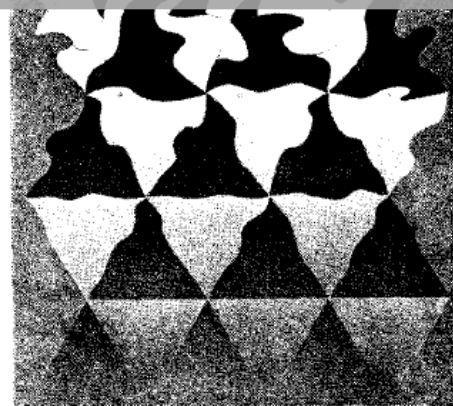


INS MIQUEL
CRUSAFONT

DOSSIER D'ESTIU
MATEMÀTIQUES

3R ESO



Nombres Enters

Els nombres **enters** són una extensió dels nombres naturals formada pels propis nombres naturals (1,2,3...), els seus corresponents negatius (-1,-2,-3...) i el nombre zero (0). El conjunt de tots els enters generalment es denota pel símbol $\mathbb{Z}$. Els nombres enters són un subconjunt dels nombres racionals.

1.1 Ordre de les operacions

En el següent quadre tenim l'ordre en que s'han de calcular les diferents operacions.

ORDRE	OPERACIONS	SÍMBOLS
1 ^r	PARÈNTESIS	()
2 ⁿ	POTÈNCIES I ARRELS	3^2 $\sqrt[3]{27}$
3 ^r	MULTIPLICACIONS I DIVISIONS	$\times$ $\div$
4 ^t	SUMES I RESTES	$+$ $-$

1.2 Exercicis

Calcula les següents operacions:

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|--|
| (1) $3 \cdot 4 - 5$ | (12) $3 \cdot (5 - 4) \div 3$ | (23) $3 \cdot 5 - 7 \cdot 2$ |
| (2) $3 \cdot (4 - 5)$ | (13) $7 - 3 \cdot 3 + 2$ | (24) $12 - 4 \div 4 - 2$ |
| (3) $6 \cdot 9 + 10$ | (14) $15 - 3 \div 3 + 4$ | (25) $(12 - 4) \div 4 - 2$ |
| (4) $7 - 3 + 4$ | (15) $25 \div 5 + 7$ | (26) $3 \cdot 14 \div 7 - 5 \cdot 9$ |
| (5) $7 - (3 + 4)$ | (16) $25 \div (3 + 2) + 7$ | (27) $3 \cdot 14 \div (7 - 5) \cdot 5$ |
| (6) $6 + 9 - 3 \cdot 2$ | (17) $5 \cdot (3 + 2) \div 5 + 7$ | (28) $20 \cdot 15 \div 25$ |
| (7) $18 \div 9 - 2 \cdot 4$ | (18) $(7 - 10) + 4 \cdot 3$ | (29) $(18 - 12) \cdot 4$ |
| (8) $9 \cdot 5 + 3 \cdot (-5)$ | (19) $(10 - 7) + 3 \cdot 4$ | (30) $18 - 12 \cdot 4$ |
| (9) $2 - (-8 + 4)$ | (20) $(3 - 5) \cdot (7 - 2)$ | (31) $6 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 8 - 2$ |
| (10) $3 \cdot 5 - 4 \cdot 3$ | (21) $(5 - 3) \cdot (2 - 7)$ | (32) $6 \cdot (3 + 8) - 5 \cdot (8 - 2)$ |
| (11) $3 \cdot (5 - 4) \cdot 3$ | (22) $3 \cdot 5 + 7 \cdot 2$ | (33) $4 \cdot 5^2 + 6 \cdot (5 - 4^2)$ |

Nombres racionals

1. Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las fracciones siguientes:

a. $\frac{11}{6}$

b. $\frac{-5}{3}$

c. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{-7}{9}$

2. Encuentra el valor de x para que las fracciones sean equivalentes:

a. $\frac{13}{-7} \text{ i } \frac{x}{42}$

b. $\frac{-4}{x} \text{ i } \frac{x}{-9}$

c. $\frac{6}{x} \text{ i } \frac{-3}{-5}$

d. $\frac{-x}{8} \text{ i } \frac{-7}{4}$

3. Encuentra la fracción irreducible equivalente a :

a. $\frac{78}{117}$

b. $-\frac{240}{360}$

c. $\frac{-36}{-72}$

d. $\frac{143}{-187}$

4. Expresa en forma de decimal las fracciones siguientes. Dices de qué tipo de decimal es cada uno:

a. $\frac{7}{27}$

c. $\frac{45}{8}$

e. $-\frac{23}{5}$

g. $-\frac{19}{25}$

b. $-\frac{35}{24}$

d. $-\frac{58}{9}$

f. $\frac{9}{4}$

h. $\frac{78}{117}$

5. Encuentra la fracción generatriz de los números decimales siguientes:

a. $5'42$

d. $-31'25$

g. $0'1\overline{23}$

b. $-0'235$

e. $-100'\overline{1}$

h. $0'\overline{02}$

c. $13'\overline{13}$

f. $6'123\overline{7}$

6. Opera:

1. $3^{-2} \cdot 3^2 \cdot 3^{-1} =$

2. $-5^2 \cdot (-5)^{-2} =$

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

(Sol: $\frac{1}{3}$, -1, 9)

7. Opera

$2^2 =$	$4^2 =$	$3^5 =$
$10^4 =$	$1^7 =$	$(-1)^7 =$
$(-1)^8 =$	$(-2)^4 =$	$(-2)^5 =$
$(-5)^2 =$	$-5^2 =$	$(-10)^3 =$
$3^0 =$	$3^{-1} =$	$2^{-4} =$
$5^{-2} =$	$10^{-3} =$	$2^{-3} =$
$5^0 =$	10^{-6}	$2^5 =$
$10^3 =$	$10^4 =$	$10^5 =$

$10^6 =$	$10^{-3} =$	$10^{-4} =$
$10^{-5} =$	10^{-6}	$10^0 =$
$3^2 =$	$3^{-2} =$	$-3^2 =$
$-3^{-2} =$	$(-3)^2 =$	$(-3)^{-2} =$
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} =$
$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} =$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$	$\left(\frac{3}{7}\right)^0 =$
$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} =$	$\left(\frac{1}{9}\right)^2 =$	$\left(\frac{x}{3}\right)^2 =$

Operacions amb fraccions

2.1 Suma de Nombres Racionals

$$\frac{7}{10} + \frac{11}{18}$$

Descomposem els dos denominadors i calculem el $mcm(18, 10)$

$$\begin{array}{c|c} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 10 = 2 \cdot 5 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array} \quad mcm(10, 18) = 2 \cdot 5 \cdot 3^2 = 90$$

I en calculem la suma

$$\frac{7}{10} + \frac{11}{18} = \frac{63}{90} + \frac{55}{90} = \frac{63+55}{90} = \frac{118}{90} = \frac{59}{45}$$

2.2 Producte de Nombres Racionals

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Multipliquem numerador per numerador i denominador per denominador, i després simplifiquem si es pot:

$$\frac{20}{9} \cdot \frac{21}{10} = \frac{20 \cdot 21}{9 \cdot 10} = \frac{420}{90} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}$$

També podem simplificar abans de multiplicar:

$$\frac{20}{9} \cdot \frac{21}{10} = \frac{20 \cdot 21}{9 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 1} = \frac{14}{3}$$

2.3 Divisió de Nombres Racionals

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Per fer la divisió hem d'aplicar la regla del caramel, i simplificar quan es pugui,

$$\frac{40}{27} \div \frac{30}{63} = \frac{40 \cdot 63}{27 \cdot 30} = \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{28}{9}$$

2.4 Exponents negatius

L'exponent negatiu d'un nombre racional ens està expressant el mateix nombre racional invers amb exponent positiu. És a dir,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64} \quad \text{On considerem l'invers de } \frac{4}{5} \text{ com } \frac{5}{4}$$

$$1. -\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} =$$

$$2. \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{45} =$$

$$3. \frac{8}{15} \div \frac{4}{5} =$$

$$4. 5 \cdot \frac{3}{10} =$$

$$5. \frac{4}{3} \div 4 =$$

$$6. \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1}{4} =$$

$$7. \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{15} \right) =$$

$$8. \left(\frac{5}{8} + \frac{15}{4} \right) \div 5 =$$

$$9. \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6} \right) =$$

$$10. \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4} \right) \div \frac{5}{2} =$$

$$11. \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}} =$$

$$12. \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) =$$

$$13. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) =$$

$$14. \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \right) \div \frac{5}{8} =$$

$$15. \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{7}{3} - \frac{5}{6}} =$$

$$16. \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{4}{3} + 1}{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \div \frac{9}{10}} =$$

Problemes amb fraccions

1. He comprat $\frac{3}{2}$ quilos de carn i $\frac{5}{4}$ de llucet. Quin pes porto en total?
2. D'una peça de roba de $\frac{36}{5}$ m, n'hem tallat un tros de $\frac{11}{4}$ m. Quants metres de roba queden?
3. Per fer una feina he trigat $\frac{3}{8}$ d'hora buscant el material i $\frac{34}{9}$ d'hora per col·locar-lo. Quant de temps he trigat a acabar la feina?
4. En un mas, el dilluns van recollir $\frac{2}{5}$ de 1500 ous i el dimarts, la meitat dels que van recollir el dilluns. Quants ous havien post les gallines entre els dos dies?

5. Per poder escalar una roca necessito una corda de $\frac{23}{5}$ m, una altra de $\frac{9}{4}$ m i una tercera de $\frac{19}{6}$. Quina alçada té la roca?
6. En un triple salt, en Lluís ha fet $\frac{9}{4}$ m en el primer, $\frac{5}{2}$ en el segon i $\frac{7}{4}$ en el tercer. Si tenia el rècord personal en $\frac{33}{5}$ m, quant li ha faltat per igualar-lo?
7. Un llibre de rondalles té 52 pàgines i mitja de text. Si ja n'he llegit $\frac{117}{5}$, quantes pàgines he de llegir encara?
8. Per una vedella he pagat $\frac{3}{4}$ de 3080 euros, i he venut un xai pels $\frac{2}{7}$ del valor de la vedella. Quin preu té cada un d'aquests animals?
9. Un vaixell carrega a Barcelona $\frac{1}{12}$ de la capacitat de les bodegues; a València, $\frac{1}{6}$, i a Cartagena, $\frac{1}{8}$. Quina part de la bodega podrà omplir a Cadis?
10. La Rosa ha recorregut $\frac{911}{5}$ km amb cotxe i l'Aurora, $\frac{581}{5}$ amb moto. Quants quilòmetres més ha fet la Rosa que la seva cosina?

Àlgebra

36. Tradueix al llenguatge algebraic les expressions següents, utilitza només una incògnita:

- El triple d'un nombre.
- El triple d'un nombre més cinc unitats.
- La meitat d'un nombre.
- Un nombre enter més l'anterior.
- La suma de tres nombres consecutius.
- L'edat d'en Pep es x. D'aquí a 9 anys la seva edat serà ...
- Un nombre és x. Els tres cinquens d'aquest nombre menys u són ...
- En un galliner hi ha x gallines. Entre becs i potes hi ha ...
- Na Carme té x anys i el seu pare, el triple. D'aquí a 5 anys, la suma de les seves edats serà ...

Repàs general d'operacions amb polinomis

1. Avalua el següent polinomi per als valors indicats:

a) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

$x = 3$

$x = 1$

b) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

$x = 0$

$x = -1$

2. Suma els següents polinomis:

$$(3x^2 + 11x + 4) + (x^2 - 3x - 2)$$

3. Suma els següents polinomis:

$$(3x^4 + 7x - 1) + (4x^4 - 3x^2 + 2x - 3)$$

4. Resta els següents polinomis:

$$(4x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 3) - (x^5 - 7x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 4)$$

5. Multiplica els següents polinomis:

$$(2x^3 - 3x^2 + 5x - 1)(2x + 3)$$

6. Calcula les següents potències:

a) $(2x + 1)^2$

b) $(x^2 - 3x + 2)^2$

7. Realitza la següent divisió:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{x + 2}$$

Quocient:

Residu:

8. Realitza la següent divisió. Indicació: Dona residu 0.

$$\frac{x^9 - 3x^8 - 5x^7 + 11x^6 - 4x^4 - 11x^3 + 34x^2 + 19x - 2}{x^2 - 3x - 2}$$

9. Considera els polinomis $P(x) = -5x^2 + 2x - 3$ i $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7$ i $R(x) = 4x^2 + 3$. Efectua les operacions indicades.

a) $4P(x) + 3Q(x)$

b) $P(x) - 2R(x)$

c) $P(x) \cdot R(x)$

d) $P(x) \cdot Q(x)$

(Sol: $9x^3 - 26x^2 + 8x + 9$; $-13x^2 + 2x - 9$; $-20x^4 + 8x^3 - 27x^2 + 6x - 9$; $-15x^5 + 16x^4 - 13x^3 - 29x^2 + 14x - 21$)

Igualtats notables

1. Desenvolupa, aplicant les igualtats notables :

a) $(a + 4)^2 =$

b) $(2x + 3)^2 =$

c) $(b + 12)^2 =$

d) $(3x + 5y)^2 =$

e) $(x + 8y^2)^2 =$

f) $(5ab + 3b^2)^2 =$

g) $(50 - x)^2 =$

h) $(ab - 20)^2 =$

i) $(5x - 11)^2 =$

j) $(\frac{1}{2}a^3 - a^4)^2 =$

k) $(2xy - 7x)^2 =$

l) $(3x - 4y^3)^2 =$

m) $(3 + x) \cdot (3 - x) =$

n) $(x^4 - 3y) \cdot (x^4 + 3y) =$

Preguntes de comprensió

1. Quina és la diferencia entre identitat i equació?
2. Quantes solucions pot tenir una equació de 1r grau?
3. Què és un sistema d'equacions lineals amb 2 incògnites?
4. Quins mètodes de resolució de sistemes coneixes? Explica en que consisteix cadascun utilitzant les teves paraules.
5. Classifica els diferents tipus de sistemes segons el nombre de solucions que tenen.
6. Què es el discriminant d'una equació de 2n grau? Quina relació té amb el nombre de solucions de l'equació?

Equacions de primer grau

1. Resol les equacions de primer grau següents:

$$5(x - 3) = 10$$

$$1 - 3x = 4x + 5 - (4 - x)$$

$$15x - 5(x - 1) = 120 - 5x$$

$$7 + 3(2 + x) - 3x = 9 + 2x$$

$$4 - 2(x + 3) = 13 - 5(x + 4)$$

$$1 - 3x - 2(x - 1) = 5(1 - 2x) + 7$$

$$\frac{x + 6}{3} + \frac{4(2x - 4)}{15} = \frac{6 - 4x}{5}$$

$$\frac{x - 3}{12} = \frac{3x - 1}{10}$$

$$\frac{3x - 1}{5} = 4 + x$$

$$\frac{x + 6}{12} + \frac{2x - 4}{8} = -\frac{9 - 4x}{3}$$

$$\frac{3x - 1}{5} - \frac{x + 1}{3} = 4$$

$$\frac{2(x - 3)}{5} - \frac{3(x - 1)}{10} = 1 + \frac{x - 4}{2} - (x - 2)$$

2. Un pare té 35 anys i el seu fill 5. Al cap de quants anys serà l'edat del pare el triple de l'edat del fill?
3. Si al doble d'un nombre se li resta la seva meitat, resulta 54. Quin és el nombre?
4. La base d'un rectangle és el doble de la seva alçada. Quines són les seves dimensions si el perímetre mesura 30 cm?
5. Tres germans volen comprar un regal que val 103 €. Han decidit que el petit posarà la meitat de diners que el gran i el germà mitjà posarà 15 € més que el petit. Quants diners aportarà cada germà pel regal?

6. Se li pregunta a un pare per l'edat d'un fill i contesta: si dupliquem els seus anys i li restem el triple dels que tenia fa sis anys ens donarà l'edat actual. Quina és l'edat del fill?
7. Diuen que un dia un home va preguntar a Pitàgores quants alumnes tenia i li va contestar: "Tinc una meitat dels alumnes que només estudien geometria; una quarta part estudia només física; una setena part estudia filosofia i, a més, n'hi ha tres que combinen els estudis de les diferents branques. Així sabeu què estudien tots els meus alumnes". Quants alumnes tenia Pitàgores ?
8. En un examen tipus test de 20 preguntes et donen 2 punts per cada encert i te'n lleven 0,5 punt per cada error. Per aprovar cal obtenir al menys 20 punts, quantes preguntes s'han de contestar correctament com a mínim, per aprovar?
9. Busca dos nombres que difereixen en 4 unitats sabent que si restem el doble del més gran del triple del més petit el resultat és 4.
10. He pensat dos nombres que hauràs d'endevinar. Només et diré que si sumes 119 al primer obtens el doble del segon i que si restes 22 del segon obtens el triple del primer.
11. A l'escola d'idiomes la qualificació final s'obté amb un examen escrit que suposa el 65% de la nota i un examen oral que representa el 35%. Si un alumne va traure 12 punts entre tots dos exàmens i va obtenir un 5'7 de nota final, quina puntuació va obtenir en cadascú?
12. Fa 5 anys, l'edat de la Sònia era el doble de la que tenia en Pau. D'aquí a 8 anys, les edats de tots dos sumaran 56. Quants anys té ara cadascun?

Equacions de segon grau

1. Resol les equacions de segon grau següents:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x(-1 + x) = 0$$

$$2x^2 = 50$$

$$(2x + 3)(x - 1) = -x - 3$$

$$x(x + 2) = 168$$

$$6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$$

$$\frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 1}{3} = 10$$

$$\frac{x^2 - 3}{3} + \frac{x^2 - x + 1}{7} = 3$$

$$\frac{x^2 + 1}{5} + \frac{2x + 6}{10} = 2$$

2. El doble del quadrat d'un nombre positiu més el triple d'aquest nombre és 65. De quin nombre o nombres es tracta?
3. La base d'un rectangle és 5 cm més llarga que l'altura. La seva àrea mesura 104 cm². Quines són les dimensions d'aquest rectangle?
4. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 12 cm, i un catet mesura el triple que l'altre. Quant mesuren els catets d'aquest triangle?

5. La base d'un triangle és el doble de l'altura menys 4 cm. L'àrea del triangle és de 35 cm². Quant mesura la base? I l'altura?
6. El perímetre d'un rectangle és de 112 m. Calcula la seva àrea sabent que una de les seves dimensions és 5/9 de l'altra.
7. El perímetre d'un rectangle és 28 cm i la seva àrea 48 cm, quines són les seves dimensions?
8. Troba dos nombres naturals consecutius tals que la diferència dels seus quadrats sigui 17.

Sistemes d'equacions

1. Resol els sistemes d'equacions següents:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3y - 2x = 7 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 23 \\ 5x - 6y = 17 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3y - 7x = -9 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 6x + 8y = 20 \\ 5y + 3x = 8 \end{cases} \\
 \text{e) } \begin{cases} 3y + 2x = 8 \\ 3y - 2x = -2 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3y + 4x = -7 \end{cases} & \text{g) } \begin{cases} 2y + 3x = -2 \\ 6y - 5x = 78 \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} 7y - 5x = 18 \\ 3x + 6y = 30 \end{cases}
 \end{array}$$

2. Resol els sistemes d'equacions següents:

$$\begin{array}{lll}
 \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1 \end{cases} & \begin{cases} 2(x + y) = x - 2 \\ y + 1 = -(x - 2) \end{cases} & \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y-5}{3} = -1 \\ \frac{x+3}{3} + \frac{y-2}{2} = -1 \end{cases}
 \end{array}$$

Sol.: $x = -12; y = 35$

Sol.: $x = 4; y = -3$

Sol.: $x = 3; y = -4$

3. La suma de les edats d'en Ferran i el seu pare és 40 anys. L'edat del pare és 7 vegades la del fill. Quina edat tenen tots dos?
4. Troba dos nombres que sumen 24 sabent que el doble del primer més el triple del segon és 54.
5. Un hotel té, entre habitacions dobles i individuals, 120 habitacions. Si el nombre de llits és 195, quantes habitacions dobles té? I habitacions individuals?
6. Per a un berenar s'han comprat entrepans de pernil a 2,80 € la unitat i de formatge a 2,50 €. En total es paguen 48 € per 18 entrepans. Quants se'n compren de pernil?
7. Fa 5 anys, l'edat de la Sílvia era el doble de la que tenia en Pau. D'aquí 8 anys, les edats de tots dos sumaran 56. Quants anys té ara cadascun?