Art matemàtic

Dani Saura Vázquez
26/1/2017
INS Rovira-Forns
Matemàtiques
Assun Ferrer
Curs 2016-17

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños, angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Rafael Alberti

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ

1.1 MOTIVACIÓ PER LA TRIA DEL TREBALL

He escollit aquest treball perquè he vist que dues temàtiques que m'agraden com són el dibuix i les matemàtiques poden estar molt relacionades. Conèixer i estudiar conceptes matemàtics pot ajudar a crear dibuixos fora del comú. Gràcies a conceptes matemàtics, sobretot geomètrics, veurem com s'aconsegueix crear una sensació d'impossibilitat que et fa repensar com és possible el que estàs veient i si realment té o no una explicació. A més, gràcies a l'Estada Argó de la Universitat Autònoma de Barcelona, també vaig poder tractar temes que m'han servit d'ajut per aquest treball com la cinta de Möbius o el nombre d'or.

1.2 OBJECTIUS

En primer lloc, m'agradaria poder analitzar dibuixos amb una base matemàtica com els de l'artista M. C. Escher per identificar quins conceptes matemàtics ha utilitzat en els seus dibuixos i així poder recrear algunes de les seves obres més reconegudes. En segon lloc, crear una o vàries obres a partir d'aquesta base matemàtica que utilitzava l'artista en els seus dibuixos.

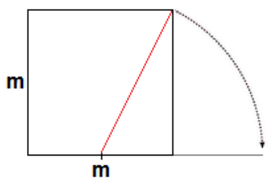
2. MATEMÀTIQUES I ART

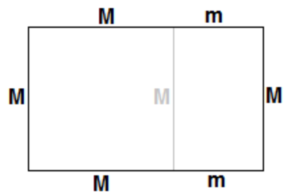
Les matemàtiques i l'art estan relacionades de diverses maneres des de fa molt de temps. La música, l'arquitectura, l'escultura i la pintura són arts en les que les matemàtiques poden tenir joc per perfeccionar la tècnica. En aquest treball ens centrarem en la matemàtica dins del dibuix. Coneixerem la relació entre aquestes dues disciplines, la seva evolució i sobretot posar en pràctica conceptes matemàtics que faran possible la creació de dibuixos que no deixaran indiferent a ningú.

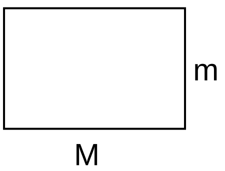
Prèviament cal definir què son les matemàtiques i què es l'art (aquest últim referint-nos a l'art de la pintura i el dibuix). D'una banda, les matemàtiques són una ciència que estudia les propietats i relacions entre números, figures geomètriques i símbols. Parteix d'axiomes, és a dir, a partir d'un punt de partida que es considera evident i permet demostrar coses més complexes, per exemple 1=1. D'altra banda, el dibuix és un art visual que permet la transmissió d'idees a partir de la representació d'un objecte, d’una escena, d’un paisatge o d’una persona, tot això amb diferents graus de realisme. Sabent això, com podríem relacionar aquestes dues branques?

Les matemàtiques i l'art tenen una llarga relació històrica que neix a l'antiga Grècia, al segle 5 a.C. Alguns artistes grecs utilitzaven el nombre d’or en les seves obres per provocar l’emotivitat a l’espectador. Aquest nombre és un nombre irracional representat per la lletra grega phi (Φ, sisena lletra de l’abecedari grec) i el seu valor és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

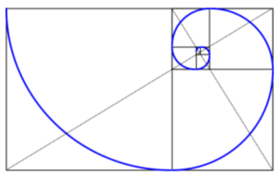
La relació entre aquest nombre i l'art és el rectangle auri, un rectangle que té com a raó el nombre d'or i s'ha utilitzat des de l'antiguitat en nombroses construccions tals com temples i palaus i va inspirar a molts artistes i arquitectes en les seves obres, ja que atorgava un caràcter estètic. Aquests artistes es van inspirar en les idees del llibre *De Divina Proportione* de Luca Paciolii on parlava de la perfecció d'aquest nombre.



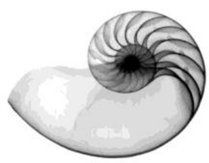




$$\frac{M}{m} = \Phi$$

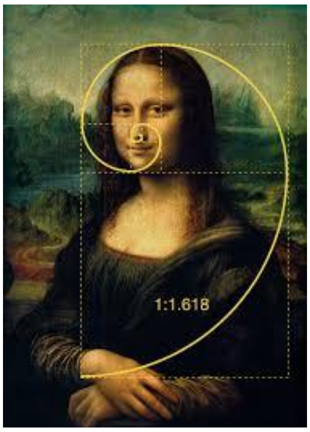


Una de les propietats més interessants del polígon és que si a un rectangle auri li traiem un quadrat aconseguirem un altre rectangle de les mateixes característiques i amb la raó del nombre d'or. Es confirma doncs que, en el cas del rectangle auri, $\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m} = \Phi$. Si repetim aquest procés d'afegir un quadrat a cada rectangle que es formi al fer això



Imatge 1: Closca de nautilus amb la forma de l'espiral àuria.

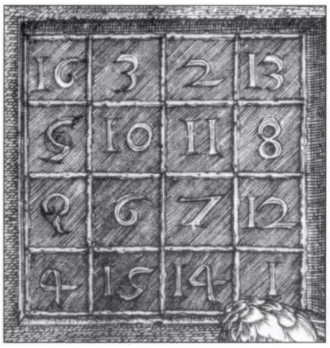
podrem crear una espiral que podem trobar representada en diverses figures de la naturalesa com galàxies espirals i nautilus i, a més a més en l'art. Alguns dels exemples són la *Mona Lisa* de Leonardo Da Vinci, els temples grecs o *El naixement de Venus* de Botticelli. Cadascuna d'aquestes obres tenen les mesures del rectangle auri i els personatges i els seus trets segueixen l'espiral d'or. En les imatges de a continuació podrem veure com la closca d'un nautilus segueix a la perfecció el recorregut de l'espiral d'or i com un panteó grec omple la mida d'un rectangle auri i cadascuna de les parts d'aquest també té la mida del rectangle d'or seguint la divisió del polígon a partir de quadrats. A més, en obres com la *Mona Lisa* o *El Naixement de Venus* els trets i els moviments dels personatges també segueixen l'espiral d'or. L'ús de la proporció àuria dins de l'art requereix un estudi previ per inscriure el que serà el dissenys dins dels rectangles o les espirals que funcionen com a base o guia de l'obra i, gràcies a això, s'aconsegueix un resultat molt més atractiu visualment.



Imatge 2: *Mona Lisa* de Leonardo Da Vinci.

Imatge 3: *El Neixement de Venus* de Botticelli

Imatge 4: Panteó grec amb les mides del rectangle d'or.

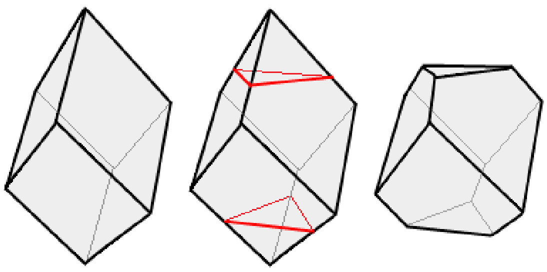


16	3	2	13	34
5	10	11	8	34
9	6	7	12	34
4	15	14	1	34
34	34	34	34	

Imatge 5: Quadrat màgic de constant 34 del gravat *Melancolia I* de Albertch Dürer.

Imatge 6: *Melancolia I* de Albertch Dürer. 1514.

Més endavant, en l'època del Renaixement l'artista alemany Albretch Dürer va fer referències a les matemàtiques en el gravat *Melancolia I,* on trobem diversos elements relacionats amb la geometria i l'aritmètica i, a més, objectes de mesura com un compàs, un regle o una balança. Trobem un quadrat màgic de 4x4 (una taula de forma que la suma dels nombres per columnes, files i diagonals segueix el mateix nombre o "constant màgica") a la cantonada superior dreta amb la constant de 34.



Imatge 7: Representació del truncament d'un romboedre.

Tanmateix trobem un poliedre truncat en la zona dreta. En aquest cas un romboedre truncat que s'ha obtingut a partir del truncament de dos dels seus vèrtexs oposats tal com es pot veure a la **imatge 7**. Al cap i a la fi, Dürer només va utilitzar aquestes idees i recursos matemàtics per decorar l'escenari de l'obra, és a dir, no dónen cap sentit matemàtic al gravat, al igual que els objectes de mesura i l'esfera. A diferència d'això, en temps més moderns aparaguè un art de la mà d'un artista neerlandès, Maurits Cornelis Escher, qui va fer un ús intensiu en les seves obres de la teselació, la geometria hiperbòlica, la simetria, i altres objectes matemàtics com són els poliedres, la cinta de moëbius i, sobretot, les figures imposibles. Va utilitzar aquests conceptes i objectes matemàtics per crear obres amb espais paradoxals que desafien les maneres habituals d'entendre l'art. Escher, gràcies a les seves obres, va aconseguir el sobrenom de "l'artista matemàtic" i els seus treballs són més admirats en l'àmbit científic que en artístic, ja que són tot un joc visual amb un gran trasfons matemàtic.

La matemàtica utilitzada per Escher no és una matemàtica convencional de números i fòrmules, és una matemàtica molt més visual inspirada en conceptes de geometria, concavitat i convexitat i diversos conceptes de l'àrea i la divisió d'aquesta. A més, també juga amb les limitacions que impossa el plà, demostrant que aquest es capaç de crear ilusions òptiques de profunditat i volum, així com també amb l'infinit amb ilusions com el moviment infinit, la possibilitat de pujar i baixar al mateix moment, entre d'altres.

Tot seguit ens dedicarem a parlar de l'artista Escher, la seva biografia, la seva carrera artística i analitzarem les seves obres i els conceptes matemàtics que va integrar en aquestes més a fons.

3. Biografía de M.C. Escher

Imatge 8: Retrat d'Escher.

Maurits Cornelis Escher, més conegut per les seves inicials M.C. Escher, va néixer el 17 de juny de 1898 a Leenwarden (Països baixos) i era fill d'un enginyer hidràulic. En l'època d'estudiant no va tenir molt d'èxit i no li agradava gens anar a classes i estudiar, a excepció de les classes de dibuix.

Als 20 anys, aproximadament, va començar a estudiar en l'Escola d'Arquitectura i Arts Decoratives, però va abandonar aquests estudis per ser el deixeble d'un professor xilògraf, Samuel Jesserun de Mesquita, qui li va ensenyar tècniques de gravat en fusta que desprès va utilitzar amb gran domini.

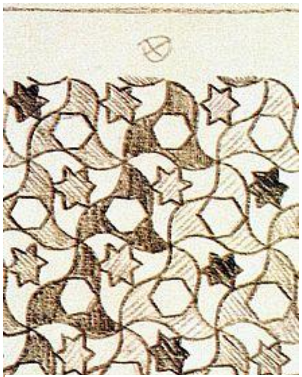
A partir de 1922 va començar a fer viatges turístics. En primer lloc, va anar a Itàlia de vacances, però va acabar quedant-s'hi a viure una llarga temporada gràcies a Jetta Umiker, la dona amb la que es va casar i va tenir tres fills. La seva estància a Itàlia va influir en algunes de les seves obres més reconegudes tals com *Balcó* o *Galeria de gravats*, on podem trobar edificis i paisatges inspirats en l'arquitectura de petits pobles italians.

Imatge 9: Poble italià del que es va inspirar Escher.

Imatge 10: Recreació de l'obra *Balcó* d'Escher inspirada en edificis d'estil italià.

Anys més tard va fer un viatge a Granada (Espanya) on va visitar l'Alhambra, el Generalife i la Mezquita de Córdoba, llocs que el van captivar i van fer que tornés a visitar-los anys després per estudiar els seus dissenys de forma més detinguda, arribant a fer petits esbossos dels motius ornamentals de l'Alhambra de Granada. Gràcies a aquesta visita, Escher

Imatge 11: Tessel·les de l'Alhambra de Granada.



Imatge 12: Esbós d'Escher d'un tessel·lat de l'Alhambra de Granada.

va agafar fortes influències dels dissenys que va veure, espacialment els de partició regular del pla i l'ús de patrons que omplen l'espai sense deixar forats, tècnica també coneguda amb el nom de tessel·lat.

A l'any 1935, Escher abandonà Itàlia a causa del clima polític i social que habitava en l'època i que, poc després, va fer esclatar la II Guerra Mundial. Abans de tornar al seu país natal va passar alguns anys a Bèlgica i Suïssa, però no va quedar-s’hi perquè els paisatges eren poc inspiradors per les seves obres i, a partir d'aquí, va començar a crear imatges impossibles. L'any 1941 va tornar a Holanda i va estar deu anys vivint amb els seus pares, posant a la venda els seus gravats i guanyant diners que li van permetre viure uns molt bons últims anys de vida. Feia copies dels seus dibuixos, dissenys de segells, portades de llibres i figures de fusta inspirades en antics dibuixos seus. Fins als 70 anys la venta dels seus dibuixos era molt reeixida fins que va caure malalt i va fer la seva última obra original, *Serps*, demostrant que no havia perdut cap de les seves habilitats artístiques. Deu anys més tard va ingressar en una residència d'artistes a Holanda on va poder seguint fent el seu treball fins al 27 de maig de 1972, data en la que va morir.

4. Obres d'Escher.

Escher és conegut arreu del món amb el nom de l'artista matemàtic o l'artista de l'impossibilitat, degut a que a les seves obres hi ha construccions tridimensionals impossibles de realitzar a la realitat física. No obstant això, aquests dibuixos basats en figures impossibles no són més que una petita part de l'extensa obra de l'artista que es va caracteritzar per fusionar de manera única les matemàtiques i l'art.

Així doncs, analitzarem els diferents gravats d'Escher per extreure els conceptes matemàtics, figures geomètriques i impossibles que va utilitzar.

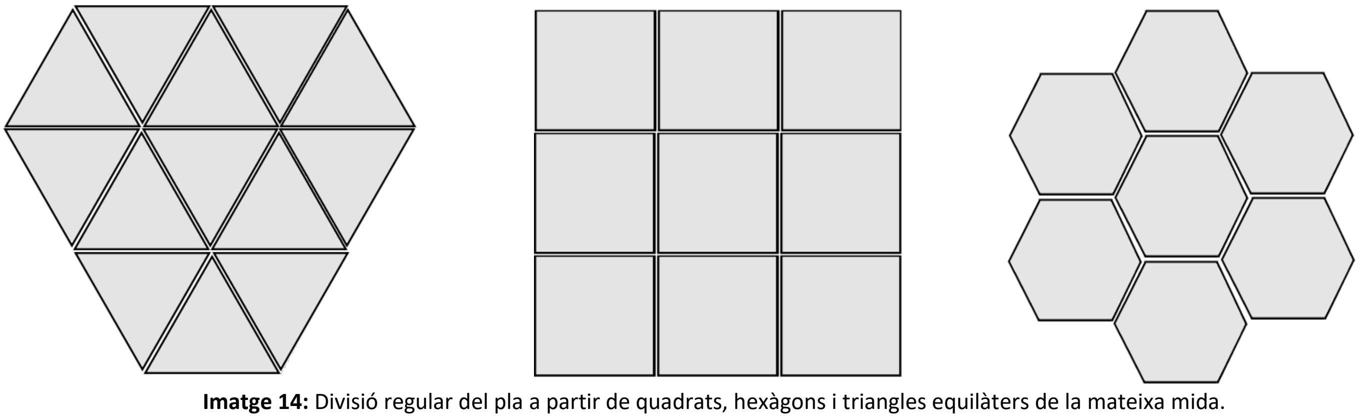
4.1 PARTICIÓ DEL PLA. TESSEL·LACIONS.

Dins d'aquesta categoria trobem més de 30 gravats tots ells originals d’ Escher. Utilitzava aquesta tècnica amb gran domini i, segons ell, va ser un dels temes que més l'apassionava a l'hora de dibuixar. El gust per la tessel·lació el va arrelar en el seu viatge a l'Alhambra de Granada, tot i que anteriorment ja havia començat a jugar amb la partició regular del pla.

Una tessel·lació és una regularitat de figures que cobreix una superfície plana sense deixar cap espai buit i cap figura es superposi sobre l'altra. Per aconseguir una tessel·lació cal transformar una figura geomètrica inicial (triangle, quadrat, o hexàgon) isomètricament, és a dir, sense variar les dimensions ni l'àrea de la figura inicial. Ara bé, depenent de la figura geomètrica amb la que es comenci el tessel·lat, s'hauran de seguir unes determinades regles per aconseguir que encaixin les noves peces creades a partir de la deformació dels costats d'aquests polígons inicials mitjançant translacions i rotacions. Escher tenia un gran domini d'aquesta tècnica i va aconseguir desglossar el pla amb figures complexes tals com ocells, peixos, rèptils i figures humanes. Aquestes obres es coneixen com "mosaics escherians".

La seva primera obra tessel·lada és *Vuit caps*, on trobem 8 caps d'homes i dones que omplen una superfície sense deixar cap espai. Després d'aquesta primera obra va començar a crear altres mosaics partint de figures geomètriques que complien la condició d'omplir el pla sense deixar espais, com són els triangles equilàters, els quadrats i els hexàgons.

Imatge 13: Obra *Vuit Caps* d'Escher.



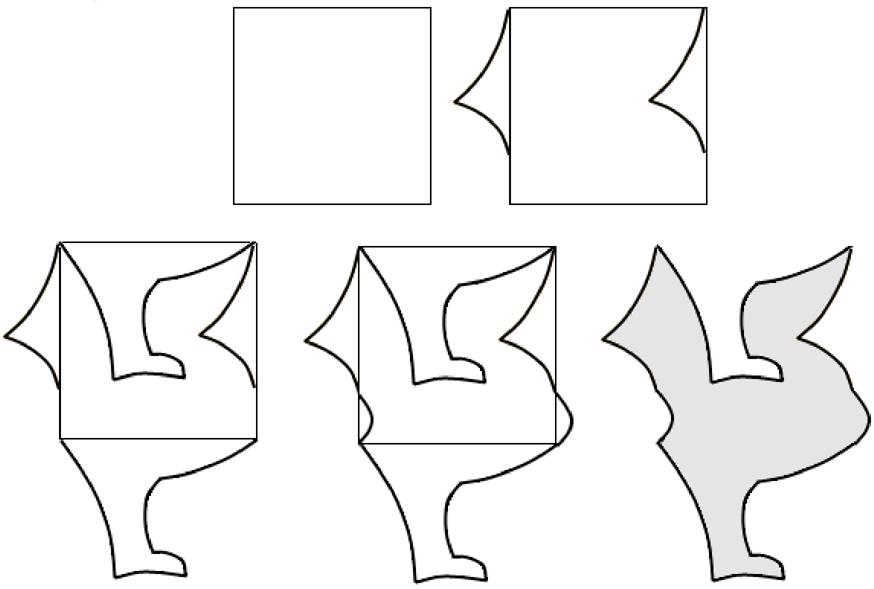
Imatge 14: Divisió regular del pla a partir de quadrats, hexàgons i triangles equilàters de la mateixa mida.

A continuació, veurem els gravats tessel·lats més coneguts d'Escher diferenciant-los segons el polígon inicial i estudiarem la transformació que pateix aquest per aconseguir la peça final dels seus mosaics. Com podrem veure, la major part d'aquests tessel·lats només són esbossos, és a dir, formen la base d'un altre dibuix o els utilitza per la formació de metamorfosis o cicles, que són dos dels grans temes que utilitza l'artista en les seves obres. Així doncs, després de veure com transformar un polígon en una peça d'un mosaic, veurem i analitzarem els dibuixos definitius on Escher utilitza els tessel·lats.

4.1.1 Tessel·lacions a partir de quadrats.

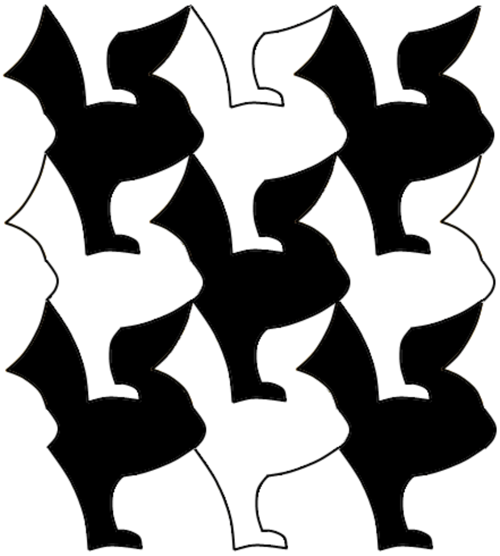
La tessel·lació a partir de quadrats és la més senzilla de les tres i també la menys utilitzada per Escher, pot ser per la seva monotonia en quant a posició i direcció de la peça. Només ens permet orientar cada peça cap un costat i sense variacions, cosa que pot suposar un avantatge.

En aquest tipus de tessel·lació es parteix d'un quadrat i només s'ha seguir una única regla, que és que tota part deformada d'un dels costats del quadrat es traslladarà paral·lelament al costat oposat. És a dir, que si en un costat dibuixem un triangle que entra per l'interior del quadrat, al costat oposat aquest mateix triangle tindrà que estar a l'exterior del quadrat. Ho veurem fàcilment amb un exemple:

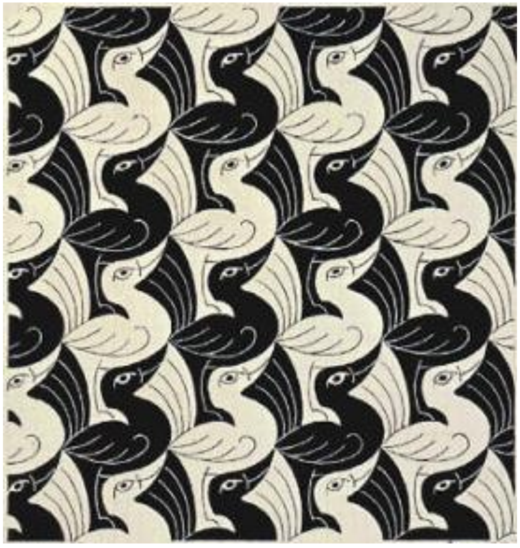


Imatge 15: Procés de creació d'una tessel·lació a partir d'un quadrat mitjançant la translació al costat oposat de les transformacions fetes.

El procés de creació és molt senzill respecte els altres. La dificultat es troba a l'hora de pensar quina part de la peça podria encaixar amb una altra. En aquest cas, les potes encaixen amb el cos, el coll i la cua del ocell. Així doncs, després d'obtenir ja la figura final (en aquest cas l'ocell) només cal col·locar una peça al costat de l'altre per omplir el pla i acabar amb la tessel·lació.



Imatge 16: Siluetes dels ocells d'Escher omplint el pla seguint el tessel·lat.



Imatge 17: Esbós original del tessel·lat *Ocells* d'Escher. 1967.

Seguint aquest mateix procés també es poden crear tessel·lats molt més complexes, amb tantes translacions del polígon inicial (en aquest cas, el quadrat) com es vulgui. Un exemple d'aquest cas seria l'esbós *Pegasus*, on fins i tot la figura tessel·lada no queda tancada si no està envoltada d'altres peces. A la **imatge 18,** podem veure com hi ha parts del cavall que no es poden ajuntar a partir de la transformació del quadrat. Sinó que, fins que no es crea el tessel·lat complert, no es tanca totalment la figura.

Imatge 18: Procés de creació d'una tessel·lació més complexa a partir d'un quadrat.

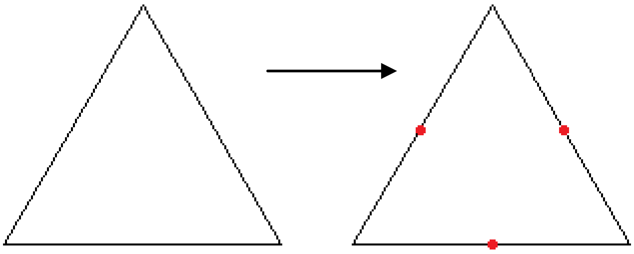
Imatge 19: Siluetes dels cavalls omplint el pla seguint el tessel·lat.

Imatge 20: Esbós original del tessel·lat *Pegasus* d'Escher. 1959

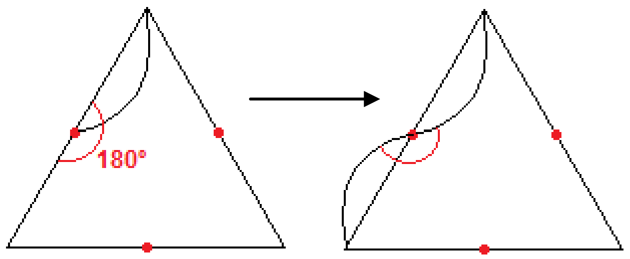
4.1.2 Tessel·lacions a partir de triangles equilàters.

A continuació, veurem com formar un tessel·lat a partir de la deformació d'un triangle equilàter segons ho feia Escher. El tessel·lat a partir de triangles té un grau més de dificultat de les que es creen a partir de quadrats. Aquest tipus de tessel·lació permet més variabilitat en quant a la posició de les figures, permet posar-les en diferents orientacions i el mosaic final té molt més dinamisme.

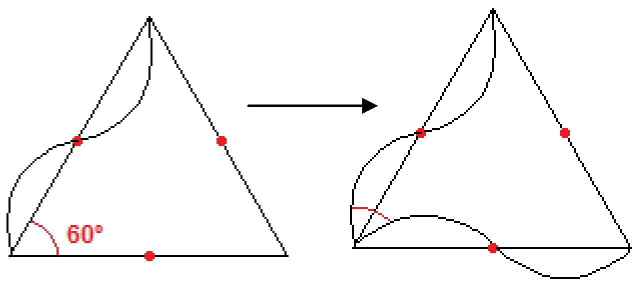
Començarem amb el polígon en qüestió i el deformarem seguint unes regles. En primer lloc, caldrà marcar el punt mig de cadascun dels costats del triangle perquè cadascun dels segments obtinguts actuarà com un nou costat de la figura i també els utilitzarem com a punt de gir del patró.



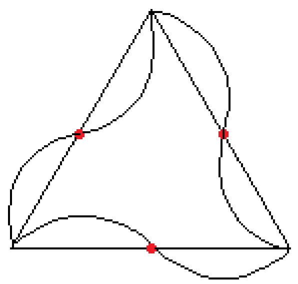
En segon lloc, es dibuixa el patró que volem que es repeteixi durant el tessel·lat en una de les meitats d'un costat del triangle. A continuació, afegim aquest mateix patró a l'altre meitat del costat fent un gir de 180º, utilitzant com a punt de gir el punt mitjà del costat del polígon que estem utilitzant.



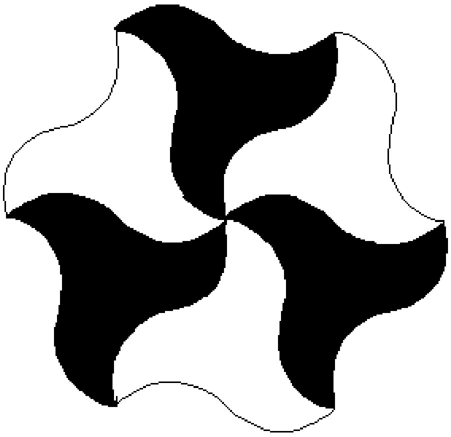
En tercer lloc, s'haurà de rotar el patró d'un costat del triangle a l'altre. Per fer-ho, aplicarem un gir de 60º, on el punt de gir és el vèrtex del triangle comú als dos costats utilitzats.



A continuació, només cal repetir aquest últim pas i fer un gir de 60º del patró cap a l'últim costat del triangle. Finalment, ja tenim la peça del tessel·lat complerta i només cal ajuntar-les per recobrir el pla.



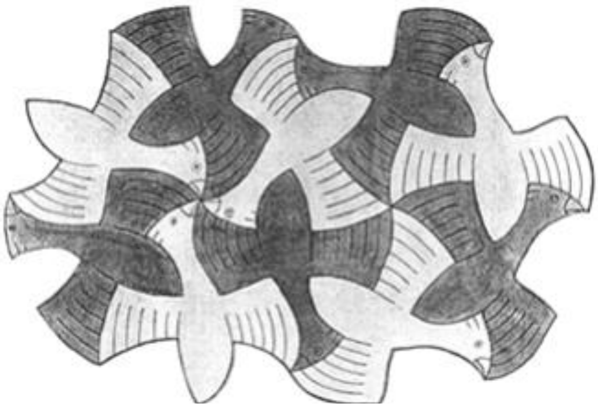
Per la creació del tessel·lat només cal agafar la peça i afegir-l'hi d'altres al costat fent girs de 60º respecte un dels vèrtex de la figura. Quan hàgim encaixat sis peces aconseguiríem formar una figura tancada de 360º (figura amb forma d'hexàgon però amb els costats doblegats).



Imatge 21: Figura semblant a un hexàgon feta a partir de 6 peces deformades partint d'un triangle equilàter.

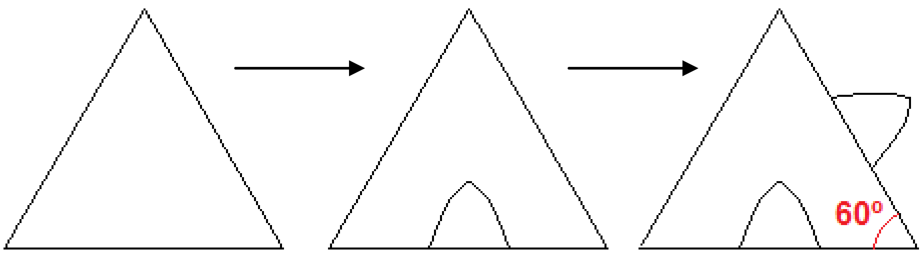
Imatge 22: Esbós d'Escher d'una tessel·lació feta a partir de triangles equilàters (inspirat en l'Alhambra de Granada).

Hi ha un altre mètode per crear un tessel·lat a partir d'un triangle equilàter que també va utilitzar Escher. Amb aquest mètode es poden crear peces amb els tres costats diferents, no tots idèntics com en el mètode anterior.

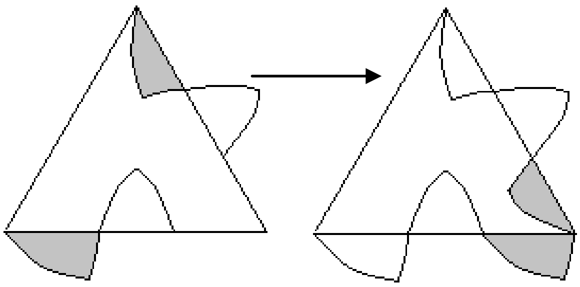


Imatge 23: Part del tessel·lat *Ocell* d'Escher.

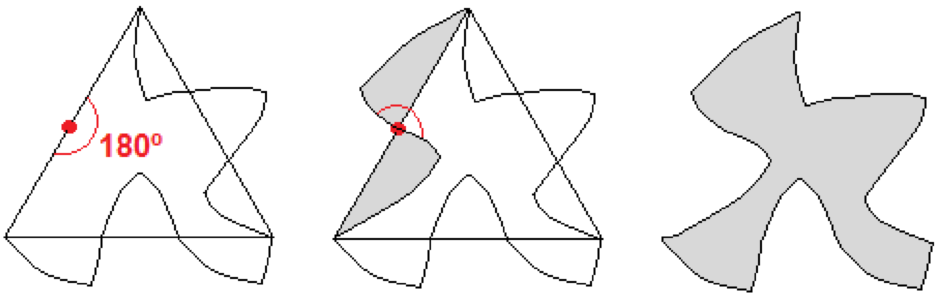
El mètode l'exemplificarem amb la figura de la **imatge 23**, que és una part d'un dels tessel·lats més famosos de l'artista. Partirem d'un triangle equilàter i farem la primera deformació d'un dels seus costats.



Seguidament, només caldrà seguir fent deformacions del triangle en un dels costats i traslladar-les al oposat amb un gir de 60º.



Ja per acabar la peça, hem de construir el costat del triangle que falta. Per fer-ho, només hem de seguir la regla de les primeres transformacions a partir de triangles equilàters: dibuixar un patró en la meitat del costat que falta i girar-lo 180º utilitzant com a punt de gir el punt mitjà del costat del triangle:

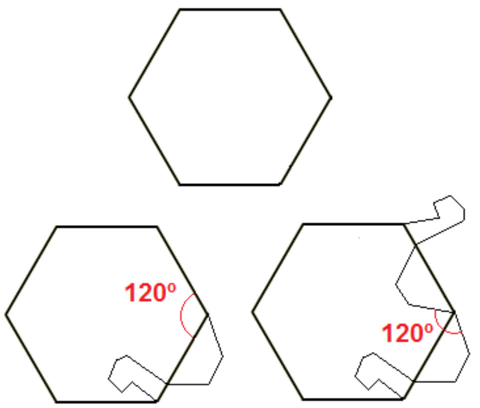


La figura resultant és distinta per cada costat del que seria el triangle inicial a diferència de l'anterior transformació. Això va donar una mica més de llibertat a l'hora de crear la forma de la peça i poder donar-li l'aspecte d'un animal, que en aquest cas podria ser un peix o un ocell depenent on li posem els ulls i la cua, cosa que no s'aconsegueix mantenint els costats iguals.

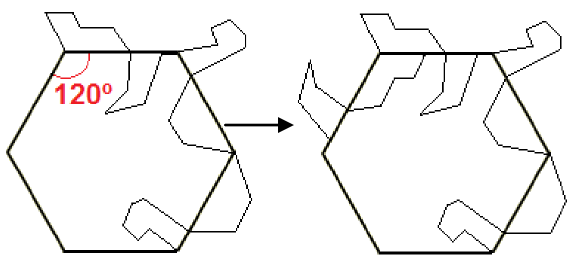
4.1.3 Tessel·lacions a partir d'hexàgons.

Per últim, tractarem les tessel·lacions creades a partir d'hexàgons, que permeten fer figures amb molts més detalls. Ara bé, crear una nova té una gran complexitat perquè novament has de pensar quina part del cos de l'animal o de l'objecte pot encaixar amb l'altra abans de començar a crear la figura. Aquest tipus de tessel·lació consisteix en dissenyar un patró en un costat del polígon (una part cap a l'exterior de l'hexàgon i una altra que s'endinsi) i rotar-lo 120º cap al costat contigu fins omplir els 6 costats; per tant, només cal fer 3 costats diferents, els altres tres es formen mitjançant la rotació dels primers.

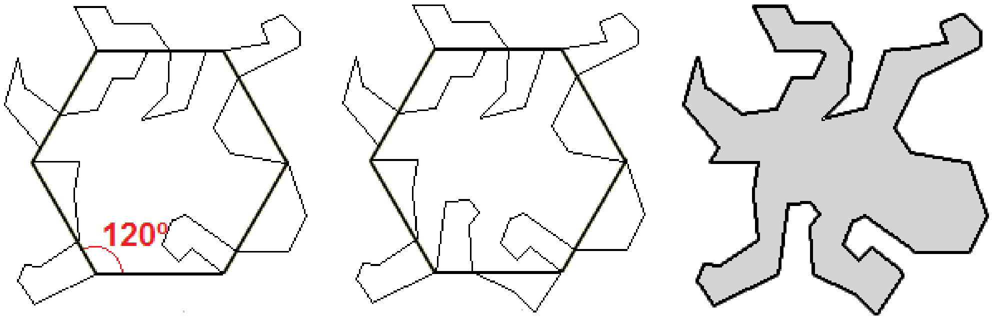
En primer lloc es fa el primer patró en un dels costats: un que va cap al exterior, i l'altre cap a l'interior del polígon. Un cop obtingut el primer patró en un dels costats de l'hexàgon, cal traslladar-lo al costat contigu mitjançant una rotació de 120º (que és l'angle entre els dos costats) tal com es mostra a la imatge de a continuació.

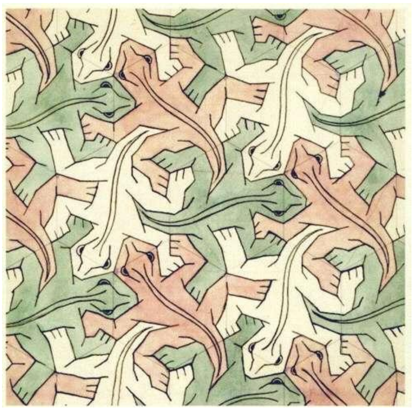


A continuació es fa el mateix procés, però en un altre costat. Es dibuixa una forma que s'endinsi al hexàgon i una altra que surti d'aquest. Sempre haurà de ser una part endinsada al costat d'una altre exterioritzada al polígon. En aquest cas es fa el mateix procés que al principi després de dibuixar el patró, es rota 120º per tal de traslladar-lo al costat contigu.



Finalment, per completar els dos últims costats es repeteix el mateix procés: es dissenya el patró en un costat i es gira 120º per traslladar-lo al costat final. Així s'aconsegueix la figura tessel·lada final que, en aquest cas, és un llangardaix que encaixarà perfectament quan posem un al costat de l'altre i ompliran el pla sense deixar cap espai.





Imatge 24: Tessel·lat *Llangardaixos* d'Escher.

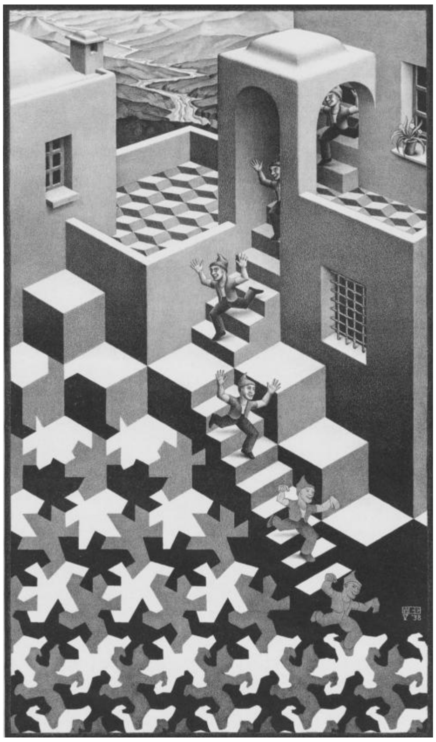
El tessel·lat dels llangardaixos és un dels més coneguts de l'artista, ja que li va donar gran protagonisme amb l'obra *Rèptils*, un cicle en el qual els llangardaixos sortien del paper i tomaven una forma tridimensional. Aquesta obra la veurem més endavant amb més deteniment, ja que és una de les més importants d'Escher.

4.1.4 Metamorfosis i cicles.

A part dels mosaics que hem vist a l'apartat anterior, també va aplicar aquesta tècnica de partició del pla en unes formes especials de dividir aquest: les metamorfosis i els cicles. Les metamorfosis són particions del pla en las que la tessel·lació comença amb una figura i es va transformant per convertir-se en una altre totalment diferent o igual a l'inicial, però passant per diferents formes tessel·lades. Això sí, sempre sense deixar de cobrir el pla en la seva totalitat. Dins d'aquestes categories gaire bé sempre trobarem una dualitat entre la foscor i la llum, el dia i la nit i el blanc i el negre.

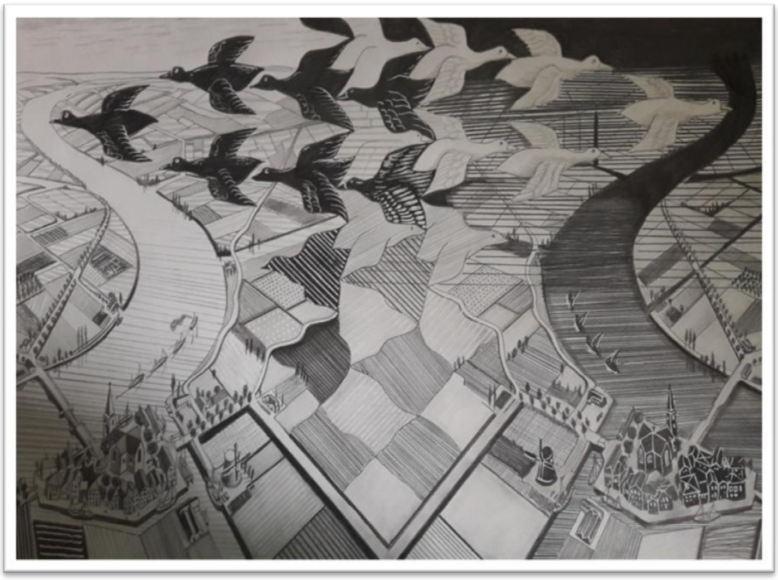
L'obra *Alliberació* mostra molt bé com és una metamorfosis escheriana. Dins d'un pergamí doblegat es troba una tessel·lació de triangles equilàters que, poc a poc, van deformant-se a cada nivell fins tenir la forma d'ocells de color blanc i negre. Finalment, aquests ocells surten del paper i de la seva bidimensionalitat per ser lliures al món tridimensional. També l'obra *Cicle* (nom contradictori respecte a la seva condició de metamorfosis), que ens mostra com a partir d'una tessel·lació de figures humanes que omplen l'espai es van formant figures d'aspecte tridimensional com són els cubs que formen part de l'edifici i aporten la sensació de profunditat. També podem observar com de la part de dalt d'aquest edifici surten uns homes que van baixant unes escales i van deformant-se i desdibuixant-se per inserir-se dins d'un pla. Passen de ser figures tridimensionals a bidimensionals. Aquesta és una de les constants a l'obra d'Escher, la transformació (metamorfosi) de figures i la conjugació de bidimensionalitat y tridimensionalitat.

Imatge 25: Obra *Alliberació* d'Escher. 1955.



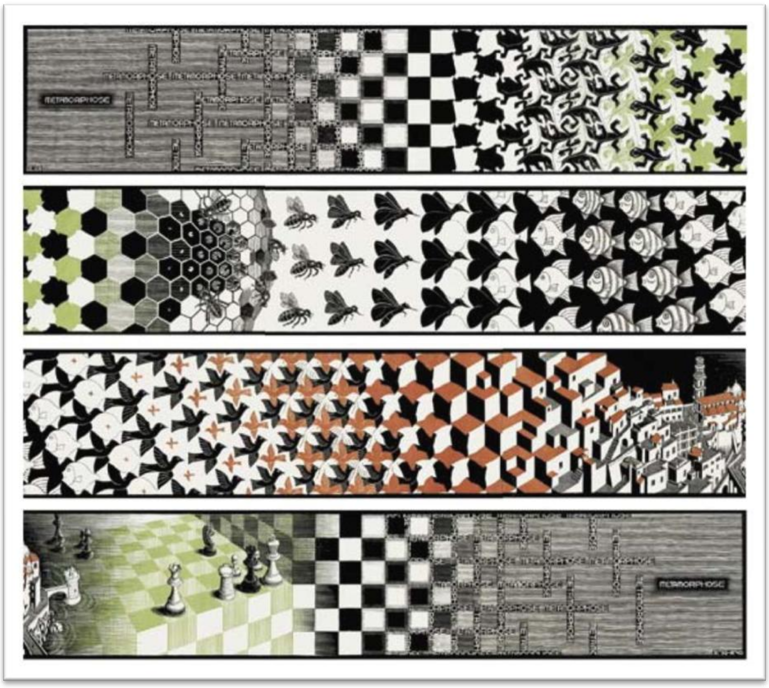
Imatge 26: Obra *Cicle* d'Escher. 1938.

Una de les obres més admirades i reproduïdes d'Escher que forma part d'aquesta categoria és *Dia i nit*. En aquest gravat trobem successives transformacions i simetries. A l'esquerra trobem un paisatge amb una petita ciutat amb camps de conreu i un gran riu que es perd per l'horitzó i, tot això, es transforma en el seu reflex per la nit a la zona dreta, on trobem exactament el mateix lloc, simètric, un de dia i l'altre de nit. Si ens fixem en la part central podem veure com els camps de cultiu que es troben al mig del gravat es van transformant en ocells que volen: els negres cap a la llum del dia i els blancs cap a la foscor de la nit en direccions totalment oposades, omplint el pla sense deixar vuits. Aquests ocells són el punt de transició entre una ciutat i l'altre. Un munt de dualitats entre el blanc del dia i la foscor de la nit que encaixen a la perfecció en un mateix gravat.



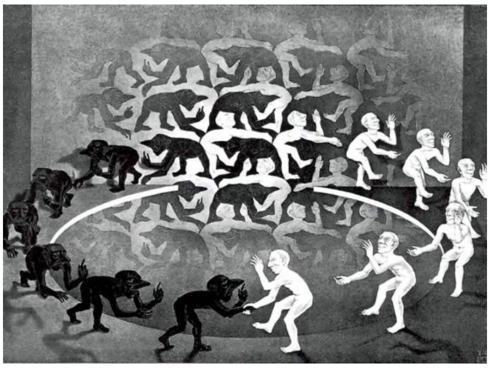
Imatge 27: Recreació de l'obra *Dia i Nit* d'Escher. 1938.

A l'obra *Metamorphosis III*, amb una mida de gairebé quatre metres de llarg i vint centímetres d'alçada, trobem un munt de transformacions i tessel·lacions, que comencen i acaben amb quadrats. En aquest procés passa per gairebé 10 tessel·lacions diferents: de quadrats a llangardaixos, de llangardaixos a hexàgons que es transformen en un rusc del qual surten abelles que es transformen en una tessel·lació entre ocells i peixos; aquests ocells formaran cubs que són part d'una ciutat italiana amb una torre, la qual farà de peça d'un tauler d'escacs que, finalment, es transformarà en el mateix que era al principi: una partició del pla en quadrats. Aquesta obra mostra la flexibilitat que presenta aquesta tècnica per crear infinitat de figures, a banda del gran domini d'Escher per fer-les.



Imatge 28: Obra *Metamorfosis III d'Escher. 1940.*

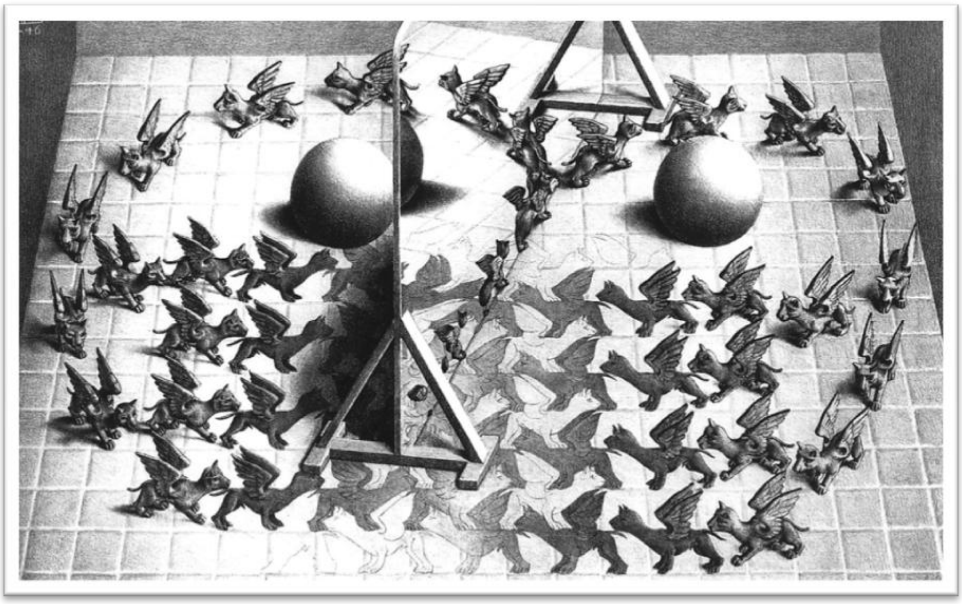
Els cicles són com metamorfosis en les que el final i el inici del procés coincideixen i es tanca, d'aquí el seu nom. En aquest apartat gairebé sempre es passa d'una figura bidimensional que és formada per un tessel·lat a una de tridimensional que surt del pla. Per exemplificar, a l'obra *Trobada* veiem com d'una paret on hi ha una tessel·lació amb formes humanes surten i s'estrenyen la mà al trobar-se unes amb les altres.



Imatge 29: Obra *Trobada* d'Escher.

Amb l'obra *Mirall Màgic* comença a jugar amb les paradoxes que posteriorment desenvoluparà amb l'ús de figures impossibles i altres objectes matemàtics que veurem més endavant. Aquest gravat està dividit en dues parts separades per un gran mirall. Fixem-nos en el griu (lleó amb ales) que a l'arribar al final del mirall va cap a la dreta i el seu reflex en el mirall cap a l'esquerre. Aquest reflex sembla tan real que arriba apareixent per darrera del mirall. Així doncs, trobem grius en les dues direccions i que es dupliquen quan tornen en sentit cap al mirall, però no arriben a aquest, ja que es transformen en una tessel·lació del que neixen els grius blancs que formen part del terra enrajolat

Imatge 30: Tessel·lació de grius que apareix en l'obra mirall màgic d'Escher.



Imatge 31: Obra *Mirall Màgic d'Escher. 1946.*

Com ja s'ha fet menció abans, la tessel·lació dels llangardaixos és una de les més conegudes d'Escher, ja que va ser la base de l'obra *Rèptils.* En aquest gravat podem veure representada la llibreta d'esbossos de l'autor que està oberta en una de les pàgines on trobem el tessel·lat hexagonal dels llangardaixos del que sorgeixen veritables llangardaixos que gaudiran de un curt cicle de vida tridimensional. El llangardaix comença a sortir del pla i caminar per la llibreta de tessel·lacions, puja cap un llibre de zoologia i es dirigeix a pujar per un cartabó que el portarà cap un dodecaedre platònic, que és el punt més alt al que arriba. Aleshores, després d'un panteix al cim del dodecaedre, es disposa a baixar i tancar el cicle per tornar al paper del qual va sortir.

Com moltes de les obres d'Escher, pot tenir moltes interpretacions. Una d'elles és que el llangardaix simbolitza l'home i l'evolució del seu coneixement. El coneixement es fonamenta en una base (dues dimensions) i passa pel coneixement de la ciència, les matemàtiques i la geometria com a cim (tres dimensions).

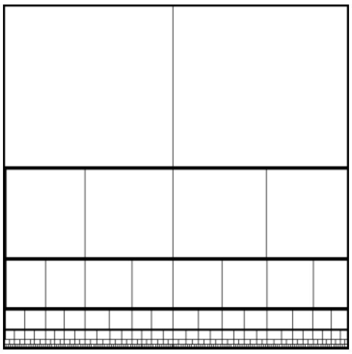
Imatge 32: Recreació de l'obra *Rèptils* d'Escher. 1943.

4.2 APROXIMACIONS A L'INFINIT

A part de la partició regular del pla un altre gran objectiu de l'artista va ser treballar amb l'infinit i poder representar aquest concepte a la seva obra. Segons ell, amb la partició regular d'una superfície no s'obté exactament l'idea d'infinit, però si un fragment de ell, ja que si la superfície fos infinitament gran (impossible a la nostra realitat) necessitaríem infinites parts per cobrir aquest pla completament. Escher comença a fer intents de representar l'infinit, utilitzant els seus anteriors treballs tessel·lats i, poc a poc, anirà introduint objectes com la cinta de Moebius, espirals i figures impossibles.

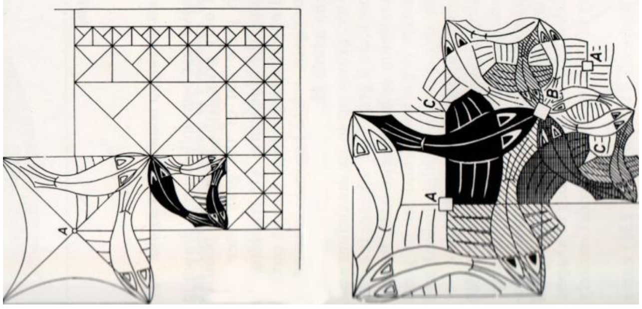
4.2.1 Límit quadrat i espirals.

Es coneix com límit quadrat el desglossament del pla mitjançant figures que encaixen i van disminuint de mida, donant la impressió de que hi han un número infinit de figures. El mètode utilitzat per Escher per encaixar un número infinit de figures en una superfície finita consistia en dividir aquesta en figures on l'àrea cada vegada sigui més petita, seguint la progressió geomètrica de raó un mig: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$..., tal que si suméssim cadascuna de les parts ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$...) sigui igual a 1. A la **imatge 33** veiem com el quadrat original es va dividint en quadrats cada vegada més petits. Escher va representar això a l'obra *Límit quadrat*, on trobem una tessel·lació de peixos de diferents colors que omplen el pla i a mida que s'apropen a les vores del quadrat, es fan més petits seguint la regla mencionada abans. Com es pot veure, a les vores del quadrat gairebé els peixos són tant petits que la seva forma no és distintiva. A la **imatge 35** veiem un esbós de *Límit quadrat* en el que Escher utilitza quadrats dividits en triangles per formar els peixos de diferents mides que omplin el pla sense deixar espais.



Imatge 33: Representació del límit quadrat.

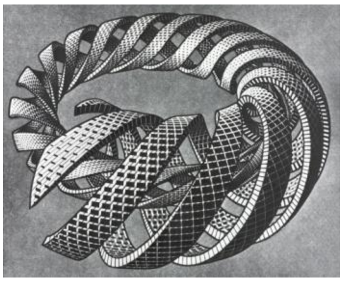
Imatge 34: Obra *Límit quadrat* d'Escher 1964

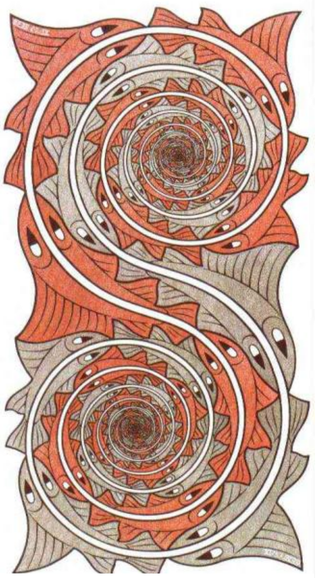

Imatge 35: Esbós de *Límit quadrat* d'Escher.

Escher va desenvolupar aquesta tècnica també als cercles, inspirant-se en el llibre del matemàtic Coxeter *Introducció a la geometria*. Així van aparèixer els anomenats 'límits circulars' on utilitza línees corbes que donen volum al gravat i donant la sensació de que el dibuix continua encara que nosaltres no el veiem. L'obra de la **imatge 36**, anomenada *Límit circular III* va ser anomenada com la perfecció matemàtica pel mateix Coxeter.


Imatge 36: Obra *Límit Circular III* d'Escher.

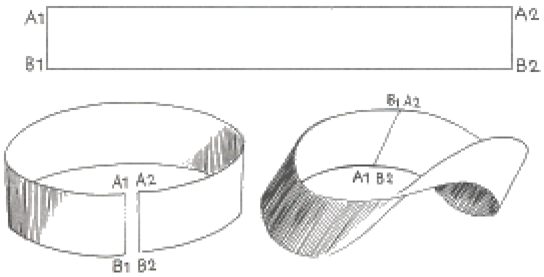
Altre tipus de disseny que va utilitzar Escher per representar l'infinit van ser les espirals. A l'obra *Remolí* es mostra una transformació continua de dos tipus de peixos (grisos i taronges), que formen una tessel·lació en forma d'espiral. Aquests peixos comencen en una espiral i van creixent i desenvolupant-se, fins que en un moment comencen novament a disminuir fins acabar tal i com van començar. També trobem la mateixa tècnica a l'obra *Espiral,* on es veu una espiral formada per quatre bandes enrotllant-se formant un tub que cada cop es va comprimint més i, finalment, la mateixa espiral s'endinsa dins de ella mateixa. En resum, és una espiral formada per 4 bandes d'espirals, és a dir, una metaespiral.


Imatge 37: Obra *Espiral* d'Escher.


Imatge 38: Obra *Remolí* d'Escher.

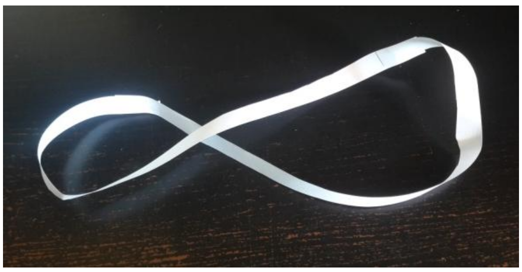
4.2.2 Dissenys basats en la cinta de Moebius.

La cinta de Moebius va ser un dels objectes matemàtics que van inspirar a Escher per expressar l'idea de l'infinit. Si agafem una cinta i enganxem els extrems s'obté un cilindre que té dues cares i dues vores, però si fem el mateix i abans d'enganxar els extrems fem un gir de 180º en un d'ells s'obté la cinta de Moebius.



Aquesta cinta té un seguit de propietats que ha fet que molts matemàtics s'interessin pel seu estudi:

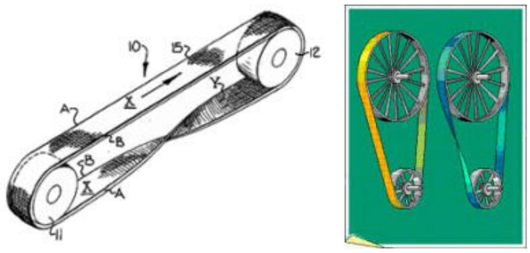
- <u>Té una sola cara:</u> si comencem a pintar una de las cares de la cinta sense aixecar el braç veurem que a l'acabar tota la cinta complerta estarà pintada.
- <u>Només té una vora:</u> Si resseguim la vora amb el dit, veurem com tornem al punt de partida havent passat per tota la vora de la cinta.
- <u>No és orientable:</u> és a dir, no té un sentit. Si dibuixem una fletxa cap a una direcció en la cinta, la movem per l'única cara d'aquesta i tornem al punt de partida, la fletxa haurà canviat de sentit.
- Si tallem per la meitat una cinta de Moebius al llarg, obtindrem una única cinta cilíndrica (és a dir, amb dues cares) i amb la meitat d'amplada (**imatge 39**). Ara bé, si la tallem per la tercera part, el resultat serà una cinta de Moebius igual de llarga que l'anterior, però amb un terç d'amplada i una cinta cilíndrica el doble de llarga i amb la mateixa amplada, i, a més, entrellaçades (**Imatge 40**).



Imatge 39: Cinta de Möbius tallada per la meitat.

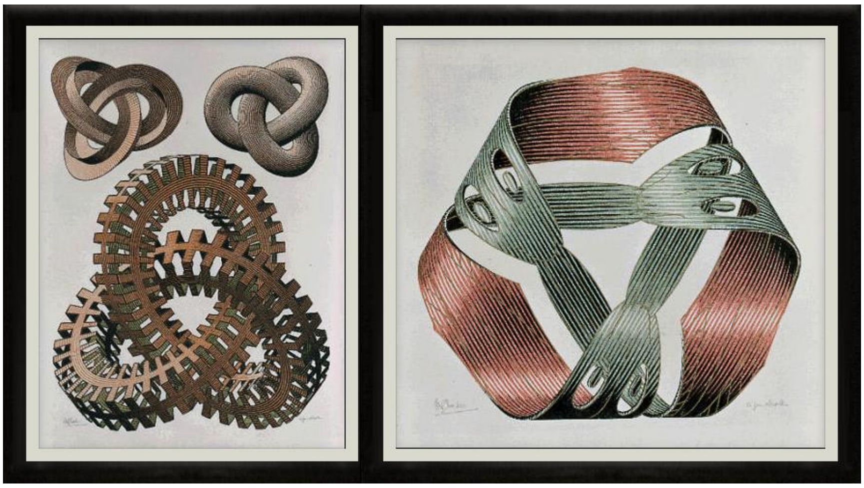
Imatge 40: Cinta de Möbius tallada a un terç.

Gràcies a aquestes propietats s'ha fet ús de ella en ciència i enginyeria. Per exemple, en les cintes de gravació permet gravar el doble que una cinta cilíndrica i, en qualsevol cinta de transport, si aquesta fos cilíndrica sempre es malgastaria la mateixa cara i l'altre no, en canvi, utilitzant la cinta de Moebius aconseguim que es desgasti igual la única cara que té i per tant pot durar més.



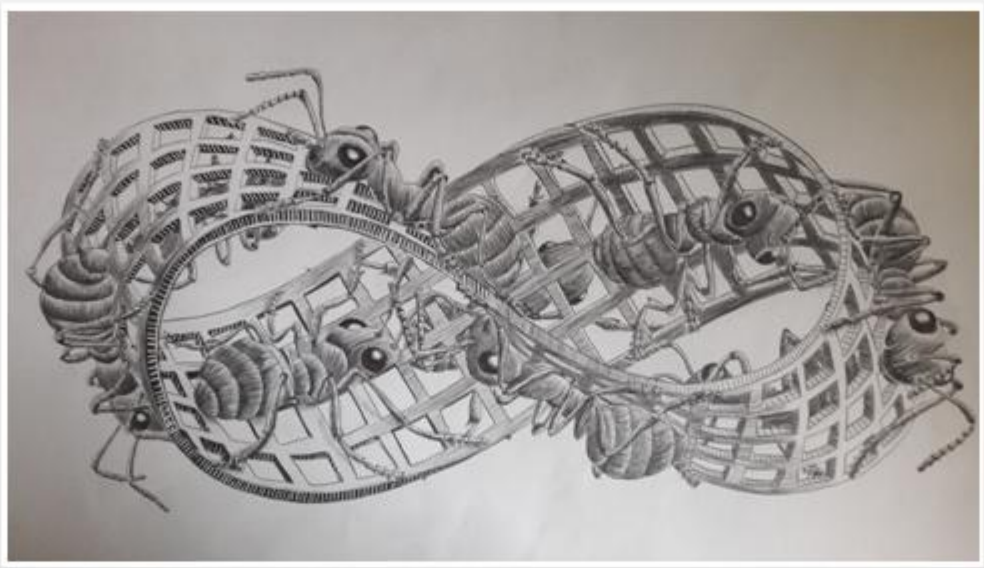
Imatge 41: Usos de la cinta en enginyeria.

La primera de les obres en la que Escher va fer ús de la cinta de Moebius va ser *Genets*, on combina tant la cinta com una tessel·lació d'homes muntant a cavall i que uneixen un costat de la cinta amb l'altre. També trobem els gravats *Nusos* i *Cinta de Möbius I*, en les quals també fa ús de la cinta de Moebius, però tallant-la per la meitat longitudinalment o més enrevessada.



Imatge 42: Obres *Nusos* i *Cinta de Moëbius I* d'Escher. 1961 i 1965.

Per últim en aquest apartat, trobem el gravat *Cinta de Möbius II*, el gravat més reconegut en els que fa ús de la cinta. En aquesta obra es veu un grup de nou formigues que es desplacen per un camí que és sempre el mateix, ja que la superfície que recorren té només una sola cara. Les formigues no aniran a parar en lloc es moguin tant com es moguin.



Imatge 43: Recreació de l'obra *Cinta de Moebius II* d'Escher. 1893.

4.2.3 Mons impossibles.

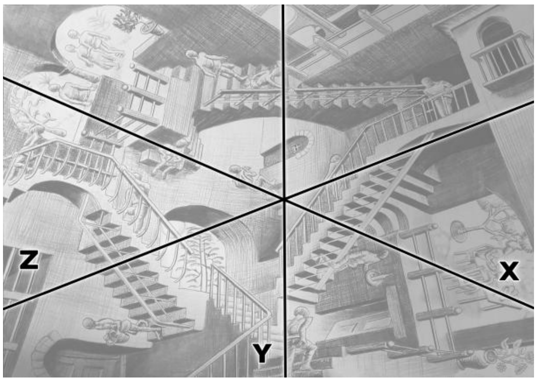
Escher, ja deixant de banda les tessel·lacions i la partició regular del pla, va començar a fer gravats plasmant la realitat. En aquestes obres no plasmava la realitat tal qual, sinó que jugava amb les lleis de la física creant el que es coneixen com a mons impossibles i que posteriorment va desenvolupar més gràcies a las figures impossibles. Veurem com l'artista en aquest apartat juga amb conceptes antagònics com dins i fora, amunt i avall, còncau i convex, etc.

El primer gravat que podem classificar en aquesta categoria és *Relativitat,* que és tan conegut i peculiar que s'ha utilitzat en diferents escenes de pel·lícules tals com *Laberint* de Jim Henson o *Nightmare on Elm Street* de Stephen Hopkins*.*

Imatge 44: Recreació de l'obra *Relativitat* d'Escher. 1953.

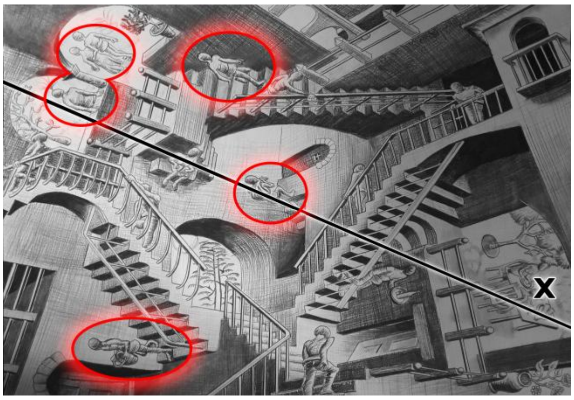
La impossibilitat d'aquest gravat no és la construcció d'un edifici amb tres escales, ja que al món real es podria construir, sinó que ve donada per la força de la gravetat. Hi ha fins a tres gravetats diferents dins d'un mateix espai i que actuen alhora. Als diferents éssers del gravat els afecta una de les tres forces de la gravetat, i és això el que provoca la sensació d'impossibilitat, ja que totes les parts d'aquest espai es mesclen: amunt i avall i el front i els laterals.

El nom de l'obra podria venir de la teoria de la relativitat d'Einstein (1905), que diu que las lleis de la física canvien segons el sistema de referència i que no hi ha un sistema de referència absolut. Té sentit, ja que en el gravat podem trobar fins a tres sistemes de referència i, agafem el que agafem, tindria sentit en si mateix, però no tots tres junts o ni tant sols dos d'ells. Com podrem veure a continuació, les diferents acceleracions gravitatòries actuen segons un dels tres eixos cartesians (X, Y i Z) a les diferents persones del gravat.

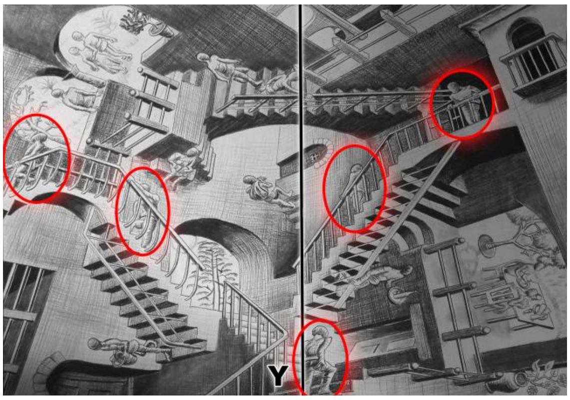


Imatge 45: *Relativitat* sota els eixos cartesians.

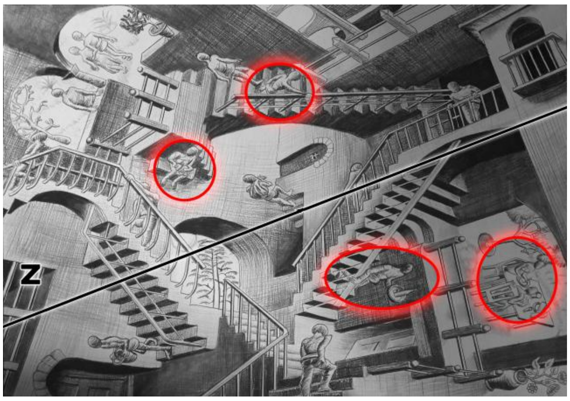
La gravetat sobre l'eix X actua sobre sis persones, al Y sobre cinc i al Z sobre altres cinc, tal com podem veure a les imatges de a continuació:



Imatge 46: Gravetat sobre l'eix **X**



Imatge 47: Gravetat sobre l'eix **Y**

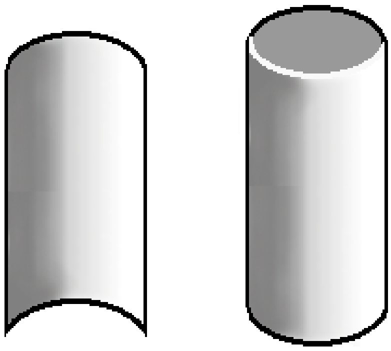


Imatge 48: Gravetat sobre l'eix **Z**

Una altra litografia que representa un món impossible és *Concau i convex* i, com bé diu el nom, presenta un espai en el que apareixen figures còncaves que també poden ser convexes segons es miri. Aquesta dualitat sorgeix amb les diferentes escales, les finestres i, sobretot, les columnes que tenen una ambigüetat geomètrica que no permet diferenciar si són còncaves o convexes. La concavitat i convexitat són dos conceptes geomètrics que mesuren la corvatura d'una superfície. A simple vista no sembla que hi hagi cap contrarietat en el gravat, però no cal més que fixar-s'hi una estona i tot comença a desquadrar.

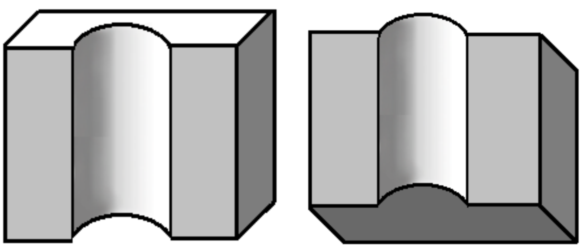
Imatge 49: Recreació de l'Obra *Còncau i convex* d'Escher. 1855.

Segons el context de la columna semblarà còncava o convexa. A la **imatge 51** veiem que si s'observa des d'una perspectiva alta la columna sembla còncava i s'enfonsa en la paret, en canvi, si l'observem per sota, és convexa.



Imatge 50: Columna fora de context de l'obra *Concau i Convex* i columna normal.

Si li donem un gir de 180º al dibuix sencer veurem com el terra serveix de sostre, el còncau es torna convex i tot té un sentit diferent. Aquest gravat està dividit en dos parts, un que és convex (l'esquerra) i un còncau (la dreta) i, el punt d'inflexió, és la columna central. Cadascuna de les parts es veu des d'una perspectiva diferent (amunt o avall). A l'esquerra l'estem veient per dalt i a la dreta per sota.

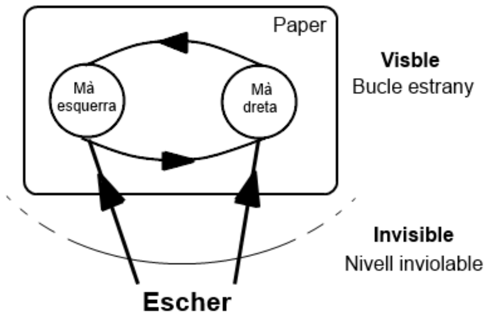


Imatge 51: Mateixa columna amb perspectives diferents.

A la part dreta, el sostre (la part més fosca del gravat) correspón al terra de la part esquerra. Si dividim el gravat en dos parts com hem fet, perd la impossiblitat en la part esquerra. La part dreta segueix tenint elements sense sentit que es podrien resoldre girant aquesta part 180º, encara que les persones estarien boca abaix.

Imatge 52: *Còncau i Convex* dividit en part esquerra i part dreta (girada) respectivament.

Imatge 53: Recreació de l'*Obra Mans dibuixant* d'Escher.



Imatge 54: Diagrama de *Mans dibuixant* d'Escher: la paradoxa i la seva resolució.

Front els mons impossibles, Escher segueix contraposant la realitat bidimensional i tridimensional, tal com va fer a l'obra *Rèptils*. En el gravat *Mans Dibuixants* podem veure novament aquest conflicte: dues mans sorgeixen de la bidimensionalitat del pla a la realitat tridimensional. Cada mà s'encarrega de dibuixar a l'altra fent que una no pugui existir sense l'altra. L'interessant és que cap de las mans és real, és a dir, no són tridimensionals ni dibuixen res: no existeixen. Són part d'un dibuix creat per una altra mà, la d'Escher. Aquesta obra presenta el que s'anomena com 'Bucle estrany', que és una jerarquització de nivells on aquests estan relacionats entre ells i un no és més que l'altre. A més, aquests nivells estan relacionats de tal manera que si et desplaces a traves d'ells, arribes al mateix punt on comences. Això és el que passa amb les mans, una dibuixa a l'altra i aquesta dibuixa la que està dibuixant.

Imatge 55: Recreació de l'Obra *Drac* d'Escher. 1952.

Una altra obra en la que trobem la dualitat entre bidimensionalitat i tridimensionalitat és *Drac*. Aquí, podem veure com un drac d'aspecte bidimensional passa el seu cap i la cua per dos forats en forma de cub per tal de complir el seu desig: ser una figura tridimensional. En aquest apartat trobem també l'obra *Tres mons* on, com bé diu el títol del gravat, podem veure tres espais diferents en un mateix lloc: l'aigua d'un llac amb fulles flotant, el reflex dels arbres propers i l'interior del llac on hi habita una carpa.

4.3.4 Dissenys basats en figures impossibles.

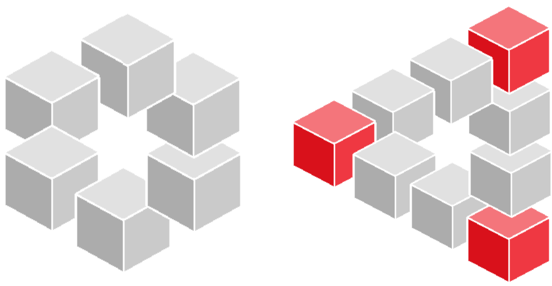
Les figures impossibles són un conjunt d'objectes imaginaris que només es poden representar mitjançant un dibuix, ja que són impossibles de construir a l'espai. Quan els veiem al paper semblen un objecte tridimensional, però és una il·lusió, ja que en realitat és una figura plana únicament construïble en una superfície bidimensional com és el paper. Escher va fer ús d'aquestes figures impossibles a la seva obra mostrant, novament, una contraposició entre l'espai bidimensional i el tridimensional i, com veurem a continuació, situacions en les que sembla haver un moviment infinit.

Cascada

L'obra *Cascada* és una de les obres paradoxals més reconegudes d'Escher. A simple vista, sembla un paisatge d'una petita ciutat amb un molí d'aigua. La impossibilitat del gravat prové de la trajectòria de l'aigua ja que, si la seguim, veiem com aquesta comença al molí, recorre tot l'aqüeducte i arriba al punt més alt, on cau com una cascada al mateix punt on va començar.

Imatge 56: Recreació de *Cascada* d'Escher. 1961.

Així doncs, com és possible aquest efecte d'impossibilitat? Doncs ho és gràcies a una figura impossible, anomenada triangle de Penrose o tribar. L'origen d'aquesta figura prové de l'artista Oscar Reutersvard qui, avorrit en les classes, va començar a fer estels tancats en cubs. En un dels seus intents en el que va utilitzar 6 cubs, es va adonar que havia creat una figura estranya. Li va afegir tres nous cubs a les cantonades, formant un triangle. Un triangle impossible que posteriorment va ser popularitzat pel matemàtic Roger Penrose.

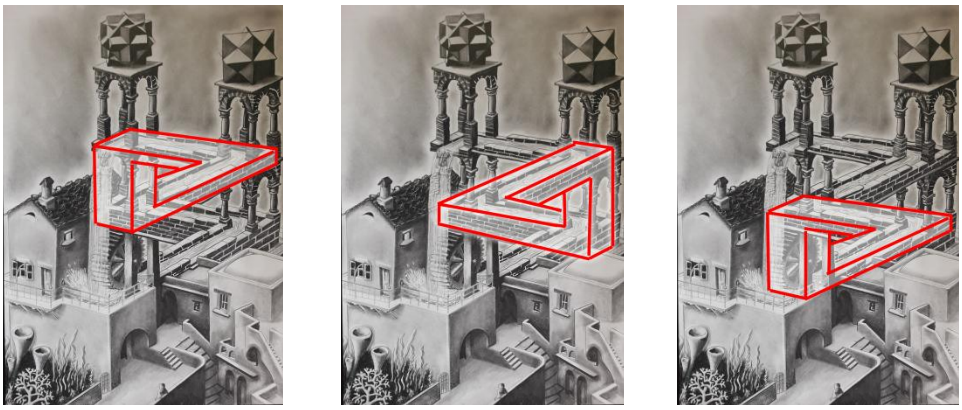


Imatge 57: Tribar format a partir de nou cubs.

Aquest triangle és impossible de crear a la realitat tridimensional i per tant és solament possible com a dibuix.

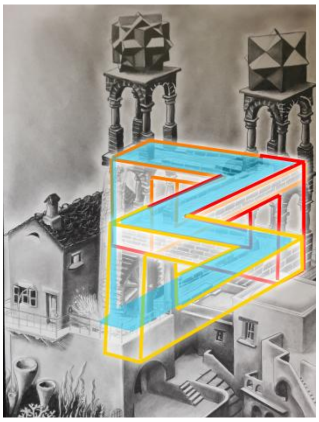
Com hem dit abans, la cascada creada per Escher és possible gràcies a aquest triangle. Hi apareix tres vegades compartint costats comuns. Igual que el triangle, la cascada d'Escher és únicament construïble en el pla.

Imatge 58: Triangle de Penrose.



Imatge 59: Diferents triangles de Penrose que es troben a la cascada.

Els triangles amagats a la litografia estan formats amb les diferents vies de l'aqüeducte i les columnes que donen suport a aquestes. El segon triangle té costats comuns amb el primer i el tercer, de forma que els uneix. Si posem tots tres triangles en la mateixa imatge podem veure com el recorregut de l'aigua (representada de color blau) correspon a la figura obtinguda.



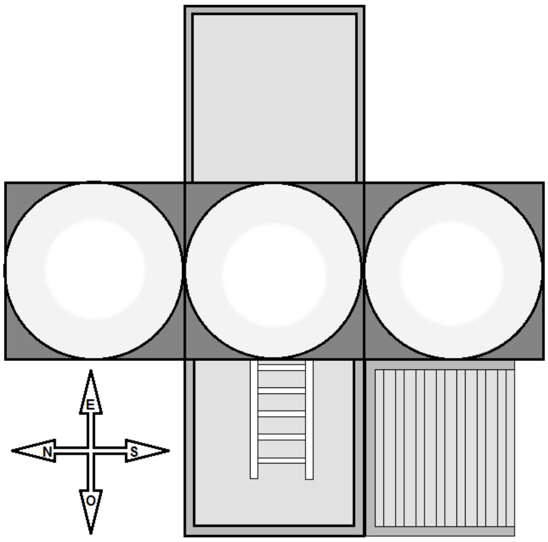
Imatge 60: Els tres triangles de Penrose de *La Cascada* i el recorregut de l'aigua.

Belvedere

Belvedere és dels altres gravats més coneguts d'Escher gràcies a la paradoxa que té amagada. A simple vista sembla un edifici normal de tres plantes, però només cal fixar-se una mica per trobar les incoherències. L'escala per la que hi pugen dues persones té la base al terra de la segona planta (al seu interior), però la part superior es recolza en la paret exterior de la tercera planta: com és possible que estigui a l'interior i es recolzi a l'exterior?

Imatge 61: Recreació de *Belvedere* d'Escher. 1958.

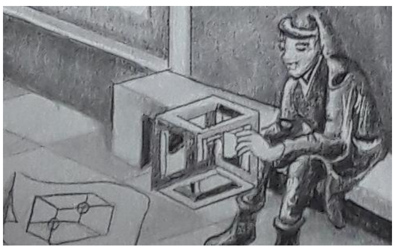
El motiu és que té les plantes orientades de diferentes maneres. A la **imatge 62**, podem veure com seria l'edifici Belvedere creat per Escher des d'amunt: el pis més alt està orientat de nord a sud (horitzontalment, segons la figura) i, el segon i el primer, estan orientats d'est a oest (verticalment).



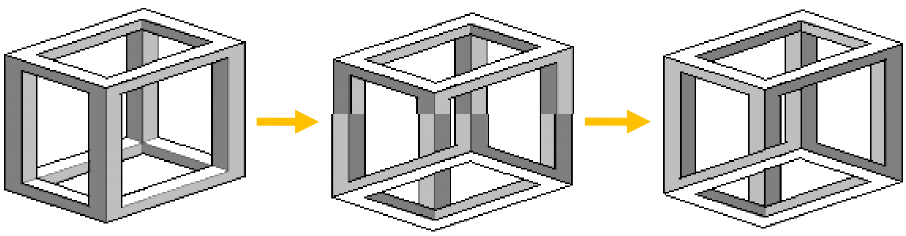
Imatge 62: *Belvedere* des dalt.

El que Escher va fer per construir aquest edifici paradoxal va ser enllaçar la segona i la tercera planta mitjançant columnes que no són corresponents i que, si tenen la base a l'exterior de l'edifici, a la planta superior estaran a l'interior d'aquest. A partir d'un edifici real, Escher li va aplicar un gir horitzontal a la planta superior per tal de que quedi orientada inversament a les dues primeres. Podem comprovar-ho aplicant-hi el gir (**Imatge 63**), tot i que les ombres de les columnes, el paisatge i les escales no queden correctes, però ara les tres plantes estan ben orientades i les columnes són corresponents tan a dalt com a baix.


Imatge 63: *Belvedere* amb l'orientació correcte.

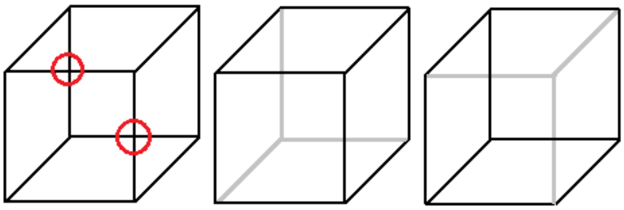

Imatge 64: Cub impossible de B*elvedere*.

L'edifici no és l'única impossibilitat que podem trobar a l'obra. A la part inferior de l'edifici trobem una persona asseguda en un banc sostenint un cub, un cub impossible. Aquest cub és el que va inspirar a Escher a crear l'edifici, perquè està creat a partir d'un cub real del que s'ha invertit la part superior i s'ha substituït la inferior (de la mateixa manera que l'edifici) segons la següent imatge:



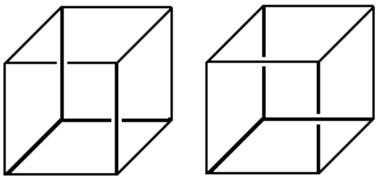
Per fer-ho, cal copiar la part superior del cub i girar-la 180º. Un cop girada, s'enganxa a la part superior normal i es corregeixen les ombres que han quedat invertides.

Aquest cub va aparèixer gràcies a una figura geomètrica trobada per Louis Necker, anomenada, al seu honor, cub de Necker. Aquest cub és una figura creada a partir de línees on en les interseccions entre aquestes no es defineix quina va davant i quina darrere, cosa que fa que el puguem interpretar de quatre maneres.



Imatge 65: Cub de Necker i la seva ambigüitat d'interpretacions.

D'aquestes quadre, dues les coneixem, ja que són habituals (**Imatge 65**), però les altres dues són cubs impossibles a la nostra realitat ja que s'alternen les dues interaccions entre les arestes tal com mostra la **Imatge 66**. Un d'aquests cubs és el que va posar Escher a les mans d'aquell home en *Belvedere*.



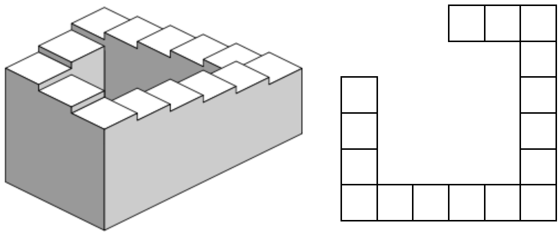
Imatge 66: Cubs de Necker.

Pujant i baixant

En aquesta litografia es veu un edifici aparentment normal amb una escala a la part superior amb uns monjos. Aquesta escala mai acaba, està tancada en ella mateixa i cada esglaó está més elevat que l'anterior i així de forma cíclica. Sempre està pujant o si la veiem en sentit contrari, sempre baixant. Els monjos que es troben en ella sempre estan baixant o pujant depenent del sentit en el que hi vagin.

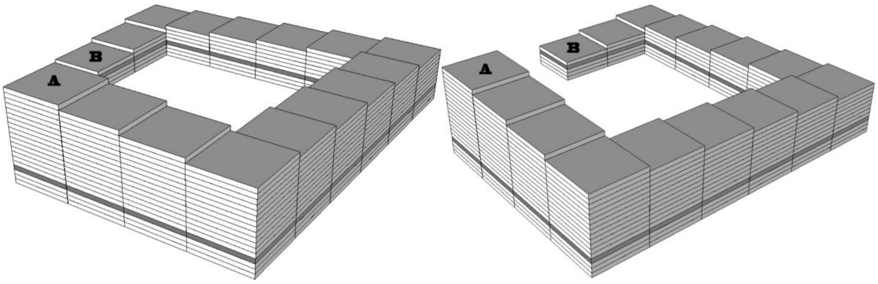
Imatge 67: Recreació de *Pujant i Baixant* d'Escher. 1960.

Aquest efecte visual no és més que gràcies a una figura impossibe: l'escala de Penrose. Aquesta escala és possible gràcies a un engany de la perspectiva, ja que no és una escala tancada. El principi i el final es troben a unes altures diferents (de fins a quinze unitats). Des d'una perspectiva adequada (la que ha utilitzat Escher pel gravat) el primer i l'últim esglaó coincideixen, donant aquesta sensació d'ascens o descens infinit.



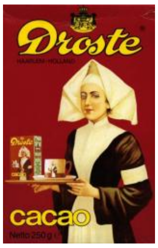
Imatge 68: Escala de Penrose normal i vista des de dalt.

A la **imatge 69** podem veure l'escala de Penrose i el seu hipotètic principi i final. Els punts A i B semblen estar units a la primera imatge, però a la següent, veiem que, canviant una mica la perspectiva, l'escala no és tancada i el punt B es troba separat i a 15 unitats per sota d'A.



Imatge 69: Escala de Penrose des de dues perspectives.

4.2.5 Efecte Droste: *Galeria de Gravats.*



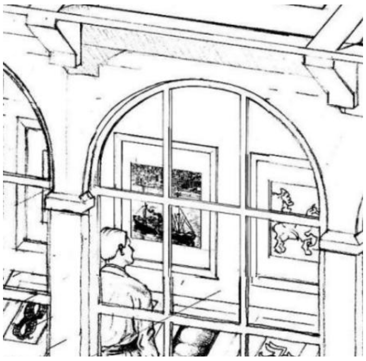
Imatge 70: Anunci del Cacao Droste.

L'efecte Droste és l'efecte que s'obté quan s'utilitza una imatge recursiva, és a dir, una imatge que es conté a sí mateixa i no té fi. L'origen prové d'una marca de cacau holandesa (Droste) que va fer un anunci on una monja surt amb una caixa que la conté a ella subjectant la mateixa caixa on està ella, i així successivament.

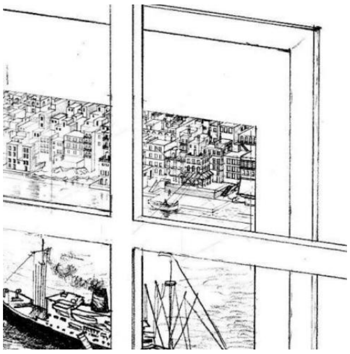
Escher va plasmar aquest efecte en la cèlebre obra *Galeria de Gravats*, on podem veure un noi en una galeria d'art observant un quadre on es troba la

Imatge 71: Recreació de *Galeria de Gravats* d'Escher amb el forat complert. 1956.

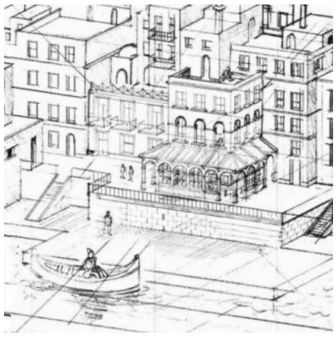
galeria on ell està observant el mateix quadre, i així successivament. Aquest gravat està compost principalment de cinc imatges, dos de les quals són repetides:



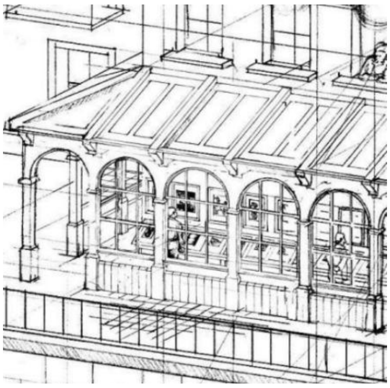
Primera imatge: Un jove es troba a una galeria d'art observant un quadre d'un paisatge d'un port italià.



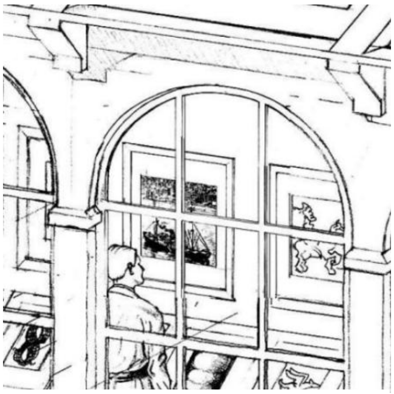
Segona imatge: El jove observa la cantonada superior dreta, als edificis propers del port.



Tercera imatge: El noi observa que al port hi ha la galeria d'art.

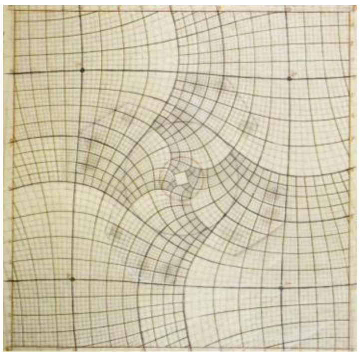


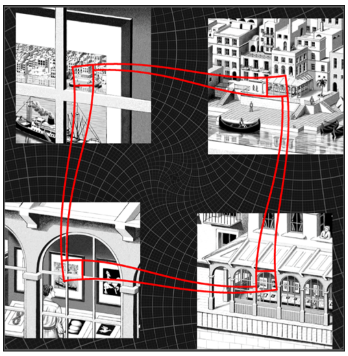
Quarta imatge: Al fixar-se millor, s'adona de que és la mateixa galeria on ell es troba i hi ha un noi observant un quadre.



Cinquena imatge (Igual a la primera): Finalment, es troba amb ell mateix, tot i que ara no és real, forma part d'un gravat.

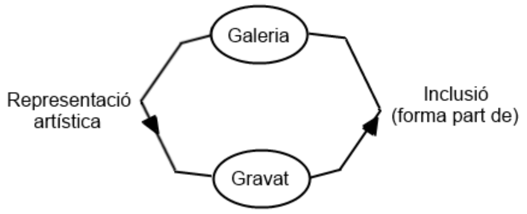
Els escenaris de l'obra es repeteixen infinitament i cada vegada es fan més petits. Escher va deixar un forat al mig del gravat perquè era tot tan petit i detallat que era gairebé impossible omplir-lo. Mitjançant una trama de quadrats distorsionats (**Imatge 72**), va ajuntar els 4 escenaris endinsant un en l'altre, aconseguint el gravat complert i amb una repetició infinita que no va aconseguir completar a causa de la minuciositat del dibuix.





Imatge 72: Trama de quadrats en la que es basa l'obra *Galeria de Gravats*.

Igual que al gravat *Mans Dibuixant*, aquesta obra també constitueix un bucle estrany de dos nivells on un depèn de l'altre, en aquest cas la galeria d'art que es troba a la ciutat i el gravat de dins de la galeria on es representa la ciutat de forma artística.



Imatge 73: Bucle estrany de *Galeria de gravats* d'Escher.

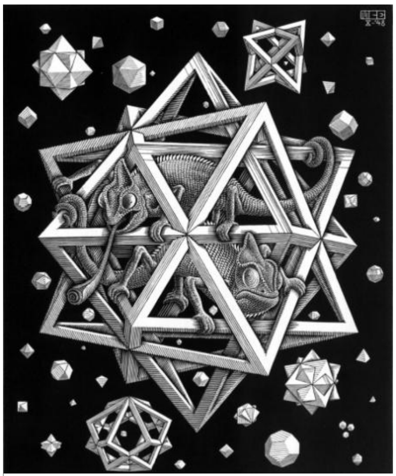
Durant molts anys aquest gravat i el seu forat van ser un enigma, fins que a l'any 2000 un grup de matemàtics va estudiar el gravat i va aconseguir omplir-lo (utilitzant la trama d'Escher) amb l'ajut d'ordinadors i conceptes matemàtics de nivell molt superiors en els que, en aquests moments, no puc entrar.

4.3 ORDRE I CAOS

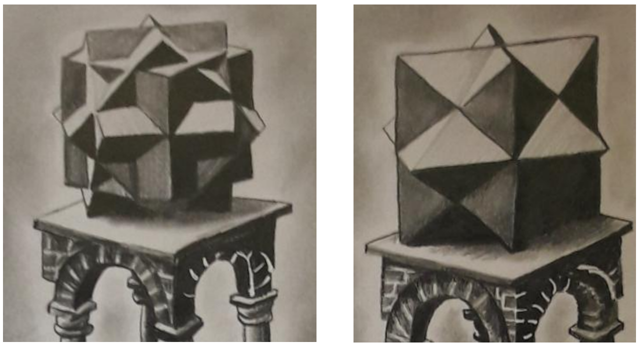
Paral·lelament al conflicte entre tridimensionalitat i bidimensionalitat, Escher confronta aquesta vegada altres dos conceptes oposats: l'ordre i el caos. L'ordre l'expressa utilitzant la geometria, mitjançant poliedres, com per exemple el dodecaedre estrellat de la **Imatge 74**, i que està contraposat al caos que envolta aquest ordre i està simbolitzat per objectes quotidians trencats i gastats.

Imatge 74: Les dues obres d'*Ordre i Caos* d'Escher. 1950.

Aquesta passió pels poliedres la mostra en diverses obres de forma explícita. Apareixen als vèrtexs dels aqüeductes de *La Cascada* o a l'obra *Estels*, on únicament trobem poliedres en un fons negre i dos camaleons tancats en tres octaedres.



Imatge 75: Obra *Estels* d'Escher. 1948.



Imatge 76: Poliedres dels aqüeductes de *Cascada.*

5. Conclusions

L'obra d'Escher està dividida segons els diferents temes que vol reflectir: la partició del pla (tessel·lacions), l'infinit amb el límit quadrat, la banda de Moebius, el tribar de *La Cascada*, l'escala de Penrose de *Pujant i Baixant,* l'efecte Droste i el conflicte entre dues dualitats com l'ordre i el caos, la concavitat i convexitat i la bidimensionalitat i la tridimensionalitat.

Si recordem els dos objectius que m'havia marcat per aquest treball de recerca eren:

1. Analitzar els dibuixos de l'obra d'Escher i identificar quins conceptes matemàtics hi utilitza.

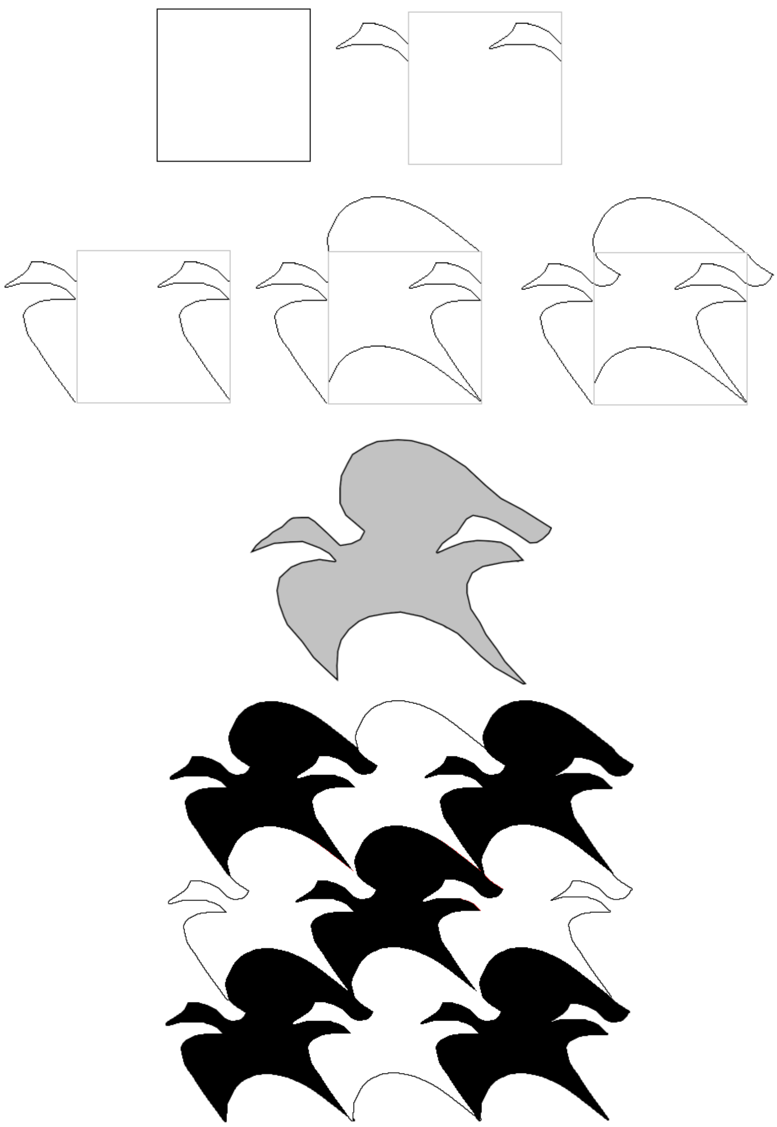
2. Crear una o vàries obres pròpies a partir d'aquesta base matemàtica.

Pel que fa al primer objectiu hem pogut veure com Escher utilitza diversos conceptes matemàtics. El primer que hem vist han sigut les tessel·lacions, on partia de figures geomètriques com quadrats, triangles o hexàgons i utilitzava transformacions isomètriques per aconseguir el seu objectiu d'omplir el pla.

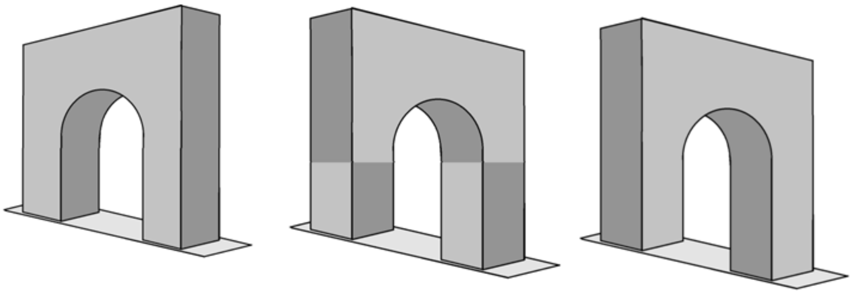
Dins de les transformacions isomètriques (moviment en el pla d'una figura geomètrica sense variar ni la forma ni la seva àrea) utilitza girs i translacions. També utilitza les simetries per jugar amb la dualitat dia i nit, blanc i negre o bidimensionalitat i tridimensionalitat. Així mateix juga amb conceptes com còncau i convex i hi podem trobar diferents tipus de poliedres en diverses obres.

Quan comença a treballar amb l'infinit utilitza el concepte de progressió geomètrica de raó 1/2, la cinta de Moebius i el efecte Droste. A més, trobem diferents figures impossibles, com el triangle de Penrose que li permet crear la seva obra *Cascada*, l'escala de Penrose en *Pujant i baixant* o el cub impossible de *Belvedere*.

Pel que fa al segon objectiu, he creat dues obres. En una he utilitzat una tessel·lació a partir de quadrats per tal de poder orientar el mosaic cap a una direcció i feta amb el procés que utilitzava Escher:



En l'altra obra he utilitzat una figura impossible que prové d'una figura geomètrica normal (un arc) que ha patit un gir de la seva part superior i se li han col·locat les ombres correctament, tal com podem veure a continuació:



La creació d'aquesta figura és similar a la del cub impossible que vam veure a l'obra *Belvedere*, ja que es basen en figures normals a les quals se les ha sotmès un gir a alguna part i s'han col·locat bé las ombres per que coincideixin.

Jo he utilitzat aquesta figura en un monument de Barcelona, l'Arc del triomf, per tal de donar-li la sensació d'impossibilitat desitjada.

6. Bibliografia i webgrafia

Douglas Richard Hofstadter: *Gödel, Escher, Bach: un Eterno y Grácil Bucle*. EEUU, Basic Books, 1979.

-Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_and_art>, <https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher>, <https://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation>, <https://en.wikipedia.org/wiki/Waterfall_(M._C._Escher)>, <https://es.wikipedia.org/wiki/Efecto_Droste>.

-Saem Thales. < http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-02/infi.html>.

-Universitat de València. <http://www.uv.es/~buso/escher/index_es.html>.

-Catedu. < http://www.catedu.es/matematicas_mundo/ARTE/imposibles.htm>, < http://catedu.es/matematicas_mundo/ARTE/durero.htm>.

-Colegio San Saturio. <http://www.colegiosansaturio.com/deptomatesweb/SANSAMATES/Trabajos/Escher/m1.html>.

-Educ.ar. <https://www.educ.ar/sitios/educar/recursos/ver?id=115741>.

-Ilusionario. < http://www.ilusionario.es/FIG_IMPOSIBLES/historia.htm>, <http://ilusionario-blog.blogspot.com.es/2014/01/vida-y-obra-de-escher.html>, <http://www.ilusionario.es/CLASICOS/obr_escher.html>.

-UC Matemàtiques. <http://www.mat.ucm.es/~ccorrale/pdfs/suma49.pdf>.

-ACTA. <http://www.acta.es/>

-Definició de ''isometria'' <https://www.google.es/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=isometria>.

-Definició de ''Relativitat d'Einstein''. <https://www.google.es/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=teoria%20relatividad%20einstein>.

-American Mathematical Society < http://www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf>.

-CNICE. <http://concurso.cnice.mec.es/cnice2006/material105/Escher/escher_2.htm>.

-Universitat politècnica de Catalunya. <https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099.1/21282/88049_Annex%203.pdf?sequence=4&isAllowed=y>.

-Optical Illusions < http://www.opticalillusion.net/optical-illusions/eschers-waterfall-explained/>.

-Epsilones. < http://www.epsilones.com/paginas/artes/artes-103-orden-caos.html>.

-Eheu. < http://www.ehu.eus/~mtwmastm/Arquitectura2008.pdf>.

-Unirioja. <Dialnet-EscherYLasMatematicas-3045283 (10).pdf>.

-ElPaís. <http://verne.elpais.com/verne/2015/07/13/album/1436801897_490586.html>.

-CulturaColectiva. <http://culturacolectiva.com/las-obras-imposibles-de-m-c-escher/>.

-MCEscher. <http://www.mcescher.com/>.

-Biografias i vides. <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/e/escher.htm>.

-Mireiarteymusica. <https://mireiarteymusica.wordpress.com/2013/01/21/durero-y-melancolia/>.