

TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

MATÈRIA:	Matemàtiques	CURS	4rt
PROFESSOR/A	Joan Antoni Belana		
Data entrega:	14-05-20	Mail d'entrega:	jbelana@xtec.cat

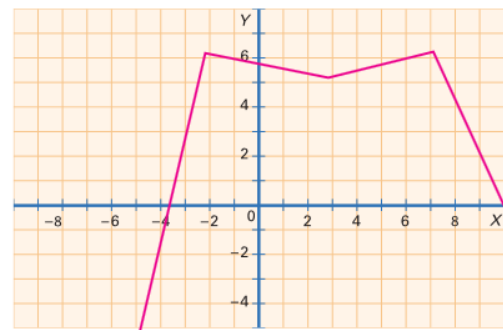
Haviem demanat fer els exercicis del 15 al 24. En aquest lliurament primer solucionarem aquests exercicis, després **demanarem els últims exercicis del capítol 25-26** i com sempre fem, **farem un examen virtual de prova** deixant l'examen veritable virtual per la propera setmana. Òbviament aquests exàmens s'han de fer sense cap ajuda i contestant el que un sap per a obtenir la nota correcta segons els teus coneixements adquirits. Per aquest examen, agafarem com sempre les preguntes finals del capítol, amb alguns petits canvis.

Però anem primer pel tema de les solucions dels exercicis 15-24.

15 | Dibuixa la gràfica d'una funció que tingui el comportament indicat a la taula:



x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, 7)$	$(7, +\infty)$
f(x)	Creixent	Decreixent	Creixent	Decreixent



16 | Deixem caure una pilota per una rampa. Passats 2 segons arriba al final de la rampa amb una velocitat de 6 m/s. Quina és la taxa de variació mitjana de la velocitat? Què representa la taxa de variació mitjana en aquest cas?



La taxa de variació mitjana és: _____

$$TVM(0,2) = \frac{6 - 0}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s}^2$$

En aquest cas, la taxa de variació mitjana representa l'acceleració de la pilota.



Aquí teniu les respostes del 15 i del 16. Poca cosa a comentar, molt fàcils.

Després ve la teoria



TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

- Una funció té un **màxim** en un punt si el valor de la funció en aquest punt és més **gran** que en la resta de punts propers.
- Una funció té un **mínim** en un punt si el valor de la funció en aquest punt és més **petit** que en la resta de punts propers.

Si la taxa de variació mitjana **decreix** en un interval, la funció és **convexa** en aquest interval. Aquesta situació es dona:

- Quan la funció creix cada cop més lentament.
- Quan la funció decreix cada cop més ràpidament.

En canvi, si la taxa de variació mitjana creix en un interval, aleshores la funció és **còncava** en aquest interval. Aquesta situació es dona:

- Quan la funció creix cada cop més ràpidament.
- Quan la funció decreix cada cop més lentament.

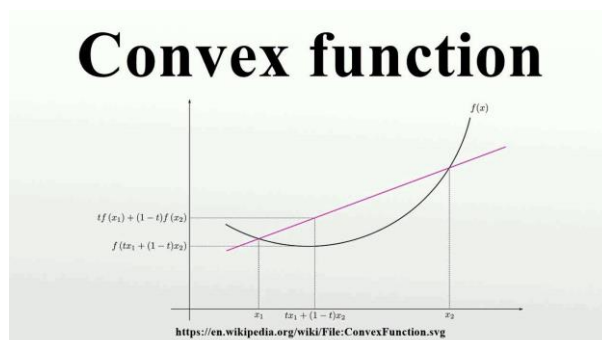
Quan la gràfica d'una funció passa de còncava a convexa o de convexa a còncava, el punt on es produeix aquest canvi és un **punt d'inflexió**.

Aquí sí que cal fer aclariments. Inclús si has contestat bé la pregunta, segurament al cap d'un temps si et fan la pregunta **¿Què és convexa? ¿Què és còncava? ¿Què és un punt d'inflexió?** I no sabràs contestar. No et preocupis, li passa a molta gent. El motiu és que amb tanta paraula i definició un no acaba d'assimilar el concepte bé.

El millor és veure un dibuix:

Vaig a posar a internet CONVEX FUNCTION (en el millor llenguatge per la ciència, l'anglès) secció IMATGES

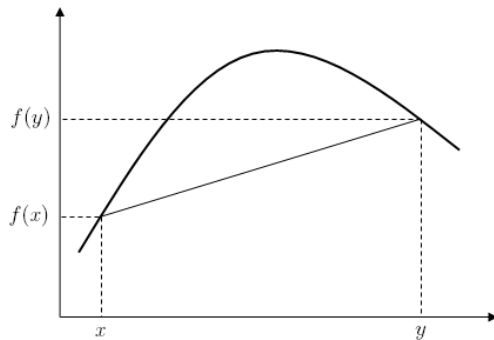
La resposta de GOOGLE és aclaparadora:



Hi posarem ara CONCAVE FUNCTION (també en anglès)

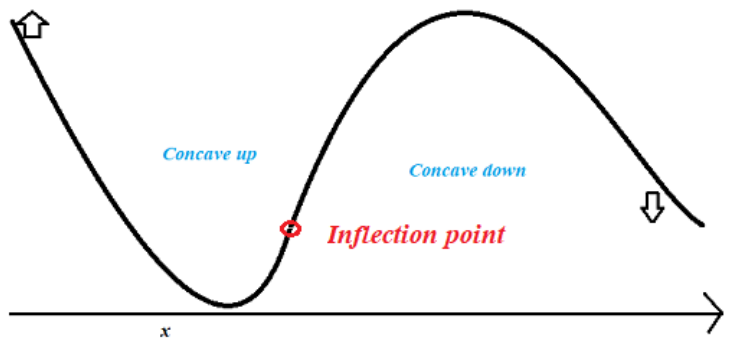
TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

CONCAVE FUNCTION



Visualment és molt clara la diferència. I què serà punt d'inflexió.

Aquí hem d'escriure INFLECTION POINT. I això surt



Per tant són punts de la gràfica on es passa de CÒNCAU a CONVEX o de CONVEX a CÒNCAU.

M'agrada pensar en la MOTOGP en aquest tema del punt d'inflexió.. concretament penso amb el moviment del motorista en una corba.. allà es veu, millor dit, es viu, el que és un **punt d'inflexió**.

Tornant a les solucions: Aquestes són les solucions de les preguntes 17 i 18

TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

- 17** | Per què diem que la taxa de variació en la gràfica de la dreta és més gran en passar de -4 a -3 que en passar de -5 a -4 ?



Calculem totes dues taxes de variació:

$$TVM(-4, -3) = \frac{f(-3) - f(-4)}{(-3) - (-4)} = \frac{(-2) - (-1)}{1} = -1$$

$$TVM(-5, -4) = \frac{f(-4) - f(-5)}{(-4) - (-5)} = \frac{-1 - 1}{1} = -2$$

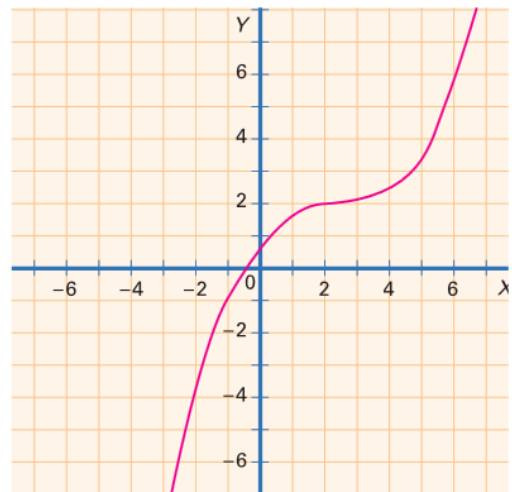
Atès que $-1 > -2$, aleshores $TVM(-4, -3) > TVM(-5, -4)$.



- 18** | Una funció pot tenir un punt d'inflexió sense presentar ni màxims ni mínims? En cas afirmatiu, dibuixa'n un exemple. En cas negatiu, justifica la resposta.



En el gràfic, s'observa una funció que presenta un punt d'inflexió en $x = 2$ sense tenir ni màxims ni mínims.



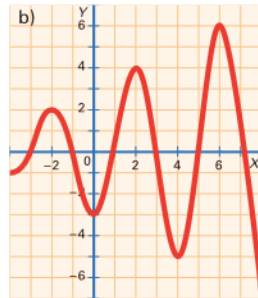
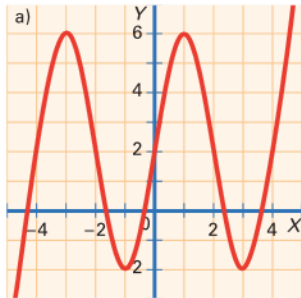
La pregunta 19 porta més feina:

TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

19 | Elabora la taula de creixement corresponent a les funcions següents i indica-hi els màxims i els mínims:



C9 C12



Si en un interval la taxa de variació mitjana d'una funció és cada cop més petita, la gràfica de la funció en aquest interval és **convexa**.

Si en un interval la taxa de variació mitjana d'una funció és cada cop més gran, la gràfica de la funció en aquest interval és **còncava**.

a.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f(x)	Creixent	Màxim	Decreixent	Mínim	Creixent	Màxim	Decreixent	Mínim	Decreixent

b.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, 6)$	6	$(6, +\infty)$
f(x)	Creixent	Màxim	Decreix.	Mínim	Creixent	Màxim	Decreix.	Mínim	Creixent	Màxim	Decreix.

Observeu com tots els intervals porten un parèntesi () i no un claudàtor []. Per exemple, en l'exercici a) la funció és creixent des de $-\infty$ fins a -3 . No podem arribar a -3 perquè -3 s'estudia després i es posa MÀXIM.

La resposta de l'exercici 20:

TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

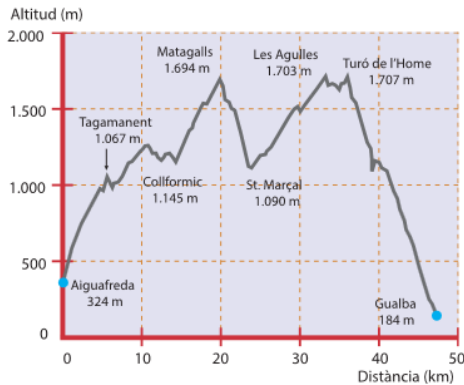
20 | La gràfica mostra el perfil d'una marxa pel Montseny.



C7 C8



C9 C10



Dissabte vinent farem una marxa pel Montseny. Ens ajudes a prepara-la?



a. Quin és el màxim absolut?

És el Turó de l'Home (1.707 m).

b. Quina és la taxa de variació mitjana entre Aiguafreda (km 0) i Tagamanent (km 6)?

Calculem la taxa de variació entre Aiguafreda i Tagamanent. Expressarem totes les mesures en quilòmetres. $TVM(0, 6) = \frac{f(6) - f(0)}{(6) - (0)} = \frac{1,067 - 0,324}{6} = 0,124$. La taxa de variació és de 0,124 km de desnivell per cada quilòmetre avançat.

c. Què indica el signe d'aquesta taxa de variació mitjana? I el valor?

El signe positiu indica que la inclinació és ascendent, mentre que el signe negatiu indica que la inclinació és descendent. Com més gran és el valor absolut, la inclinació és més gran, ja sigui ascendent o descendent.

És el típic exercici de veure una gràfica i fer uns càlculs segons les dades de la gràfica. Més interessant és el tema següent: SIMETRIA I PERIODICITAT

Comencem per la teoria:



TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

La gràfica d'una funció és **simètrica respecte a l'eix d'ordenades** si a qualsevol valor x de la variable independent i al valor oposat $-x$ els correspon una mateixa imatge. Formalment s'expressa així:

$$f(x) = f(-x)$$

La gràfica d'una funció és **simètrica respecte a l'origen de coordenades** si per a qualsevol valor x de la variable independent es compleix:

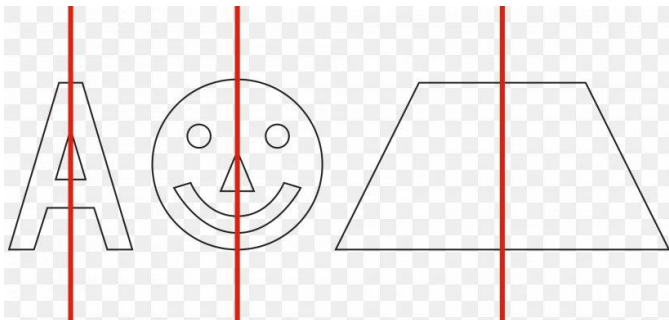
$$f(-x) = -f(x)$$

Quan una relació funcional entre magnituds correspon a un fenomen que es va repetint de forma idèntica, els valors de la funció es repeteixen transcorregut un cert interval de la variable **independent**. Quan passa així, diem que la funció és **periòdica**.

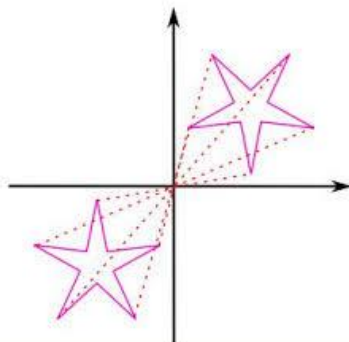
- Una funció és **periòdica** si els valors de la variable dependent es repeteixen a intervals iguals de la variable independent.
- En una funció periòdica, hi ha una **constant T** , anomenada **període de la funció**, tal que transcorregut un interval de longitud T , la gràfica de la funció es repeteix.

$$f(x) = f(x + T)$$

Estem amb el mateix d'abans.. no ens assabentem de res fins que no veiem dibuixos o imatges explicatives. Aquí tenim un graciós exemple de **SIMETRIA AXIAL**, també anomenada Simetria ESPECULAR. Hi ha una recta que fa de mirall. Aquesta recta no té perquè ésser horitzontal o vertical. Pot tenir qualsevol direcció.



La **simetria CENTRAL** és molt diferent:



TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

En aquest cas, tot es reflecteix per un punt, que no necessàriament cal que sigui el (0,0). Pot ser, qualsevol punt. La simetria especular és molt interessant, ja que per exemple, si tu ets esquerrà, el teu doble jo simètric especular és dret i a l'inrevés. Per tant, el teu doble simètric és molt semblant a tu, però no ets exactament igual a tu.

21 | Una funció pot tenir simetria axial respecte a l'eix d'abscisses? Per què?

Resposta: NO!... l'eix X no pot ser mai l'eix de simetria especular d'una funció. Ja que aleshores una mateixa X tindria 2 imatges exactament iguals. Però una funció, per definició només té una imatge per cada x.

22 | Quines d'aquestes funcions tenen simetria respecte a l'eix d'ordenades?



C9 C10

a. $f(x) = x^4$

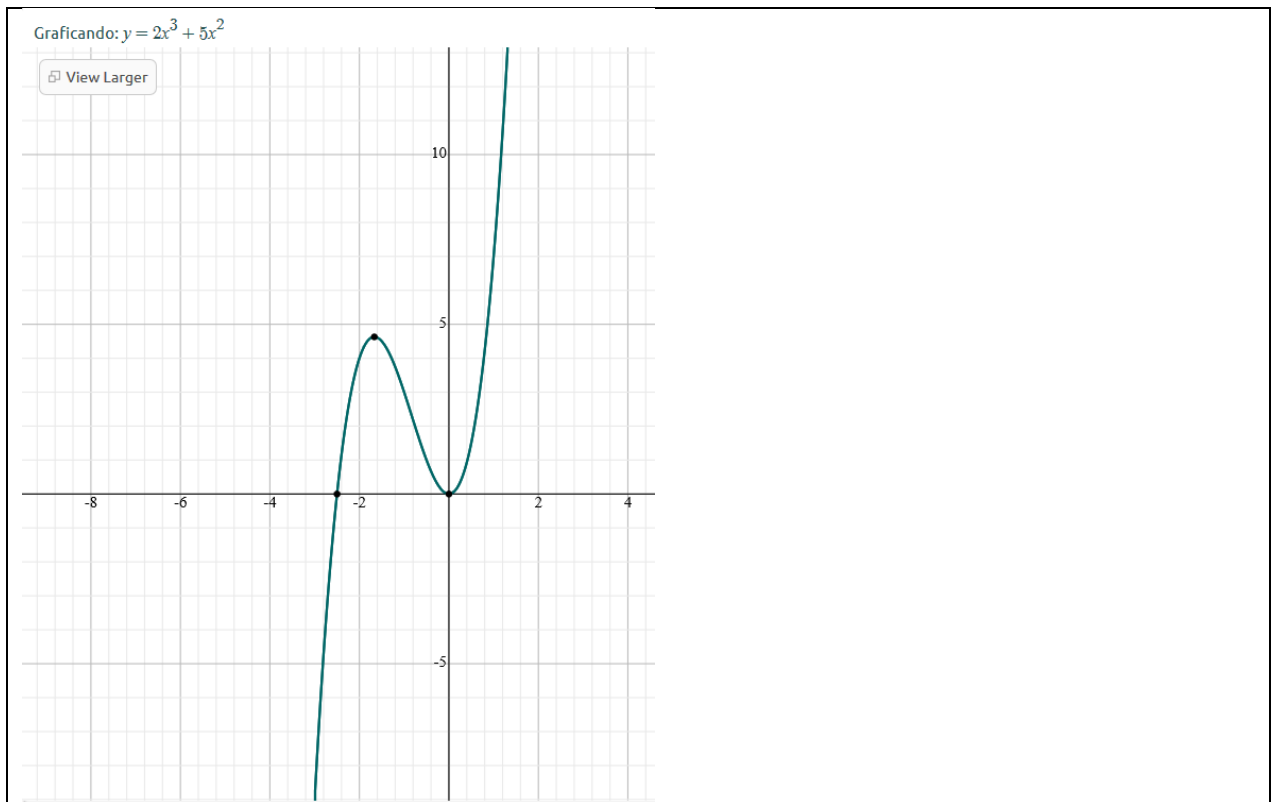
c. $f(x) = 7x^2 + 1$

b. $f(x) = 2x^3 + 5x^2$

d. $f(x) = 3x^4 + 5x^2$

Resposta: Degut a que x^4 dona el mateix per positius i negatius, $f(x) = x^4$ és simètrica respecte a l'eix Y. En el solucionari del llibre diu que la b) i la d) també són simètriques respecte a l'eix y. Si bé la d) és cert, degut a que la b) té x^3 no podrà ser simètrica respecte a l'eix Y. S'ha equivocat el llibre... la que les simètriques són: la a) c) i d). Per si de cas, he dibuixat la b)

TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT



Ja veieu que no té res de simètrica respecte a l'eix Y.

23 | Quines d'aquestes funcions són simètriques respecte a l'origen de coordenades?



a. $f(x) = 2x + 4x^7$

b. $f(x) = 5x^3$

c. $f(x) = x^3 + x^2 + 3$

d. $f(x) = \frac{1}{x}$

Respecte al (0,0)...o sigui...simetria central. El quadrant 1 es reflecteix al quadrant 3 i el 2 al quadrant 4. Aquí passa el contrari d'abans...tot el que sigui elevar a un nombre parell seria perjudicial. La resposta és a) c) i d).

Arribem a l'últim exercici:

24 | Completa les taules d'aquestes funcions sabent que són periòdiques i amb el període indicat:



a. Període = 15

x	0	5	10	15	20	25	30	35
f(x)	1	3	-2	1	3	-2	1	3

b. Període = 9

x	0	3	6	9	12	15	18	21
f(x)	-1	1	2	-1	1	2	-1	1



TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

Les funcions periòdiques es repeteixen cada cert temps (anomenat període). Per tant a la pregunta a), el període és 15. Si per $x=0$ val 1, per $x=15$ haurà de tornar a ser 1. I després tot segueix repetint-se. Més difícil era la b). Si el període és 9 i a 9 val -1, a 18 haurà de ser també -1 i també a 0. Si a 21 val 1 tal com diuen, a $21-9=12$ haurà de ser igual a 1 i a $12-9=3$ també val 1. Si a 6 val 2, a 15 també val 2.

Us recordo que MANQUEN els EXERCICIS 25-26 per fer!

EXAMEN PROVA:

La funció $f(x)$ assigna a cada nombre la meitat del seu quadrat:

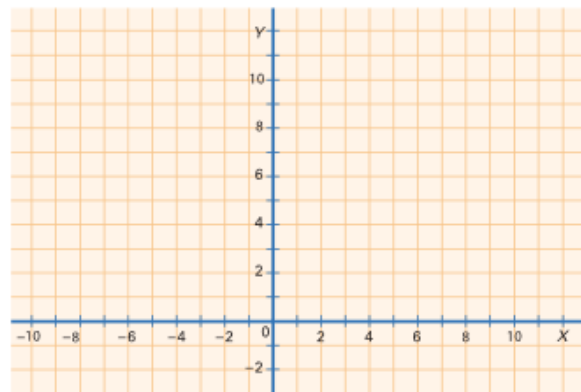
a) Calcula $f(-2)$ i $f(3)$.

b) Quins valors de la variable independent tenen imatge igual a 18?

c) Escriu una fórmula que expressi la funció.

d) Indica el domini i el recorregut de la funció.

Dibuixa la gràfica d'una funció periòdica de període 6, que sigui simètrica respecte de l'eix d'ordenades i que tingui un mínim relatiu a $(0, 2)$ i un màxim relatiu a $(4, 5)$.



Calcula la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = 2x^2 - 1$ a l'interval $[-1, 2]$.



TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

Calcula la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = 2x^2 - 1$ a l'interval $[-1, 2]$.

Determina el domini de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$

b) $f(x) = \frac{2x - 8}{6 + 3x}$

La taxa de variació mitjana d'una funció és 2,5 a l'interval $[-3, 2]$. Sabent que la imatge de $x = 2$ és 10, troba la imatge de $x = -3$.

7) Quin és el domini i recorregut de la funció $f(x) = \sqrt{2x - 5}$

8) Quin és el domini i recorregut de la funció $f(x) = \frac{2}{x-6}$

9) Quina d'aquestes dos funcions és la còncava i quina és la convexa $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ i $g(x) = -5x^2 - x + 10$

10) D'aquestes funcions has de dir: si tenen o no simetria i si tenen simetria si és axial o especular:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 8$

c) $f(x) = -x$

d) $f(x) = 1/x$

e) $f(x) = 1/x^2$

I això és tot per ara amics/ amigues, fins a la propera tasca!

TASQUES D'AMPLIACIÓ (OPCIONAL/VOLUNTARI)

a) Quina eina important falta en el PAINT de WINDOWS des de l'època de Matusalem (és a dir 1993 cap endavant i sembla que els de Microsoft mai la

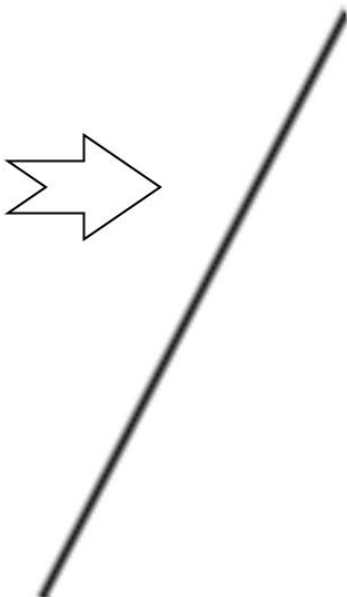


TASQUES ACADÈMIQUES DURANT EL PERIODE DE CONFINAMENT

posaran, ni en el Windows 3.1, Windows 95, Windows 2000, XP, Vista, Windows 7, 8 o Windows 10 o següents) que fa molt difícil sinó impossible de fer simetries especulars amb rectes inclinades?

b) Es pot fer amb el GIMP, PHOTOSHOP o Paint.net?

c) Quin seria el procediment per fer la simetria especular en aquesta imatge?



Al finalitzar la tasca contesta aquestes preguntes (inclou-les al full d'exercicis)

Quan temps has dedicat a fer l'exercici?

Com t'ha semblat l'exercici: llarg curt altres: _____

Has tingut alguna dificultat per fer-lo o entregar-lo? Quina?

Observacions: