098/>