

El que has de dominar abans de fer l'assignatura de: **Matemàtiques II de 2n de Batxillerat**

Introducció

Les Matemàtiques II de 2n de Batxillerat requereixen una sèrie de coneixements que se suposen apresos en cursos anteriors.

Per poder seguir correctament el curs, és important dominar alguns continguts bàsics de 1r de Batxillerat i 4t d'ESO. Aquest dossier és un recull d'exercicis per repassar les eines més importants abans de començar l'assignatura de Matemàtiques II de 2n de Batxillerat.

Quan he de fer aquests exercicis?

Aquests exercicis són per fer abans de començar el segon de batxillerat. **Els has de portar fets el primer dia de classe** de matemàtiques II. No cal que copiis els enunciats. Els pots fer en fulls blancs o quadriculats. No cal presentar-los amb portada ni índex ni dossier ni "fastner", però **tots els fulls han de portar el teu Nom i Cognom**.

Què faig si no entenc alguna cosa?

Pots preguntar a ChatGPT

Pots buscar videos a partir del títol de la secció. (Regla Ruffini, Equació 1r grau...)

Pots preguntar a oolive@inslaferreteria.cat (Però no esperis una resposta immediata)

Bloc 1 – Àlgebra essencial

Regla de Ruffini:

La regla de Ruffini permet dividir un polinomi entre un binomi. També és útil per trobar arrels d'un polinomi.

Efectueu la següent divisió: $(-3x^5 + 4x^3 - 5x + 1) : (x - 2)$

1 En la primera fila col·loquem els coeficients del dividend ordenats segons les potències decreixents.

4 Els nombres de la segona fila s'aconsegueixen multiplicant el terme independent del divisor per l'últim nombre aconseguit de la tercera fila:

$2 \cdot (-3) = -6$ $2 \cdot (-6) = -12$
 $2 \cdot (-8) = -16$ $2 \cdot (-16) = -32$
 $2 \cdot (-37) = -74$

2 Terme independent del divisor canviat de signe

2	-3	0	4	0	-5	1
	-6	-12	-16	-32		-74
	-3	-6	-8	-16	-37	-73

3 Coeficient principal del dividend

5 Suma dels nombres superiors.

6 Suma dels nombres superiors. És el residu de la divisió.

7 Els coeficients del polinomi quocient són els nombres de la tercera fila menys el darrer que és el residu. En aquest cas els coeficients són: $(-3, -6, -8, -16, -37)$

Per tant el quocient és $-3x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 16x - 37$
El residu és $R = -73$

Exercici 1. Dividiu el polinomi $2x^4 - 3x^2 + 5x + 1$ entre $x - 2$

Obs: el residu t'ha de sortir 31

Exercici 2. Troveu el residu de la divisió $(x^5 + 7) : (x + 2)$

Obs: hauria de donar -25

Exemple: Resol l'equació $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$

	1	1	-6	-4	8	
1		1	2	-4	-8	
	1	2	-4	-8	0	
2		2	8	8		
	1	4	4	0		
-2		-2	-4			
	1	2	0			
-2		-2				
	1	0				

Les solucions són $x = 1$, $x = 2$, $x = -2$

Exercici 3. Resoleu les següents equacions:

a) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$

b) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12 = 0$

c) $x^4 + x^3 - 19x^2 - 49x - 30 = 0$

d) $x^4 + 10x^3 + 37x^2 + 60x + 36 = 0$

Equacions 1r grau

Exemple:

✚ Resoldre l'equació: $\frac{7(x-1)}{3} + \frac{5x}{6} = 1 - \frac{x}{2}$

➤ *Primer pas: Suprimir els denominadors.*

El mínim comú múltiple dels denominadors és 6, multipliquem per 6 tota l'equació.

$$\frac{6 \cdot 7(x-1)}{3} + \frac{6 \cdot 5x}{6} = 6 \cdot 1 - \frac{6 \cdot x}{2} \Rightarrow 14(x-1) + 5x = 6 - 3x$$

➤ *Segon pas: Efectuar els parèntesis:*

$$14x - 14 + 5x = 6 - 3x$$

➤ *Tercer pas: Transposar termes i simplificar:*

$$14x + 5x + 3x = 6 + 14 \Rightarrow 22x = 20$$

➤ *Quart pas: aïllar la incògnita, i simplificar el resultat.*

$$x = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$$

➤ *Cinquè pas: Comprovar la solució.*

Substituïm el resultat obtingut a l'equació donada i comprovem que es verifica la igualtat.

Exercici 4: Resol aquestes equacions.

a) $\frac{4x+2}{5} - \frac{4x}{3} = \frac{2(x+13)}{15}$

b) $\frac{3x+5}{2} + \frac{4x-5}{5} = \frac{7x+1}{6} + 7$

c) $\frac{9x-1}{7} - \frac{5x+8}{4} = x-6$

d) $5x - \frac{2x+1}{3} = 2x + \frac{15x-9}{6}$

Equacions de 2n grau i biquadrades

Per resoldre una equació de 2n grau del tipus:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

s'utilitza la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exercici 5: Aplica la fórmula per resoldre aquestes equacions.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$

b) $12x^2 - x - 1 = 0$

c) $x^2 - 4x + 1 = 0$

d) $x^2 + 5x + 6 = 0$

Exercici 6: Primer opera i després resol.

a) $1 - x^2 = 2x^2 - 1 + x$

b) $2(x - 3)(x - 5) = 0$

c) $(x - 4)^2 = 2x^2 - 15 + 22$

d) $\frac{2(x - 2)}{5} + 2x = \frac{3x^2 + 4}{4}$

Una equació biquadrada és una equació que té x^4 i x^2

Resoleu: $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

RAONAMENT

Efectuar canvi de variable: $t = x^2$ $4t^2 - 17t + 4 = 0$

Resoldre l'equació $t = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8} = \begin{cases} 1/4 \\ 2 \end{cases}$

Desfer el canvi de variable $\begin{cases} x^2 = 1/4 & x = \pm 1/2 \\ x^2 = 2 & x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$

Exercici 7: Resol les següents equacions biquadrades.

a) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

c) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Sistemes d'equacions

Anem a resoldre el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ pel mètode de reducció.

Multiplicant la primera equació per 2 i la segona per 3, obtenim el sistema $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x - 6y = 12 \end{cases}$, i sumant ambdues equacions ens queda que $13x = 26$, d'on $x = 2$.

El nou sistema equivalent serà: $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x = 2 \end{cases}$. Si substituïm en la primera equació el valor de x per $x = 2$, tenim que $2 \cdot 2 + 3y = 7$, i per tant, $y = 1$. La solució és: $x = 2$ i $y = 1$.

Exercici 8: Resoleu pel mètode de reducció els següents sistemes.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

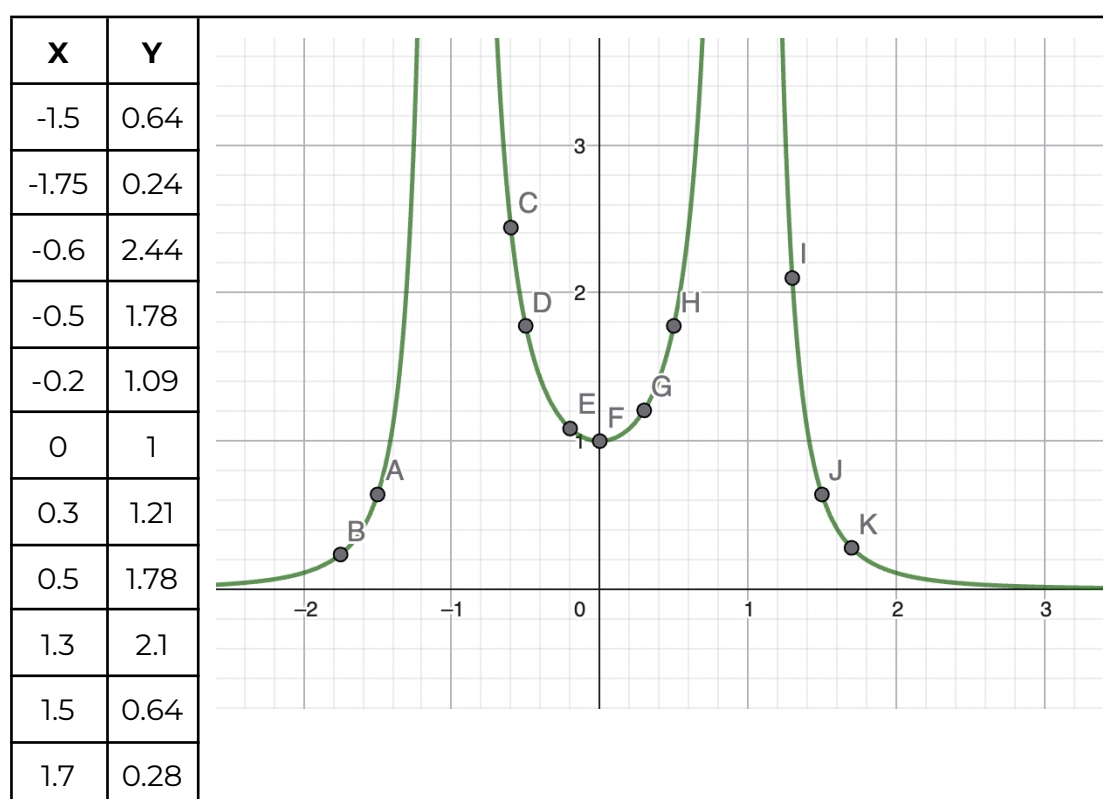
d) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

Bloc 2 – Funcions

Exemple: Estudia la funció

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

- **Domini:** la divisió no es pot fer entre zero, per tant hem de trobar els punts en que $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$. Els resultats són $x=1$ i $x=-1$ i el domini és $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Punts de tall:** quan la x és 0 el resultat és 1. Quan $f(x) = 0$ no hi ha cap valor de x que dongui $f(x) = 0$. Conclusió, l'únic punt de tall és $(0, 1)$
- **Dibuix de la gràfica:** cal posar valors a x i obtenir el valor de $f(x)$. Després de dibuixar en uns eixos ens queda aquesta funció:



- **Creixement/decreixement i maxims/minims:**
és creixent de $-\infty$ a -1 i de 0 a 1 . És decreixent de -1 a 0 i de 1 a $+\infty$.
Té un mínim en $(0, 1)$. No té cap màxim.

Exercici 9: Estudia cadascuna de les següents funcions.

a)	b)	c)
$f(x) = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{12} - 2x$	$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$	$f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}$

Bloc 3 — Geometria i vectors

Exemple:

Si $\vec{u} = (-4, 3)$ i $\vec{v} = (2, -1)$, troba: $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ i $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = -4 \cdot 2 + 3(-1) = -11$$

Troba l'angle entre els vectors u i v de l'exercici anterior

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \alpha$$

$$-11 = 5 \cdot 2,23606797749979 \cdot \cos \alpha$$

$$-11 / 11,18034 = \cos \alpha$$

$$-0,9839 = \cos \alpha \longrightarrow \alpha = 10,30^\circ$$

Exercici 10: Troba el mòdul del vector $u = (-3, 6)$.

Exercici 11: A un vector de mòdul 1 se l'anomena unitari.

Comprova que el vector $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$ és unitari.

Exercici 12:

Donats els vectors $\vec{a} = (3, 4)$ i $\vec{b} = (6, 3)$, calcula:

- a) el seu producte escalar,
- b) l'angle que formen,
- c) l'angle que formen els vectors $2\vec{a}$ i $5\vec{b}$,
- d) l'angle que formen els vectors $-3\vec{a}$ i $2\vec{b}$
- e) i l'angle que formen els vectors $-2\vec{a}$ i $-3\vec{b}$.

Bloc 4 — Per pensar

Exercici 13:

Determineu m a fi que la divisió $(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x + m) : (x + 1)$ tinga per residu 3.

Exercici 14:

Resoleu els següents sistemes d'equacions no lineals:

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x \cdot y = 1000 \\ 2x + y = 120 \end{cases}$$

Exercici 15:

El vector $\vec{PQ} = (-4, 8)$ té l'origen en el punt $P(6, -1)$. Determina les coordenades de l'extrem Q i el mòdul d'aquest vector.

Exercici 16:

El vector $\vec{PQ} = (3, -6)$ té l'extrem en el punt $Q(2, 1)$. Determina les coordenades de l'origen P i el mòdul d'aquest vector.

Exercici 17:

Calcula el valor de k perquè els punts $A(4, 1)$, $B(1, 2)$ i $C(k, k-1)$ estiguin alineats.

Bloc final — “Posa’t a prova”

Aquest apartat és una petita prova final per comprovar si tens els coneixements bàsics necessaris per començar Matemàtiques II de 2n de Batxillerat.

Intenta resoldre els exercicis sense mirar els exemples anteriors. Per començar bé el curs, procura fer aquests exercicis uns dies abans de començar les classes.

Exercici 18 — Ruffini i factorització

Divideix el polinomi $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ entre $(x - 2)$ utilitzant la regla de Ruffini:

Exercici 19 — Equacions

Resol aquestes equacions:

a) $\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} - 2 = 1 - \frac{1}{3}$

b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

Exercici 20 — Sistemes d'equacions

Resol el sistema

$$2x + y = 7$$

$$3x - 2y = 4$$

Exercici 21 — Funcions

Estudia la funció següent:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 1}$$

Exercici 22 — Vectors

Donats els vectors

$$u = (3, -4)$$

$$v = (-1, 2)$$

calcula;

- el mòdul de cada vector
- el producte escalar
- l'angle que formen