Proporcionalitat

Proporció

La proporció o raó, és la relació constant que tenen dues magnituds homogènies, resultat de la divisió de la primera per la segona o viceversa.

Proporcionalitat

Proporcionalitat directa

Dues magnituds M i N són directament proporcionals quan els diferents valors que prenen tenen sempre la relació següent:

$$\frac{M}{N} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \ldots = \frac{m_n}{n_n} = k$$

on k és la raó geomètrica. Així, **M = k * N**

Proporcionalitat inversa

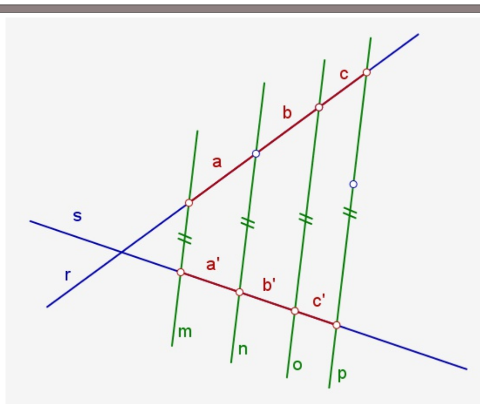
Dues magnituds M i N són inversament proporcionals quan els diferents valors que prenen tenen sempre la relació següent:

$$M * N = m_1 * n_1 = m_2 * n_2 = \ldots = m_n * n_n = k$$

on k és la raó geomètrica. Així, **M = k / N**

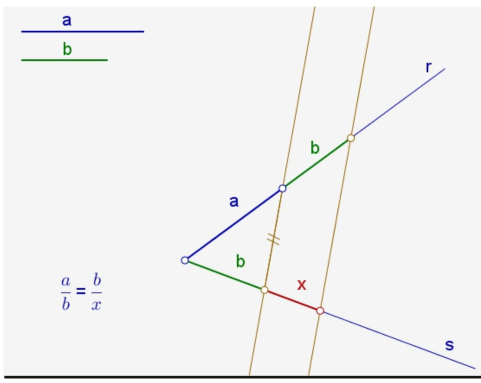
Teorema de Tales

Si tenim dues rectes en el pla, **r** i **s**, i les tallem per diverses rectes paral·leles, **m**, **n**, **o**, **p**,..., els segments homòlegs en que queden dividides aquestes rectes són directament proporcionals.



Tercer proporcional a dos segments

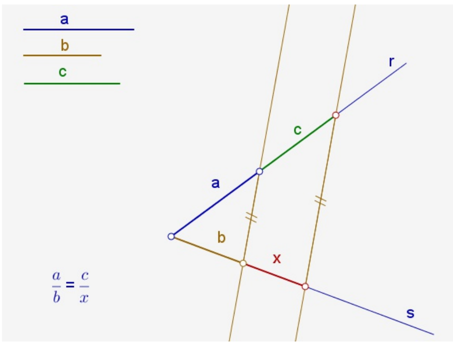
Si coneixem la mesura de dos segments, **a** i **b**, el tercer proporcional d'aquests dos serà el segment **x** que acompleixi la proporció:



Proporcionalitat 1

Quart proporcional a tres segments

Si coneixem tres magnituds, de les quatre que formen una relació de proporcionalitat, es pot determinar la quarta.



El terme quart proporcional és diferent si ordenem de manera diferent els segments a les dues rectes, **r** i **s**, de manera que s'acompleixi:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{x}; \quad \text{o} \quad \frac{c}{a} = \frac{b}{x}$$

Mitjana proporcional de dos segments

Donats dos segments **a** i **b**, a la proporció que s'estableix entre ells

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

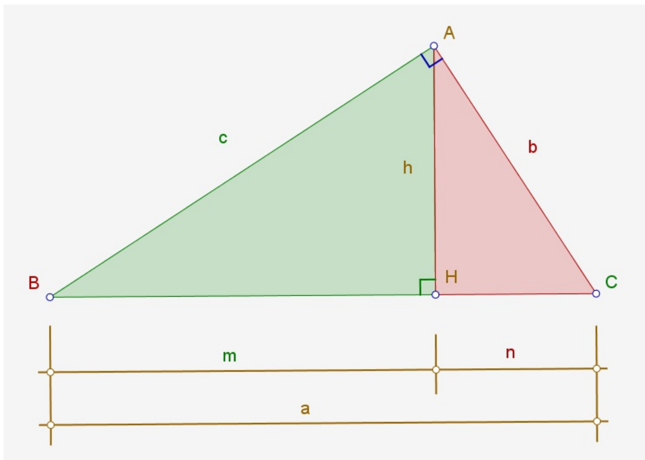
el terme **x** és la mitjana proporcional dels altres dos segments: $\mathbf{x^2 = a * b}$

Aquest terme es pot trobar gràficament mitjançant :

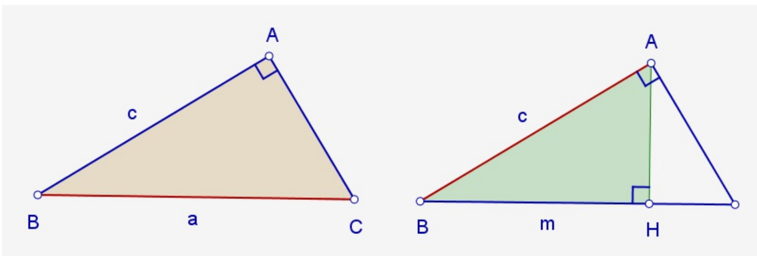
- El teorema del catet
- El teorema de l'altura

Teorema del catet

L'altura **h** divideix el triangle rectangle **BAC** en dos; el triangle rectangle **AHB** i el triangle rectangle **AHC**.
Cada un és semblant al triangle inicial, ja que tenen un angle en comú (l'angle **B** o l'angle **C**) i són triangles rectangles (tots tres tenen un angle recte). Així que es poden establir relacions de proporcionalitat entre els costats homòlegs.

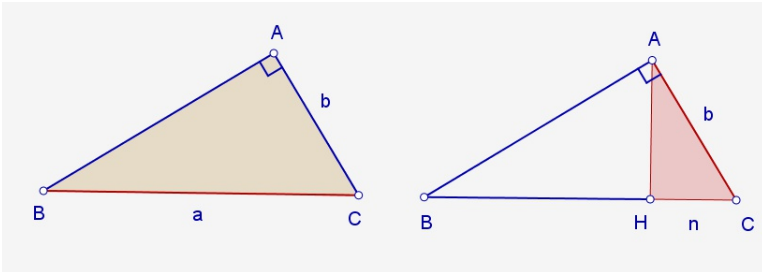


Si ens fixem en els triangles **BAC** i **BAH** :



$$\frac{c}{m} = \frac{a}{c}; \qquad c^2 = m * a$$

Si ens fixem en els triangles **BAC** i **AHC** :

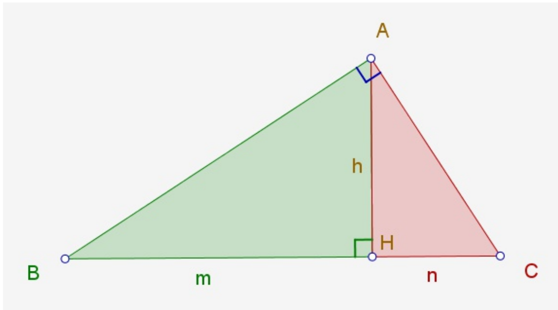


$$\frac{b}{n} = \frac{a}{b}; \qquad b^2 = n * a$$

En qualsevol triangle, cada catet és mitjana proporcional entre la hipotenusa i la projecció d'aquest catet a sobre de la hipotenusa.

Teorema de l'altura

Si ens fixem en els triangles **BAH** i **AHC** :

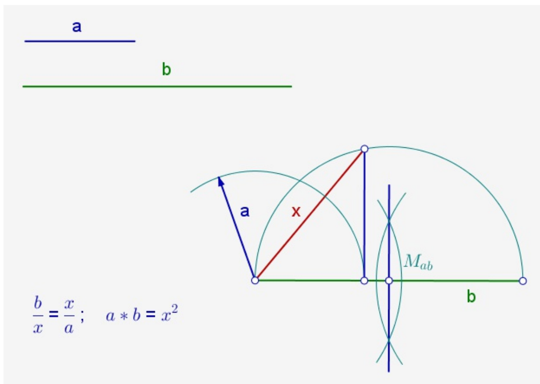


$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}; \qquad h^2 = m * n$$

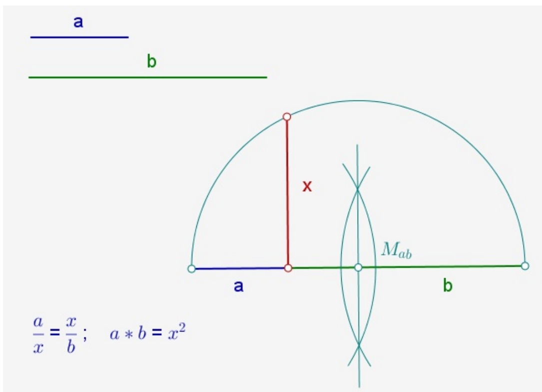
En un triangle rectangle, l'altura respecte de la hipotenusa és mitjana proporcional entre les dues parts en que l'altura divideix la hipotenusa.

Trobar la mitjana proporcional entre dos segments *a* i *b*.

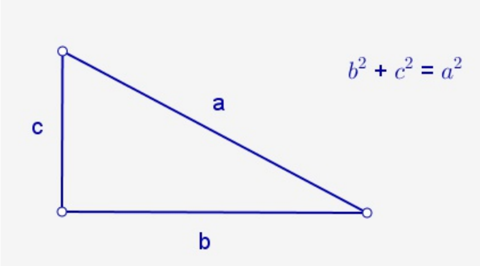
Segons el teorema del catet:



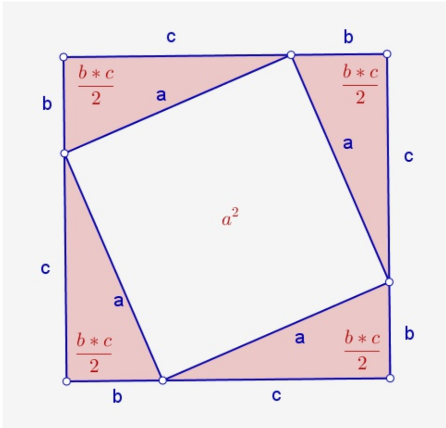
Segons el teorema de l'altura:



Teorema de Pitàgores



Si fem un quadrat de costat **b + c**



L'àrea d'aquest quadrat és:

$$(b+c)^2$$

Per altra banda, també es pot expressar com:

$$4 * \left(\frac{b*c}{2}\right) + a^2$$

Igualant les dues expressions queda:

$$(b+c)^2 = 4 * \left(\frac{b*c}{2}\right) + a^2 \;;$$

$$b^2 + (2 * b * c) + c^2 = (2 * b * c) + a^2 \;;$$

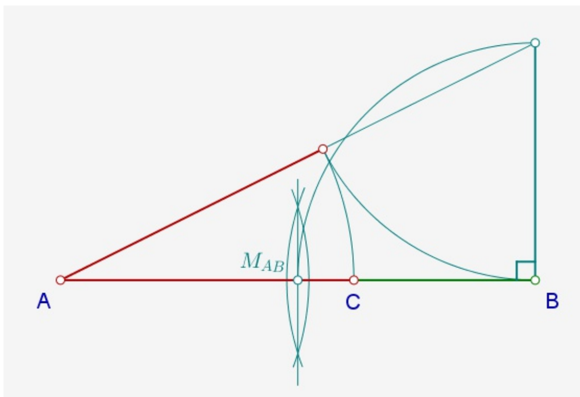
$$b^2 + c^2 = a^2$$

Divisió àuria d'un segment

Dos segments estan en proporció àuria si la seva raó de proporcionalitat és:

$$k = \Phi = 1'618033... = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

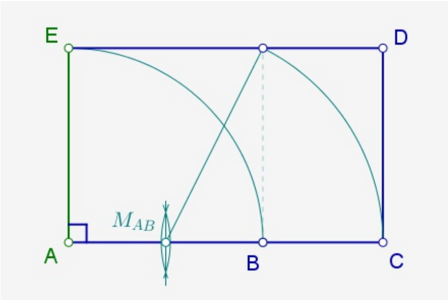
Per dividir un segment **AB** en dues parts que estiguin en proporció àuria (o el que és el mateix, buscar el seu segment àuri o secció àuria **AC**), procedirem de la manera següent:



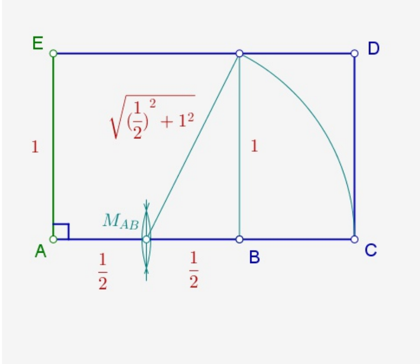
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \Phi$$

Rectangle de proporció àuria

Partint del costat petit *AE*:

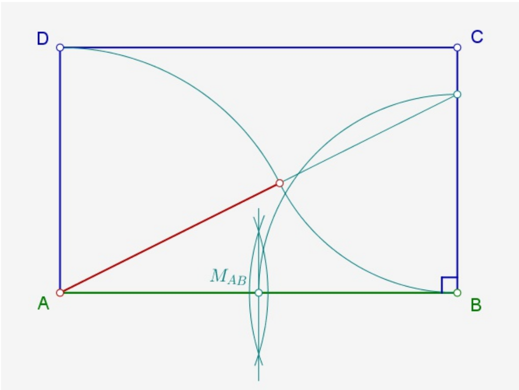


$$\frac{AC}{AE} = \Phi$$



$$AC = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} =$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} =$$
$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} =$$
$$= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

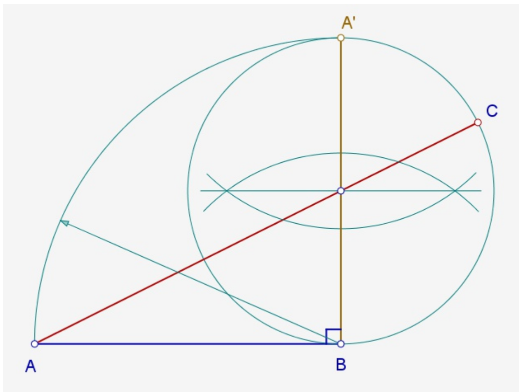
Partint del costat gran *AB*:



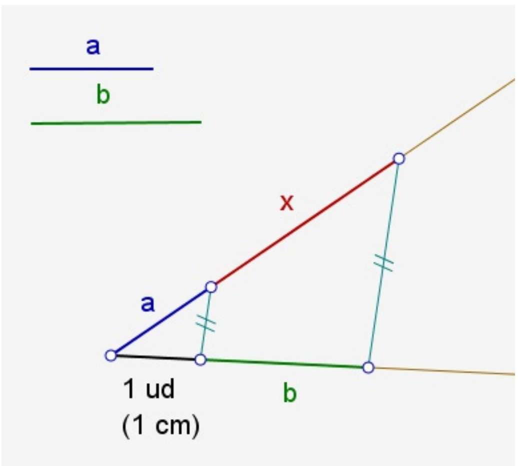
$$\frac{AB}{AD} = \Phi$$

Construcció d'un segment a partir del seu segment àuri *AB*

$$\frac{AC}{AB} = \Phi$$



Producte de dos segments *a* i *b*

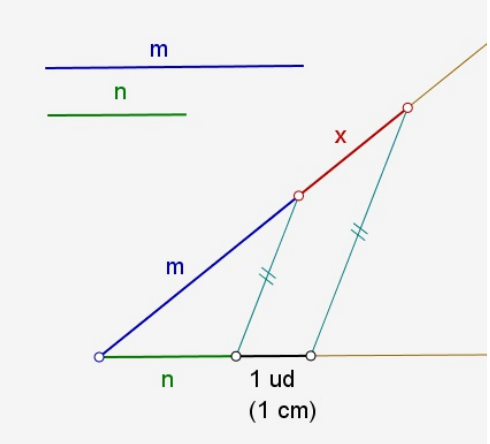


El segment resultant serà el quart proporcional a tres segments (**a**, **b** i un segment d'**1 cm** de longitud).

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{b} \; ;$$

$$; \; a * b = x$$

Quocient de dos segments *m* i *n*



El segment resultant serà el quart proporcional a tres segments (**a**, **b** i un segment d'**1 cm** de longitud).

$$\frac{m}{n} = \frac{x}{1};$$

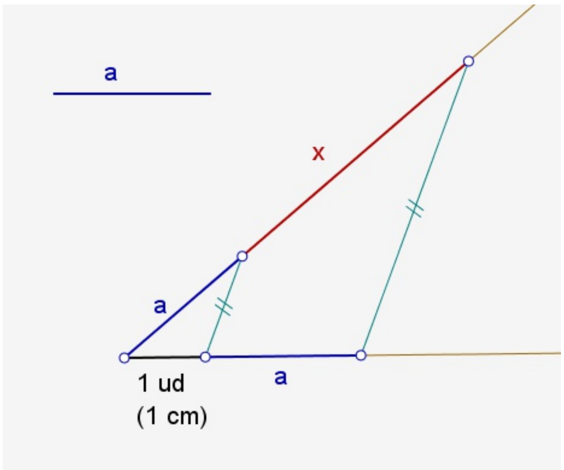
$$;\frac{m}{n} = x$$

Quadrat d'un segment *a*

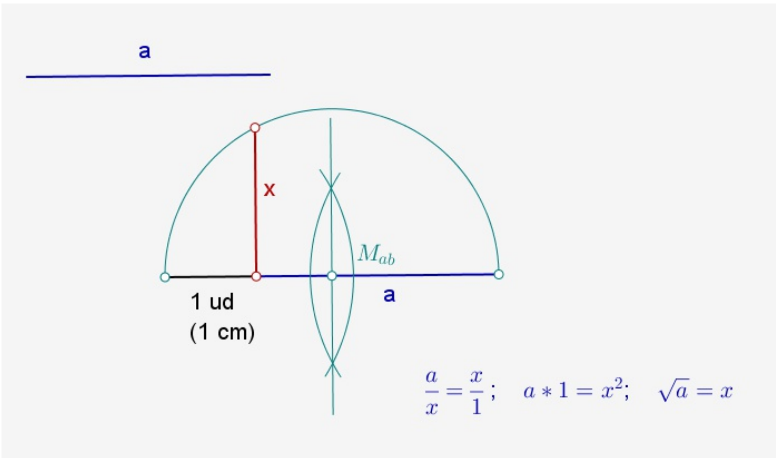
El segment resultant serà el tercer proporcional d'un segment **a** i un segment d'**1 cm** de longitud.

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{a};$$

$$;a^2 = x$$

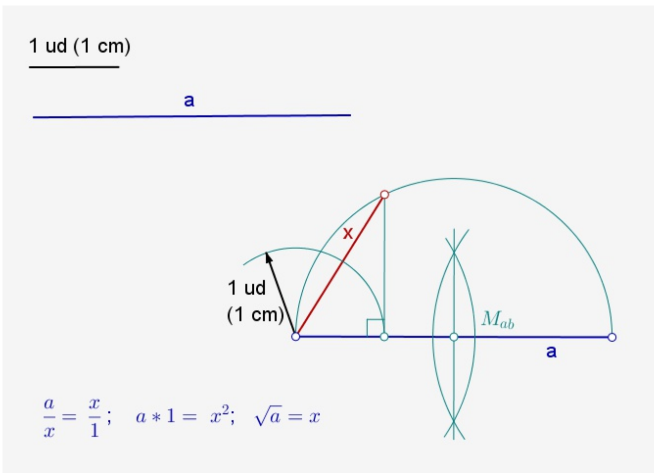


Arrel quadrada d'un segment *a*

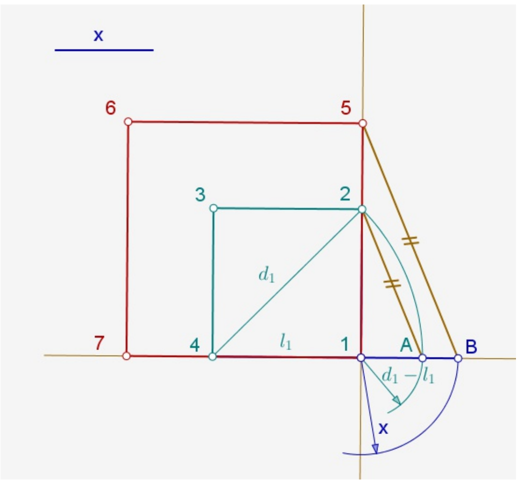


El resultat serà la mitjana proporcional a 2 segments (**a** i el segment d'**1 cm** de longitud) fent servir el teorema de l'altura.

També es podria resoldre fent servir el teorema del catet.



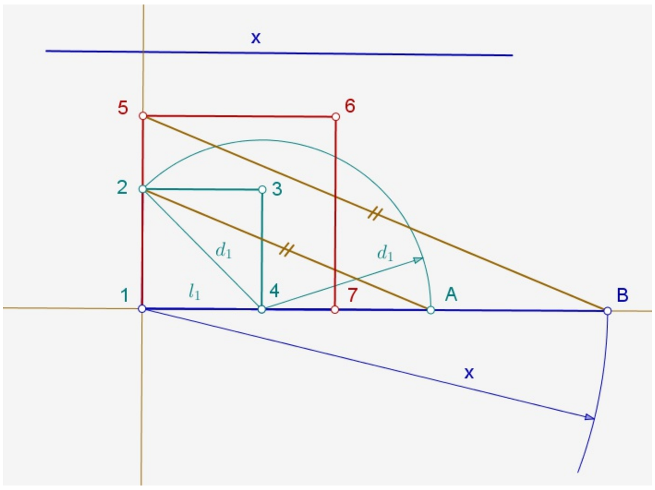
Quadrat del que coneixem la diferència entre la diagonal *d* i un costat *l* *x = d - l*



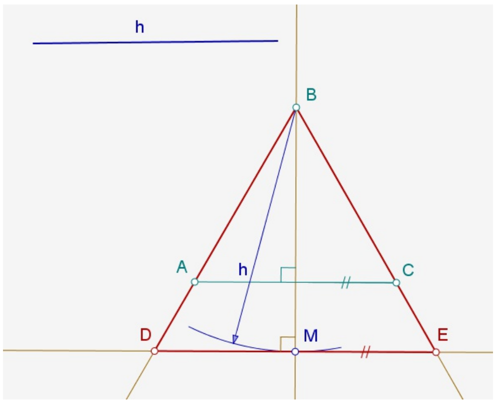
S'ha de contruir un quadrat qualsevol de vèrtexs **1234** del que coneixerem la diferència entre la seva diagonal $\mathbf{d_1}$ i el seu costat $\mathbf{l_1}$.
Amb el triangle **1A2** es relaciona la diferència $\mathbf{d_1}$ - $\mathbf{l_1}$ amb el costat $\mathbf{l_1}$.
Si es dibuixa un triangle semblant **1B5** amb la diferència **x = d - l** de les dades del problema, obtenim el costat **15** del quadrat **1567** demanat.

Quadrat del que coneixem la suma entre la diagonal *d* i un costat *l* *x = d + l*

S'ha de contruir un quadrat qualsevol de vèrtexs **1234** del que coneixerem la suma entre la seva diagonal $\mathbf{d_1}$ i el seu costat $\mathbf{l_1}$.
Amb el triangle **1A2** es relaciona la suma $\mathbf{d_1}$ + $\mathbf{l_1}$ amb el costat $\mathbf{l_1}$.
Si es dibuixa un triangle semblant **1B5** amb la suma **x = d + l** de les dades del problema, obtenim el costat **15** del quadrat **1567** demanat.



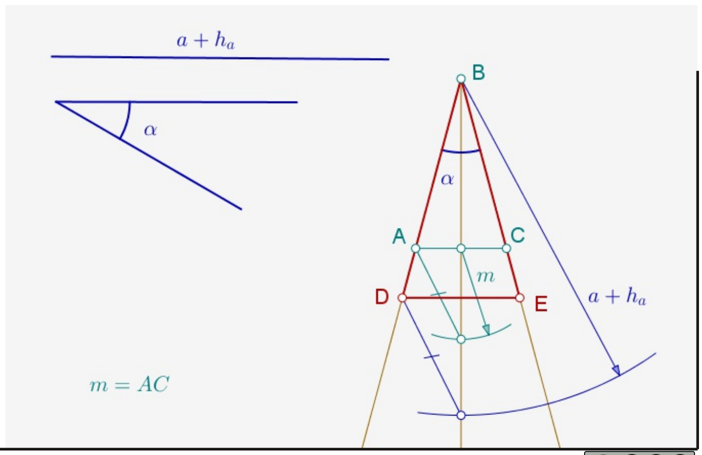
Triangle equilàter del que coneixem la seva altura *h*



Es dibuixa un triangle equilàter qualsevol **ABC** i un cop assenyalada l'altura **h**, a sobre de l'altura d'aquest triangle, es fa un triangle semblant **DBE** que serà la solució.

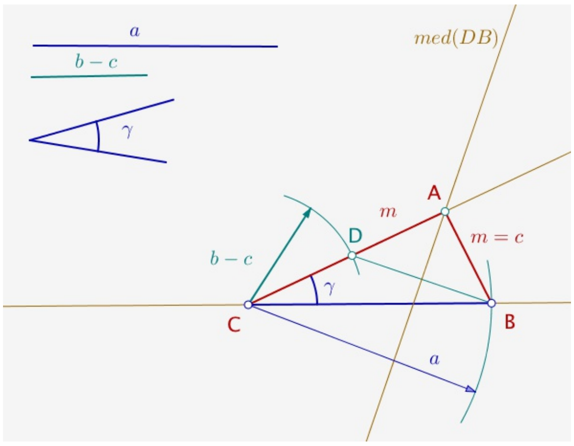
Triangle isòsceles *ABC* (*AB* = *AC*) del que coneixem l'angle *α* i el segment *a* + h_a.

Es dibuixa un triangle equilàter qualsevol **ABC** i a continuació de l'altura d'aquest triangle, es marca la distància **m** del costat **AC**. Unint aquest últim punt amb el vèrtex **A** tindrem un segment que ha de ser paral·lel al segment obtingut amb les dades del problema. El triangle **DBE** serà semblant al triangle del començament i serà la solució del problema.



Construcció de triangles i quadrilàters II

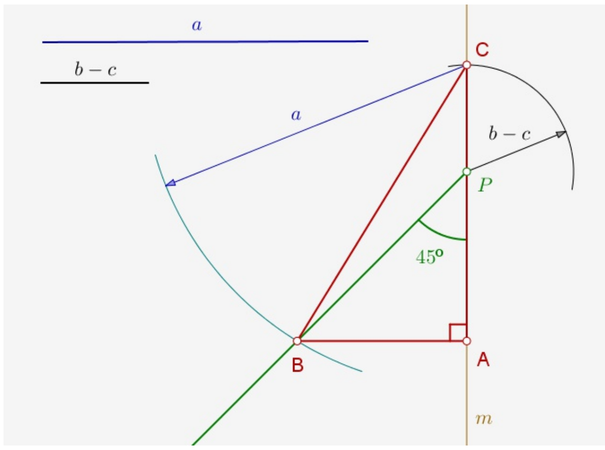
Triangle del que coneixem el costat *a*, la diferència entre els costats *b* i *c* (*b* - *c*) i l'angle *C*.



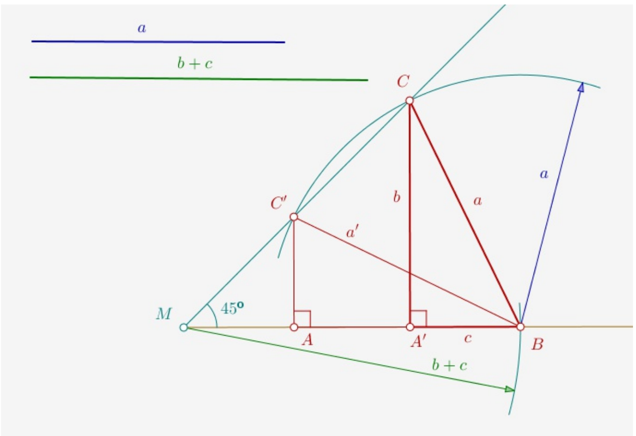
A sobre d'una recta i a partir d'un punt qualsevol **C**, s'ha de situar el segment **CB** amb la mesura del costat **a** i l'angle **γ** donat. Des del punt **C** situem la mesura **b-c** a sobre del costat de l'angle **γ** i obtindrem un punt **D**.
Fent la mediatriu del segment **DB** s'obté el punt **A** (el tercer vèrtex del triangle) a sobre del costat de l'angle **γ**.

Triangle rectangle del que coneixem la hipotenusa *a* i la diferència entre els catets *b* - *c*.

A sobre d'una recta situem un punt **P** qualsevol i a partir d'ell construim un angle de **45º** i marquem un punt **C** (que serà un vèrtex del triangle) amb la mesura **b-c** donada.
Des del punt **C**, i amb la mesura de la hipotenusa a donada, marquem a sobre del costat de l'angle de **45º** el punt **B** (que serà el segon vèrtex del triangle).
Dibuixant des de **B** una perpendicular a la recta de **CP** s'obté el punt **A**, que serà el tercer vèrtex del triangle.



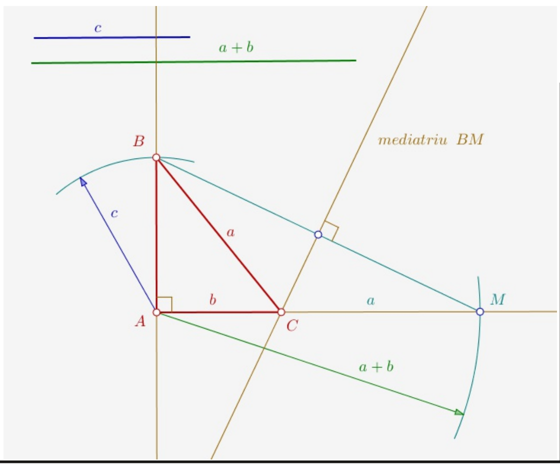
Triangle rectangle del que coneixem la hipotenusa *a* i la suma dels seus catets *b* + *c*.



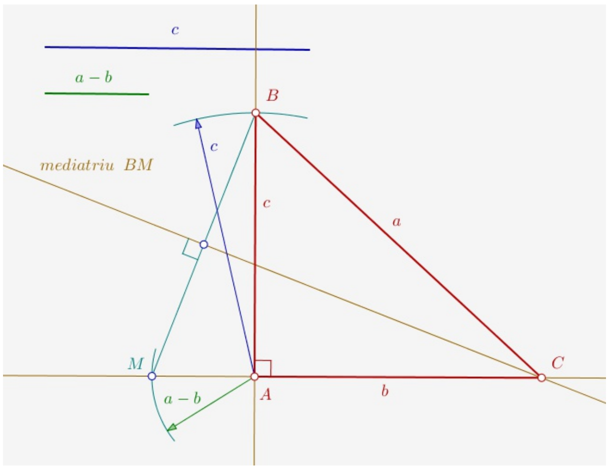
A sobre d'una recta i a partir d'un punt qualsevol **M**, s'ha de situar el punt **B** (que serà un vèrtex dels triangles demanats) amb la mesura **b + c** donada i també un angle de **45º**. Des del punt **B** i amb un arc de radi la hipotenusa **a** donada, marquem a sobre del costat de l'angle de **45º** dos punts **C** i **C'** que seran vèrtexs dels tiangles demanats.
Fent perpendiculars a la recta inicial des dels punts **C** i **C'** s'obtenen els punts **A** i **A'**, que seran els vèrtex dels triangles de la solució. Tenim docs, dues possibles solucions.

Triangle rectangle del que coneixem un catet *c* i la suma *(a+b)* de la hipotenusa *a* i l'altre catet *b*

Des del punt d'intersecció **A** de dues rectes perpendiculars marquem un punt **B** amb la mesura del catet **c** donat (que serà un vèrtex del triangle solució) i un punt **M** a sobre de l'altra recta amb la mesura **a + b** (suma de la hipotenusa i l'altre catet).
Fent la mediatriu del segment **BM** obtenim el punt **C** que serà el tercer vèrtex del triangle demanat.



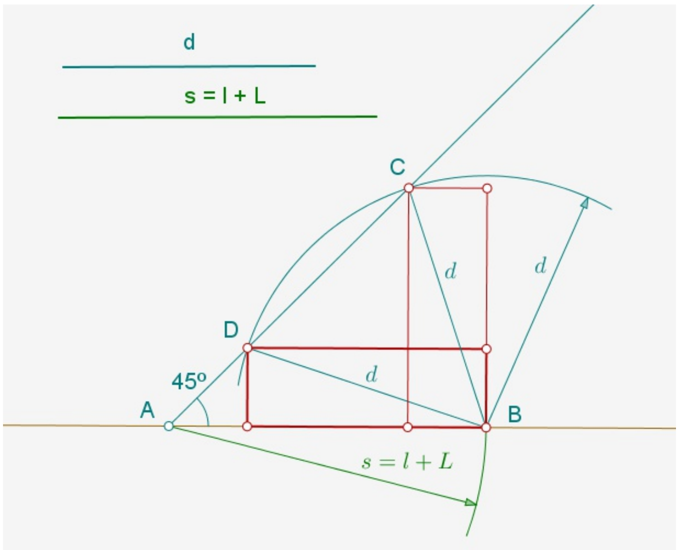
Triangle rectangle del que coneixem un catet *c* i la *diferència (a - b)* entre la hipotenusa *a* i l'altre catet *b*



Des del punt d'intersecció **A** de dues rectes perpendiculars marquem un punt **B** amb la mesura del catet **c** donat (que serà un vèrtex del triangle solució) i un punt **M** a sobre de l'altra recta amb la mesura **a - b** (diferència entre la hipotenusa i l'altre catet).
Fent la mediatriu del segment **BM** obtenim el punt **C** que serà el tercer vèrtex del triangle demanat.

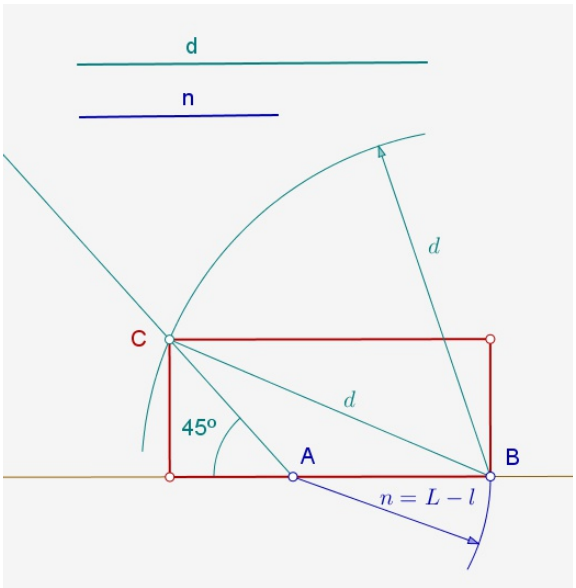
Rectangle del que coneixem el semiperímetre *s* i la diagonal *d*.

A sobre d'una recta es situa un punt qualsevol **A** i el semiperímetre del rectangle **s** = **AB**. Es traça un angle de **45º** a partir del punt **A** i des del punt **B** un arc de radi la diagonal **d** donada. Els punts **C** i **D** d'intersecció de l'arc amb el costat de l'angle són els vèrtexs (oposats al vèrtex **B**) dels rectangles que són solució del problema.



d = Diagonal del rectangle
s = Semiperímetre del rectangle (costat gran L + costat petit l)

Rectangle del que coneixem la diferència *n* entre el costat major *L* i el menor *l* i la diagonal *d*.



A sobre d'una recta es situa un punt qualsevol **A** i la diferència **n** entre el costat gran **L** i el petit **l** del rectangle (**n = L - l**). Es traça un angle de **45º** a partir del punt **A** i des del punt **B** un arc de radi la diagonal **d** donada. El punt **C** d'intersecció de l'arc amb el costat de l'angle és el vèrtex (oposat al vèrtex **B**) del rectangle que és solució del problema.

d = Diagonal del rectangle
n = Diferència entre el costat gran **L** i el costat petit **l** del rectangle (**n = L - l**)