

## Definició

Un polígon és una superfície plana i tancada, que es forma mitjançant segments units pels seus extrems.

## Elements importants dels polígons

### Costat

És cadascun dels segments que determinen el polígon (**c**).

### Vèrtex

Són els extrems dels costats del polígon (**V**).

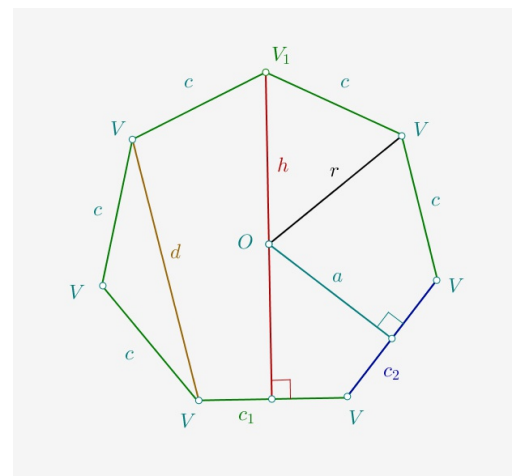
### Diagonal

És el segment que uneix dos vèrtexs no consecutius (**d**).

El nombre **D** de diagonals d'un polígon convex és:

Essent **N** el nombre de vèrtexs.

$$D = \frac{N * (N - 3)}{2}$$



### Apotema

És el segment perpendicular a un costat traçat des del centre del polígon (**a**).

### Radi

És un segment que uneix el centre del polígon amb un vèrtex (**r**).

### Altura o alçària

És la distància que hi ha entre un vèrtex i el costat oposat (si el nombre de costats és senar) o la distància que hi ha entre dos costats paral·lels (si el nombre de costats és parell) (**h**).

### Perímetre

És el contorn format pel conjunt de tots els seus costats (la suma de les seves longituds).

## Elements angulars dels polígons

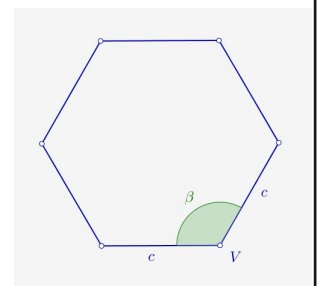
### Angle interior $\beta$

És l'angle, interior al polígon, format per dos costats consecutius ( **$\beta$** ).

El valor de la suma dels angles interns en un polígon convex ( **$\sum \beta$** ) és:

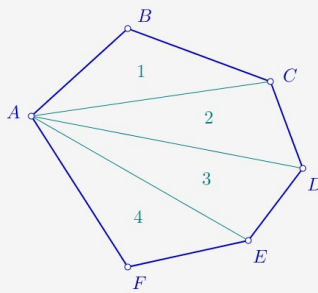
$$\sum \beta = 180 * (n-2)$$

Essent **n** el nombre de costats del polígon.



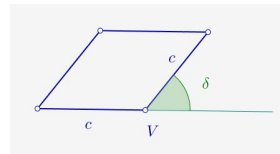
A l'exemple, es divideix el polígon en triangles, ja que sabem que la suma dels angles interns d'un triangle és igual a un angle recte (180°). D'aquesta manera es pot calcular quina serà la suma dels angles interns d'un polígon qualsevol.

*Exemple*

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{F} &= \\ &= 180^\circ * (6 - 2) = \\ &= 180^\circ * 4 = 720^\circ \end{aligned}$$


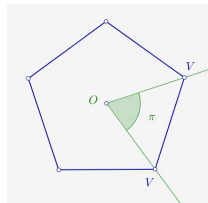
### Angle exterior $\vartheta$

És l'angle format per un costat i la prolongació del costat adjacent ( $\vartheta$ ).



### Angle central $\pi$

És l'angle que té com a vèrtex el centre del polígon i com a costats dos radis consecutius ( $\pi$ ).



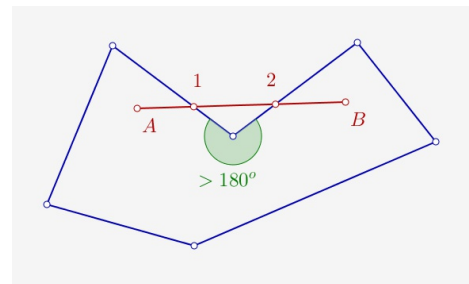
## Classificació dels polígons

Els polígons es poden classificar de diferents maneres, per exemple, podem diferenciar entre polígons còncaus i convexos, polígons regulars i irregulars, inscrits i circumscrits, i entre polígons estrellats i no estrellats.

### Polígons còncaus

Un polígon és còncau si es pot traçar com a mínim un segment, amb els seus extrems a dins del polígon, que talli dos costats del polígon.

Com a mínim, un dels seus angles interns ha de ser més gran de 180°.

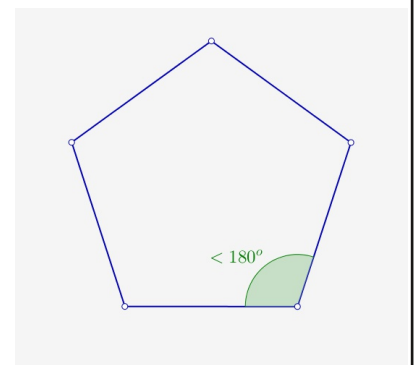


### Polígons convexos

Un polígon és convex si no es pot traçar com a mínim un segment, amb els seus extrems a dins del polígon, que talli dos costats del polígon.

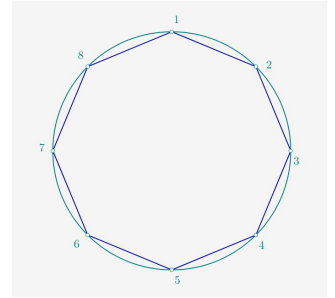
És a dir, si no és còncau.

Tots els seus angles interns han de ser més petits de 180°.



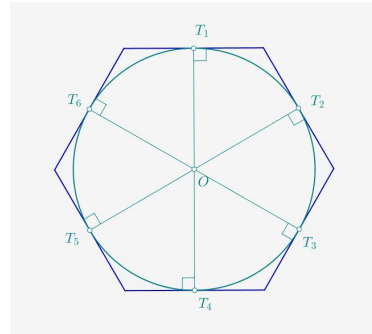
## Polígons inscrits

Un polígon està inscrit en una circumferència si tots els seus vèrtexs són punts de la circumferència



## Polígons circumscrits

Un polígon està circumscrit a una circumferència si tots els seus costats són tangents a la circumferència.



## Polígons regulars

Un polígon és regular si té TOTS els angles interiors iguals i TOTS els costats de la mateixa mida.

Els polígons regulars es poden classificar segons el nombre de costats:

3 costats Triangle equilàter.

4 costats Quadrat.

5 costats Pentàgon.

6 costats Hexàgon.

7 costats Heptàgon.

8 costats Octàgon.

9 costats Enneàgon.

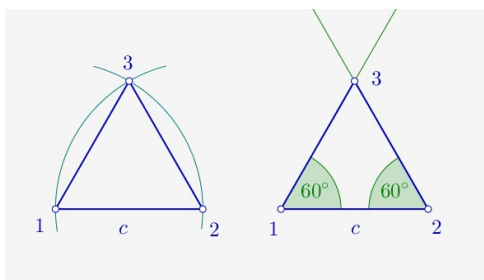
10 costats Decàgon.

11 costats Hendecàgon.

12 costats Dodecàgon.

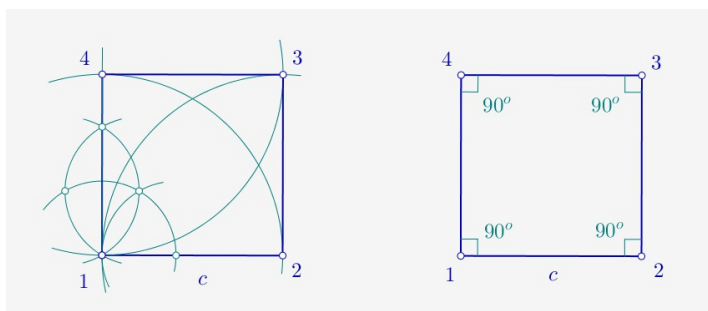
### **Construcció de polígons regulars a partir d'un costat (c)**

#### **Triangle equilàter**

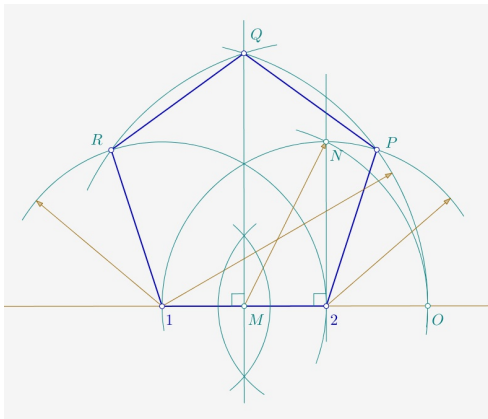


Es pot dibuixar fàcilment fent servir, o bé el compàs, o bé els escaires.

#### **Quadrat**



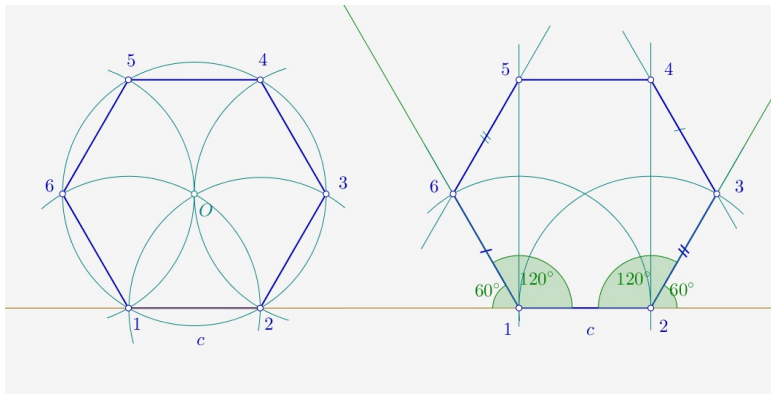
### Pentàgon



Degut a la construcció que s'ha fet servir per dibuixar el pentàgon regular, es pot veure que el costat (12) i la diagonal (1Q) estan representats en proporció àurea.

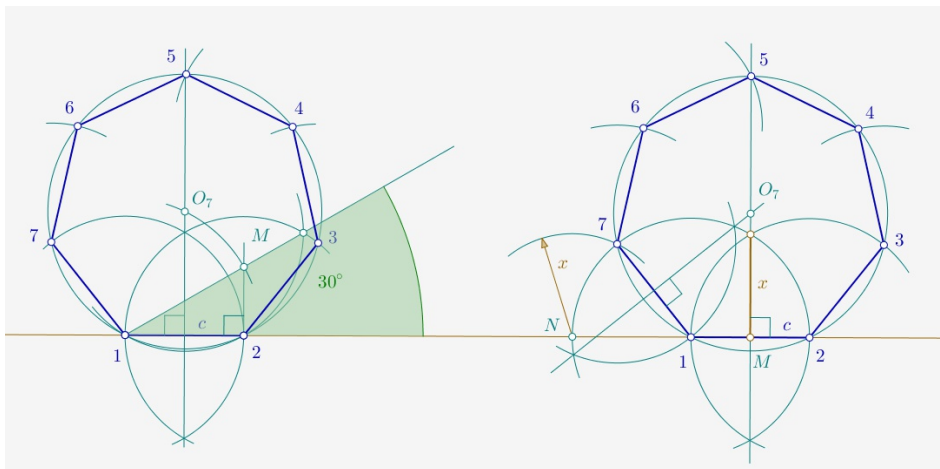
En els pentàgons regulars, els costats i les diagonals mantenen una proporció àurea.

### Hexàgon



Igual que en el triangle, podem fer servir el compàs o els escaires per dibuixar un hexàgon regular,

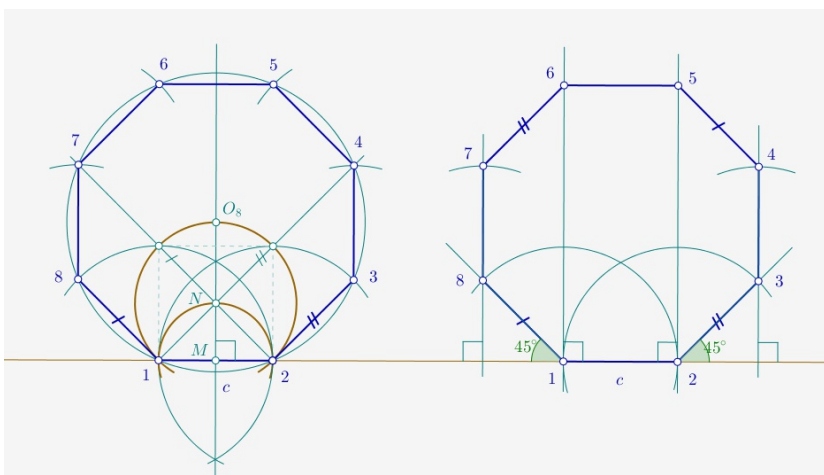
### Heptàgon



*Construcció aproximada*

Aquestes són dues maneres de construir, (de manera aproximada), un heptàgon regular.

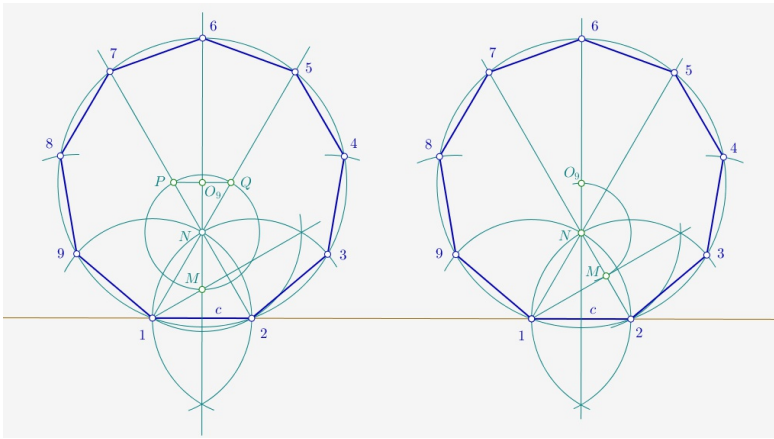
### Octàgon



Igual que en el triangle i en l'hexàgon, podem fer servir el compàs o els escaires per dibuixar un octàgon regular,

Podem comprovar la precisió del dibuix traçant les diagonals de la figura i verificant el paral·lelisme amb els costats.

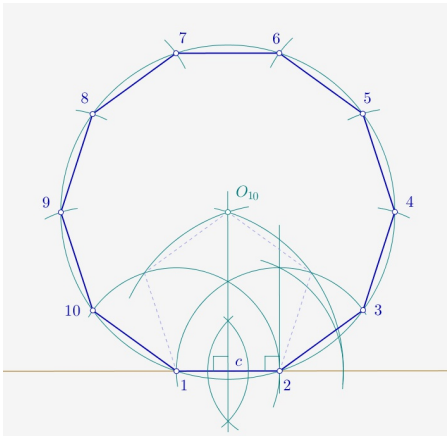
## Enneàgon



### Construcció aproximada

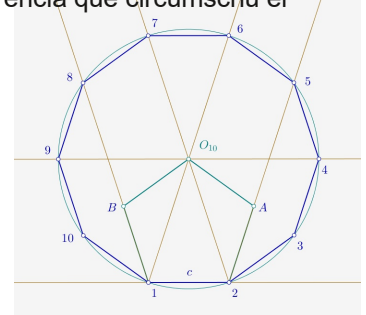
Aquestes són dues maneres de construir, (de manera aproximada), un enneàgon regular.

## Decàgon

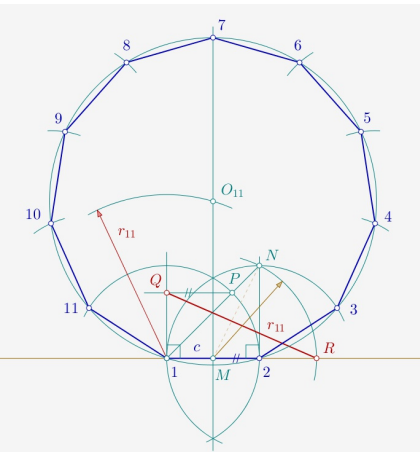


Es construeix un pentàgon amb la mida del costat del decàgon que ens demanen. El vèrtex oposat al costat que serveix de base és el centre de la circumferència que circumscriu el

Podem comprovar la precisió del dibuix traçant les diagonals de la figura i verificant el paral·lelisme amb els costats.

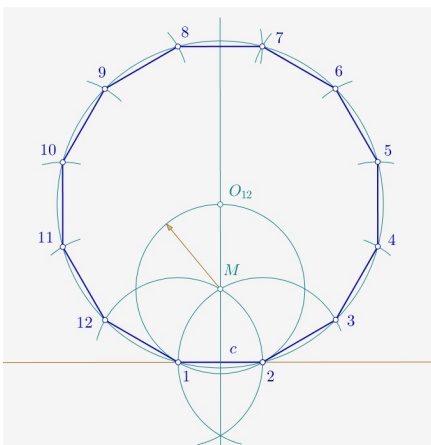


## Hendecàgon

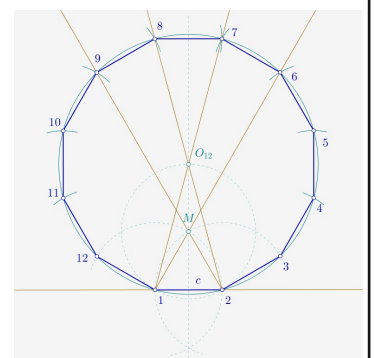


### Construcció aproximada

## Dodecàgon

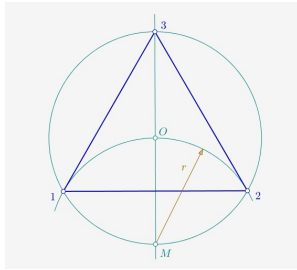


Podem comprovar la precisió del dibuix traçant les diagonals de la figura, comprovant que passen pels punts indicats i verificant el paral·lelisme dels costats.

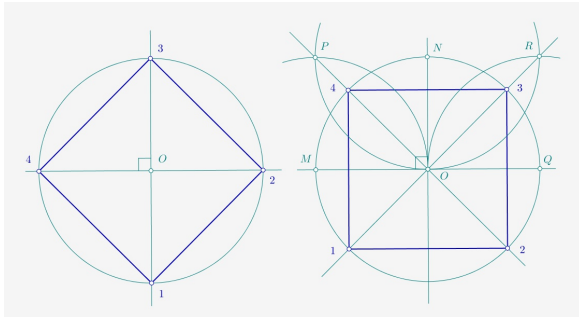


**Construcció de polígons regulars inscrits en una circumferència**

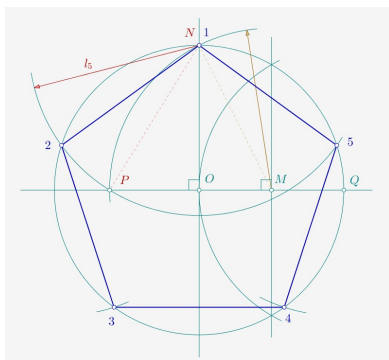
**Triangle equilàter**



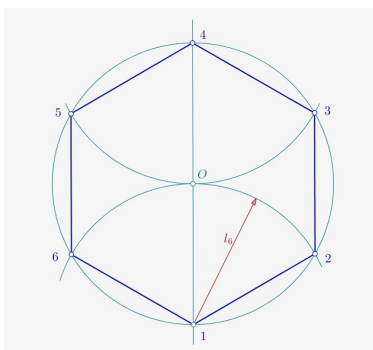
**Quadrat**



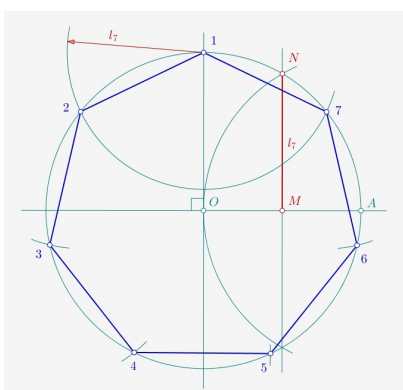
**Pentàgon**



**Hexàgon**



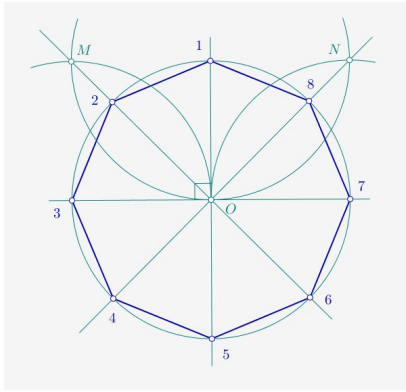
**Heptàgon**



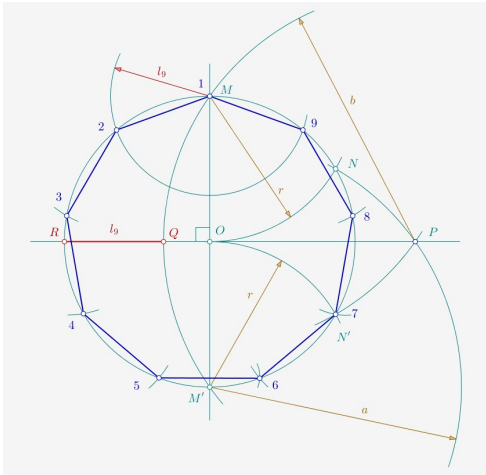
*Construcció aproximada*

Polígons 6

### Octàgon

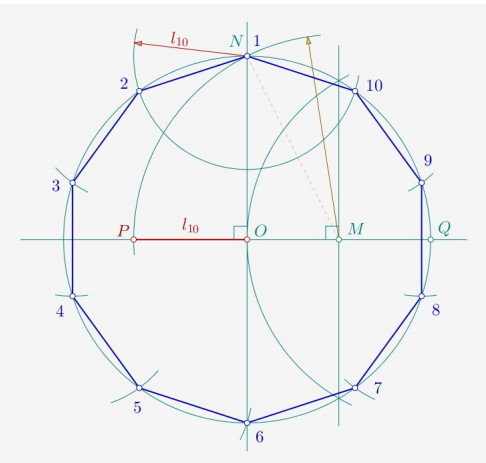


### Enneàgon

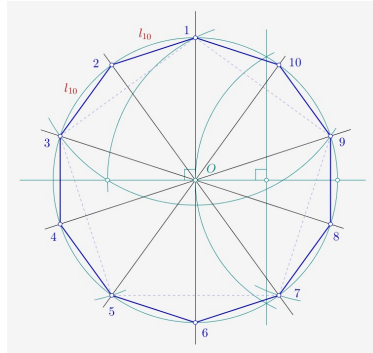


Construcció aproximada

### Decàgon

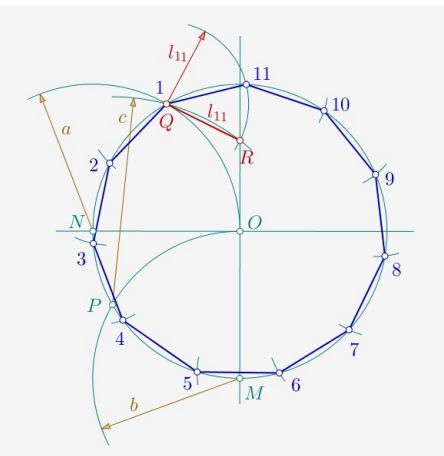


Podem trobar la mida del costat del decàgon regular tal com es veu a la primera figura, i després dividir la circumferència amb aquesta longitud ( $l_{10}$ ).



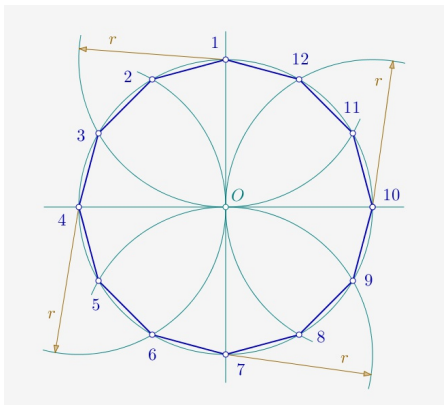
També es pot dibuixar els vèrtexs d'un pentàgon regular inscrit i després traçar els diàmetres que passen per aquests vèrtexs per tal de trobar els altres cinc.

### Hendecàgon



Construcció aproximada

**Dodecàgon**



**Construccions generals**

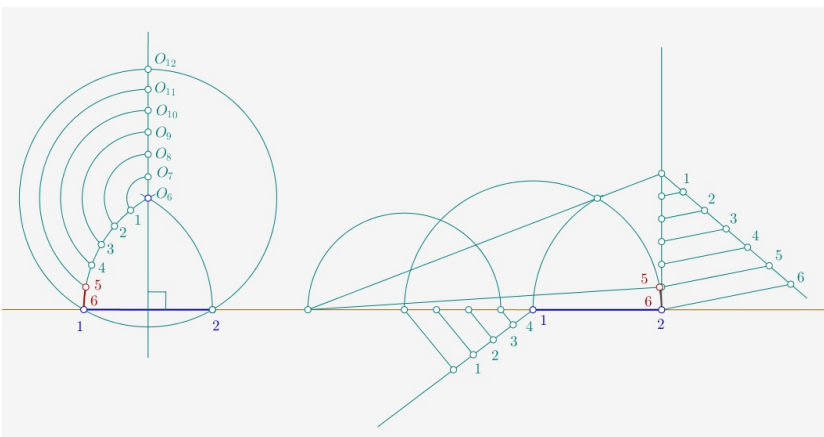
**Partint d'un costat**

Per dibuixar polígons regulars de **6 fins a 12 costats** podem fer servir aquestes construccions:

**Primera opció**

*Construcció aproximada*

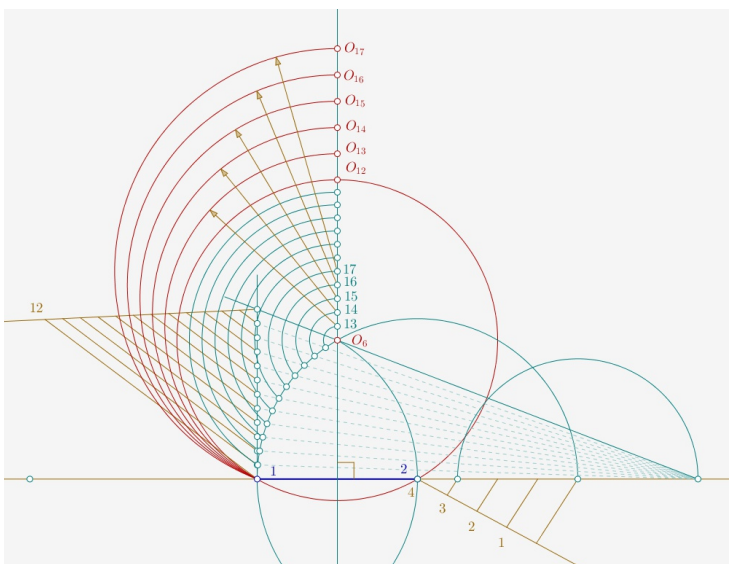
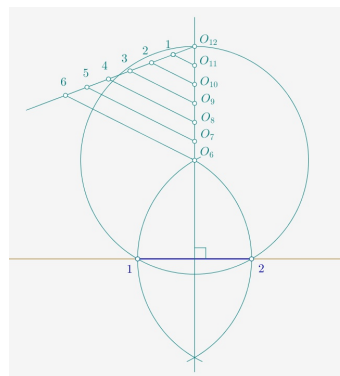
Es divideix l'arc **1-O<sub>6</sub>** en 6 parts iguals (**1, 2, 3, 4, 5 i 6**) que es traslladen al radi **O<sub>6</sub>-O<sub>12</sub>**. Els punts **O<sub>6</sub>, O<sub>7</sub>,...O<sub>12</sub>** són els centres de les circumferències de l'hexàgon inscrit, heptàgon inscrit, etc. que tenen el costat **1-2** indicat.



**Segona opció**

*Construcció aproximada*

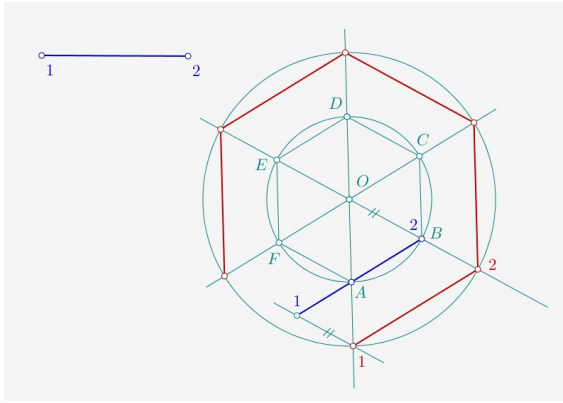
Amb aquesta opció es divideix directament el radi **O<sub>6</sub>-O<sub>12</sub>** en 6 parts iguals. Els punts **O<sub>6</sub>, O<sub>7</sub>,...O<sub>12</sub>** seran els centres de les circumferències que circumscriuen els polígons regulars de **6, 7, ...12** costats.



*Construcció aproximada*

Si s'han de construir polígons de més de 12 costats i fins 24 costats, aquest seria el mètode. Els punts **O<sub>12</sub>, O<sub>13</sub>, ...O<sub>24</sub>** seran els centres dels polígons regulars de **12, 13, ...24**





**Tercera opció**

Es pot resoldre el problema per semblança de triangles.

Es dibuixa un polígon regular qualsevol amb el mateix nombre de costats que el que es demana.

Comparem el triangle **AOB** (del polígon auxiliar) amb el triangle **102** del polígon solució.

El radi **OA** ha de passar pel punt **1** i el radi **OB** ha de passar pel punt **2**.

El costat **AB** ha de ser paral·lel al costat **12**.

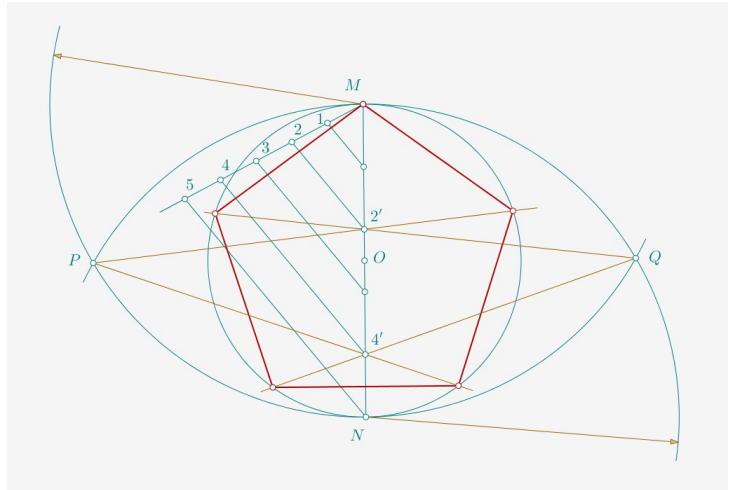
**Inscrits en una circumferència**

*Construcció aproximada*

Dividint el diàmetre **MN** en tantes parts iguals com costats tingui el polígon que hem de dibuixar (en el cas de la figura, 5 parts iguals, ja que hem de dibuixar un pentàgon).

Dibuixant rectes que passin pels punts **P**, **Q** i les divisions parells del diàmetre (**2'** i **4'**), s'obtenen els vèrtexs del pentàgon quan tallen la circumferència.

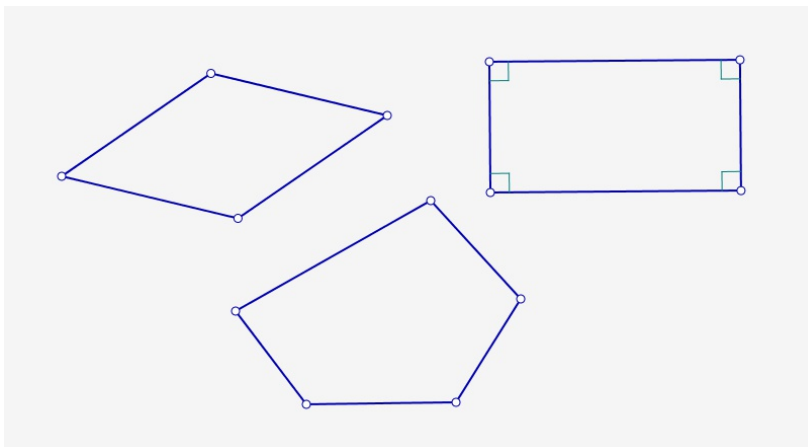
Aquesta construcció s'aproxima molt al polígon real, encara que no és exacta.



**Polígons irregulars**

Un polígon és irregular si no té tots els angles iguals, o no té tots els angles de la mateixa mida, o ni té tots els angles iguals ni tots els costats de la mateixa mida.

És a dir, un polígon és irregular si no és regular.



Aquestes figures no són polígons regulars ja que:

El rombe té tots els costats iguals, però els angles són diferents (dos a dos).

El rectangle té tots els angles de 90° però els costats són diferents (dos a dos).

El pentàgon de la figura no té ni els angles iguals ni els costats de la mateixa mida.

## Polígons estrellats

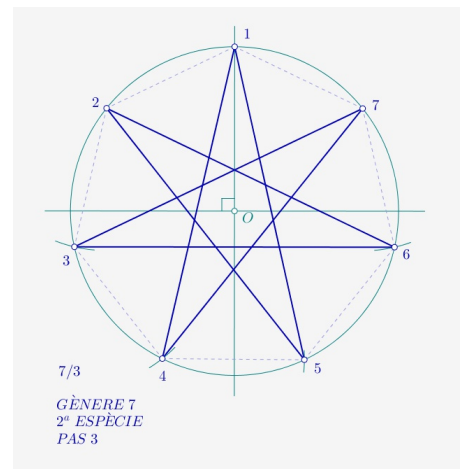
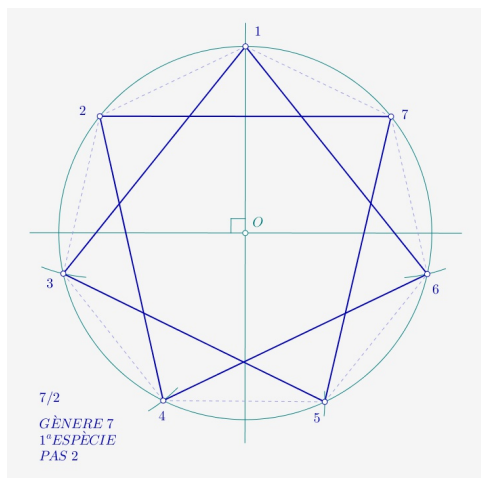
Són polígons còncaus que tenen forma d'estrella i s'obtenen unint els vèrtexs dels polígons regulars convexos dels quals es parteix, de dos en dos, de tres en tres,...

Els polígons estrellats queden definits pels paràmetres: GÈNERE, ESPÈCIE i PAS.

**GÈNERE** Nombre de costats del polígon regular del qual es parteix.

**ESPÈCIE** Nombre de voltes que s'han de fer al voltant del centre, unint els vèrtexs, per tancar el polígon. Si s'en necessiten dues voltes, serà de 1<sup>a</sup> espècie, si tres voltes 2<sup>a</sup> espècie, etc.

**PAS** Nombre de divisions sobre la circumferència que agafa un costat del polígon estrellat. Aquest nombre coincideix amb el nombre de voltes de l'espècie del polígon estrellat.



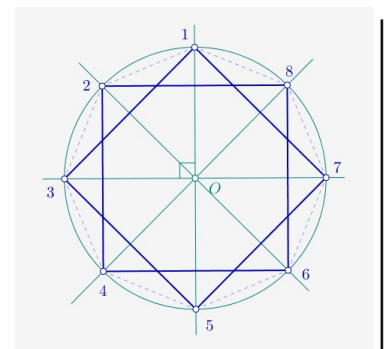
El polígon que surgeix a l'interior del polígon estrellat s'anomena NUCLI, i els vèrtexs del polígon NODES.

Per saber quants polígons estrellats es poden obtenir d'un de terminat gènere, es divideix el gènere per dos. Es podran construir tantes estrelles com nombres primers hi hagi fins el resultat de la divisió.

Per exemple, d'un heptàgon estrellat (gènere 7) podrem dibuixar 2 estrelles diferents, ja que  $7/2 = 3,5$ , i els nombres primers compresos fins 3,5 són 2; 2 i 3.

### Falsa estrella

De vegades, unint els vèrtexs del polígon inicial, s'obtenen dos o més polígons regulars inscrits a la circumferència girats entre sí. D'aquesta construcció no sorgeix un veritable polígon estrellat sinó el que s'anomena una falsa estrella.



Fals octàgon estrellat