RECULL DE PROBLEMES I QÜESTIONS DE SELECTIVITAT SOBRE DERIVADES (AMB SOLUCIÓ)

1) PAU 1999 Sèrie 1 Problema 1:

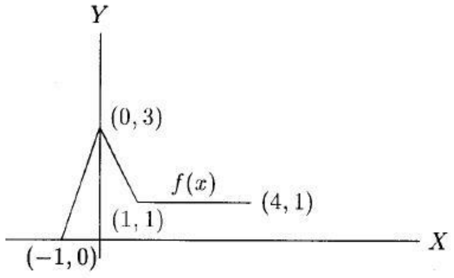
Donada la funció $f(x)=x-4+\dfrac{16}{x-4}$

a) Estudieu-ne la continuïtat.
b) Estudieu-ne els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims locals.
c) Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix **OX** i les rectesverticals $x=0$ i $x=2$.

Solució

2) PAU 1999 Sèrie 2 Qüestió 1:

La gràfica d'una funció és la que hi ha en el dibuix següent. Quina és la gràfica de la seva funció derivada? En quins punts és discontínua la derivada?



Solució

3) PAU 1999 Sèrie 2 Problema 1:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{1}{8x-x^2}$

a) Trobeu el domini de $f(x)$ i les asímptotes.

b) Determineu el signe de la funció en el seu domini (determinar el signe de $f(x)$ vol dir establir per a quins valors de x es compleix $f(x)\geq 0$ i per a quins $f(x)\leq 0$).

c) Trobeu-ne els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.
d) Feu un esquema de la gràfica de la funció.

Solució

4) PAU 1999 Sèrie 5 Problema 1:

Trobeu l'altura i el radi de la base del cilindre de volum màxim inscrit en una esfera de radi 1.

Solució

5) PAU 1999 Sèrie 6 Problema 1:

Considereu la funció $y=f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$

a) Feu un estudi de les seves asímptotes.
b) Calculeu els punts en què aquesta funció té extrem relatiu i digueu per a quins intervals del domini la funció és creixent.
c) Feu un esbós de la gràfica de la funció a partir de les dades obtingudes en els apartats anteriors.

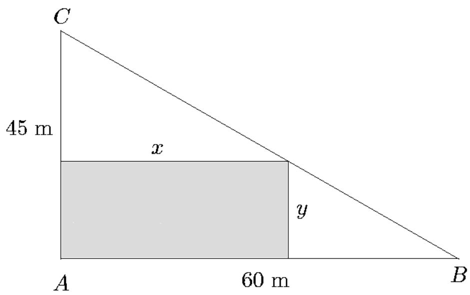
Solució

6) PAU 2000 Sèrie 1 Qüestió 1:

Calculeu els valors de *a* tals que les tangents a la gràfica de la funció $f(x)=ax^3+2x^2+3$ en els punts d'abscisses $x=1$ i $x=-1$ siguin perpendiculars entre si.

Solució

7) PAU 2000 Sèrie 1 Problema 1:
Un terreny té forma de triangle rectangle, els catets mesuren *AB* = 60 m i *AC* = 45 m. En aquest terreny es pot construir una casa de planta rectangular com indica la part ombrejada de la figura següent:



Voleu vendre aquest terreny i us paguen 5.000 pessetes per cada metre quadrat no edificable i 25.000 pessetes per cada metre quadrat edificable.
a) Determineu la relació que hi ha entre l'amplada *x* i la profunditat *y* del rectangle que determina la part edificable.
b) Determineu l'expressió que dóna el valor del terreny en funció de l'amplada *x* del rectangle edificable.
c) Quines són les dimensions de la part edificable que ens permeten obtenir un valor màxim per a aquest terreny?
d) Quin és aquest valor màxim?

Solució

8) PAU 2000 Sèrie 2 Qüestió 1:
a) Trobeu els extrems relatius de la funció polinòmica $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-3$ i calculeu els valors de $f(x)$ en aquests punts. A partir d'aquestes dades, feu undibuix aproximat de la seva gràfica.
b) Demostreu que l'equació $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-3=0$ té, exactament, tres solucions reals.

Solució

9) PAU 2000 Sèrie 2 Problema 1:
El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.
a) Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.
b) Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle sigui màxima i els punts per als quals sigui mínima.

Solució

10) PAU 2000 Sèrie 3 Qüestió 2:
Determineu els punts de la gràfica de $f(x)=x^4+5x$ on la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant. Calculeu l'equació d'aquestesrectes tangents.

Solució

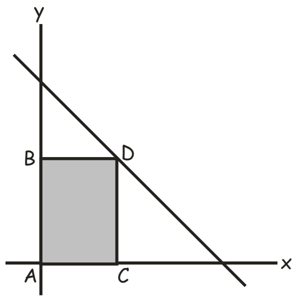
11) PAU 2000 Sèrie 3 Problema 1:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x^2}{x+a}$, on *a* és un paràmetre.

a) Calculeu *a* sabent que la recta *y* = x + 2 és una asímptota obliqua d'aquesta funció.
b) Prenent el valor de *a* obtingut en l'altre apartat, calculeu el domini, les interseccions de la gràfica amb els eixos, els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de la funció *f*. Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció a partir de les dades que heu obtingut.

Solució

12) PAU 2000 Sèrie 5 Qüestió 2:
Considereu els rectangles del pla, els vèrtexs A, B, C i D dels quals compleixen les condicions següents: a) A és l'origen de coordenades; b) B és a sobre del semieix de les $y>0$; C és a sobre del semieix de les $x>0$; d) és a sobre de la recta d'equació $2x+y=1$, tal com es veu en la figura següent:



D'entre tots aquests rectangles, trobeu l'àrea del que la té màxima.

Solució

13) PAU 2000 Sèrie 6 Qüestió 2:

Donada la funció $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, determineu l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt on s'anul·la la segona derivada.

Solució

14) PAU 2001 Sèrie 2 Problema 2:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{2x^2+1}$

a) Determineu les seves asímptotes.
b) Calculeu els intervals on creix i on decreix, i els extrems relatius.
c) D'acord amb els resultats que heu obtingut, dibuixeu aproximadament la seva gràfica.
d) Fixant-vos en la gràfica anterior, expliqueu quina seria la gràfica de la funció $g(x)=-f(x)+3$ (feu-ne un esquema). En quins punts té màxims la funció $g(x)$?

Solució

15) PAU 2001 Sèrie 4 Qüestió 3:

Considereu la funció definida per $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \ \ x\le 0 \\ 2x+1 & si \ \ x>0 \end{cases}$ on **a** és un nombre real.

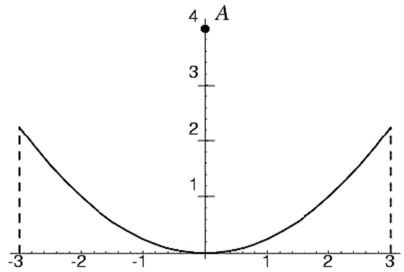
a) Calculeu $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i comproveu que $f(x)$ és contínua en $x=0$.

b) Per a quin valor del paràmetre ***a*** la funció $f(x)$ és derivable en $x=0$?

Solució

16) PAU 2001 Sèrie 4 Problema 1:

La riba d'un tram de riu descriu la corba $y=\frac{1}{4}x^2$ per a x entre –3 i 3, i en elpunt A = (0, 4) hi ha un poble, tal com es pot veure en l'esquema següent:



a) Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa x.
b) Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?
c) Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2?

Solució

17) PAU 2001 Sèrie 5 Qüestió 1:

Per a cada valor del paràmetre $a\in\mathbb{R}$, considereu la funció $f(x)=x+\frac{3-a}{x}$ (definida per a tots els valors de x diferents de 0).
a) Determineu per a cada valor del paràmetre *a*, els extrems relatius que té la funció $f(x)$.

b) Per a quins valors del paràmetre *a* la funció $f(x)$ és sempre creixent?

Solució

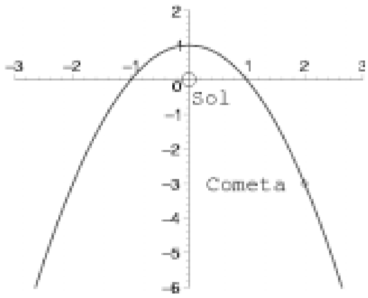
18) PAU 2002 Sèrie 1 Qüestió 2:

Se sap que la derivada d'una funció $f(x)$ és: $f'(x)=\frac{x^2+x-6}{x+1}$

Calculeu les abscisses dels punts on la funció $f(x)$ té els seus extrems relatius, especificant per a cada un dels valors que obtingueu si es tracta d'un màxim od'un mínim relatiu.

Solució

19) PAU 2002 Sèrie 1 Problema 1:
Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola $y = 1 - x^2$, tal com es veu a la figura següent:



a) Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?
b) Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?
c) Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?
d) Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màximlocal o relatiu?
Nota: Teniu present que la distància entre dos punts és màxima o mínima quan el quadrat de la distància és màxim o mínim.

Solució

20) PAU 2002 Sèrie 2 Qüestió 2:
Sabent que la funció $y = (x+a)(x^2-4)$, on a és un nombre real, té un màxim i un mínim relatius, i que el màxim relatiu s'assoleix en el punt $x = -\frac{1}{3}$, trobeu l'abscissa del mínim relatiu.

Solució

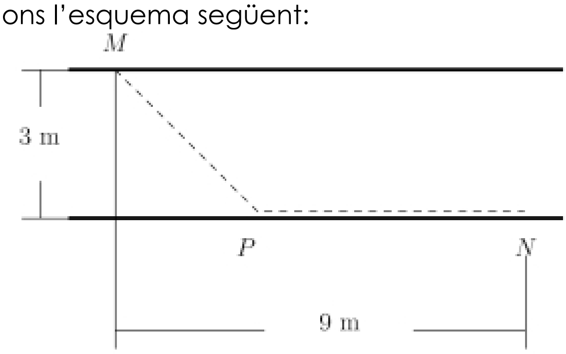
21) PAU 2002 Sèrie 3 Problema 1:
S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de $81\pi\ m^3$ de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 € el m^2 i les dues bases amb un material que costa 45 € el m^2.
a) Determineu la relació que hi haurà entre el radi *r* de les bases circulars i l'altura *h* del cilindre, i doneu el cost *C(r)* del material necessari per construiraquest dipòsit en funció de *r*.
b) Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit perquè el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?
c) Quin serà, en aquest cas, el cost del material?

Solució

22) PAU 2003 Sèrie 2 Qüestió 1:
Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt $P = (1, -1)$ i que són tangents a la corba d'equació $y = (x-1)^2$.

Solució

23) PAU 2003 Sèrie 2 Problema 1:
Volem unir el punt *M* situat en un costat d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt *N* situat a l'altre costat i 9 m més avall mitjançant dos cables rectes, un des de *M* fins a un punt *P* situat a l'altre costat del carrer i un altre des de *P* fins a *N* seguint el mateix costat del carrer, segons l'esquema següent:



El cost de la instal·lació del cable *MP* és de 12 € per metre i del cable *PN* de 6 € per metre.
Quin punt *P* haurem d'escollir de manera que la connexió de *M* amb *N* sigui tan econòmica com sigui possible? Quin serà aquest cost mínim?

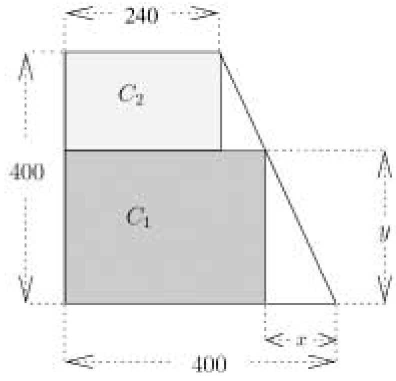
Solució

24) PAU 2003 Sèrie 3 Qüestió 2:
Calculeu el punt de la corba $y = 2 + x - x^2$ en què la tangent és paral·lela a la recta $y = x$.

Solució

25) PAU 2003 Sèrie 3 Problema 1:

Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m, i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars C1 i C2. Anomenem x i y els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.



a) Comproveu que $y = \frac{5}{2}x$.

b) Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps enfunció de x.

c) El camp C1 es vol sembrar amb blat de moro i el camp C2 amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per m^2 i amb el blat un benefici de 0,10 €per m^2. Determineu les mides de cada un dels camps per obtenir el beneficimàxim.

Solució

26) PAU 2003 Sèrie 5 Qüestió 1:

Determineu quin és el punt de la gràfica de $y=\sqrt{x}$ (és a dir, de la forma $\left(x,\sqrt{x}\right)$) que és més a prop del punt $P=\left(4,0\right)$.

Solució

27) PAU 2003 Sèrie 5 Problema 1:

a) Determineu el valor del paràmetre *a* que fa que la funció $f\left(x\right)=\dfrac{x+a}{x^3}$ presenti un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=3$.
b) Per a aquest valor del paràmetre *a*, calculeu els intervals de creixement idecreixement, i les asímptotes de la funció.
c) A partir de les dades que heu obtingut, feu una gràfica aproximadad'aquesta funció.

Solució

28) PAU 2004 Sèrie 1 Problema 1:

Considereu la funció $f\left(x\right)=x^3+mx^2+1,\ m\geq 0$.

a) Calculeu el valor de *m* per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix *OX* i les rectes x = 0 i x = 2 sigui de 10 unitats quadrades.
b) Per a *m* = 1, indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de 45° amb el semieix positiu de *OX*.

Solució

29) PAU 2004 Sèrie 1 Problema 2:

Donats la funció $f\left(x\right)=\sqrt{x}$ i el punt *A*(2, 0) situat sobre l'eix de les abscisses:

a) Trobeu la funció que expressa la distància del punt *A* a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.

b) Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f\left(x\right)$ més proper a *A*.

Solució

30) PAU 2004 Sèrie 3 Qüestió 1:

Considereu la funció $f\left(x\right)=x^3-3x^2+2x+2$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f\left(x\right)$ en el punt d'abscissa $x=3$.

b) Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de $f\left(x\right)$ que sigui paral·lela a laque heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

Solució

31) PAU 2004 Sèrie 3 Qüestió 3:

Considereu la funció $f(x)=1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{6}{x^2}$ on *a* és un paràmetre.

a) Calculeu el valor del paràmetre *a* sabent que $f(x)$ té un extrem relatiu en el puntd'abscissa $x=3$.
b) Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

Solució

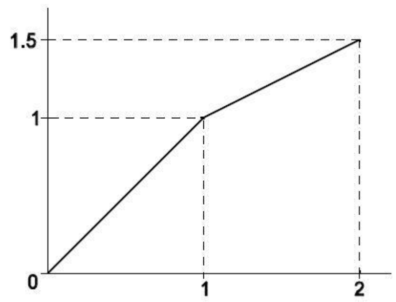
32) PAU 2004 Sèrie 4 Qüestió 3:

El consum d'un cotxe depèn de la seva velocitat *v* (expressada en km/h) segons la funció $f(v)=\dfrac{3e^{0,012v}}{v}$ (en litres/km). Quina és la velocitat més econòmica?

Solució

33) PAU 2004 Sèrie 4 Qüestió 4:

Considereu la funció *f(x)* de la figura definida a l'interval [0, 2].



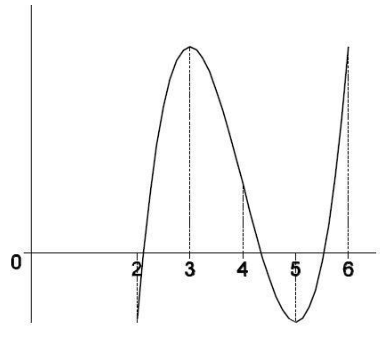
a) Calculeu la funció derivada *f'(x)* a l'interval (0, 2).
b) Hi ha algun punt de (0, 2) en el qual *f '(x)* no existeixi?
c) Calculeu $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Raoneu totes les respostes.

Solució

34) PAU 2004 Sèrie 5 Qüestió 2:

La gràfica següent correspon a una funció $f:[2,6]\to\mathbb{R}$ derivable i amb derivada contínua. Feu un esbós de la gràfica de $f':(2,6)\to\mathbb{R}$ i justifiqueu-ne el perquè.



Solució

35) PAU 2004 Sèrie 5 Problema 1:

Considereu la funció polinòmica de tercer grau, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \ (a \neq 0)$.

a) Trobeu els valors de *a, b, c* i *d* per als quals *f(x)* talla l'eix *OX* en els punts x = 0 i x = 1 i presenta un mínim relatiu en el punt x = 0.
b) Feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat, i acabeu de calcular els elements necessaris per dibuixar-la.

Solució

36) PAU 2005 Sèrie 1 Qüestió 6:

La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant $(x > 0 \ , \ y > 0)$, talla l'eix OX en el punt A i l'eix OY en el punt B.

a) Feu un gràfic dels elements del problema.
b) Trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui l'àrea mínima.

Solució

37) PAU 2005 Sèrie 1 Problema 2:

Considereu la funció $f(x) = 4x - x^2$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.
b) Feu un gràfic dels elements del problema.
c) Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat al'apartat **a).**

Solució

38) PAU 2005 Sèrie 3 Qüestió 5:

Considereu la funció $f(x) = 3 - x^2$ i un punt de la seva gràfica, *M*, situat en el primer quadrant $(x > 0 \ , \ y > 0)$. Si pel punt *M* tracem paral·leles als eixos de coordenades, la sevaintersecció amb *OX* i *OY* determina dos punts, *A* i *B*, respectivament.

a) Feu un gràfic dels elements del problema.
b) Trobeu les coordenades del punt *M* que fa que el rectangle *OAMB* tingui l'àrea màxima.

Solució

39) PAU 2005 Sèrie 4 Qüestió 3:

Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

Solució

40) PAU 2005 Sèrie 4 Qüestió 4:

Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui ***A***el punt de la paràbola d'abscissa **0**.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt ***A***.
b) En quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobaten l'apartat anterior?

Solució

41) PAU 2006 Sèrie 1 Qüestió 4:

Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}$.

Solució

42) PAU 2006 Sèrie 1 Problema 2:

Considereu la funció $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$.

a) Calculeu **c** sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x=0$ és horitzontal.
b) Per al valor de **c** trobat a l'apartat anterior, calculeu **a** i **b** sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-2$ i que talla l'eix OX quan $x=1$.
c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

Solució

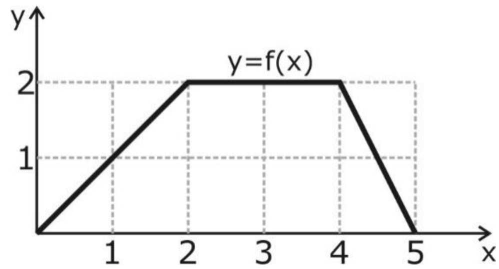
43) PAU 2006 Sèrie 3 Qüestió 1:

Considereu la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x=0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

Solució

44) PAU 2006 Sèrie 3 Qüestió 2:

Considereu la funció $y=f(x)$ definida per a $x\in[0,5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?
b) Calculeu $\int_0^3 f(x)\,dx$. y=f(x)

Solució

45) PAU 2006 Sèrie 3 Problema 1:

Donada la funció $f(x)=e^{-x^2+2x}$.

a) Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.
b) Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.
c) Trobeu les possibles asímptotes.
d) Feu la representació gràfica aproximada de la funció.

Solució

46) PAU 2006 Sèrie 4 Qüestió 1:

Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funció definida per $f(x)=e^x(ax+b)$, on **a** i **b** són nombres reals.

a) Calculeu els valors de **a** i **b** per tal que la funció tingui un extrem relatiu en elpunt $(3\,,\,e^3)$.

b) Per als valors de **a** i **b** obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en elpunt esmentat.

Solució

47) PAU 2006 Sèrie 4 Problema 1:

Considereu la paràbola d'equació $y=x^2+2x-3$.

a) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x=-1$ i $x=1$.

b) Calculant el mínim de la funció $y=x^2+2x-3$, trobeu el vèrtex de la paràbola.

c) Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.

d) Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

Solució

48) PAU 2007 Sèrie 1 Qüestió 1:

En quin punt la recta tangent a la funció $f(x)=x\cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses?

Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

Solució

49) PAU 2007 Sèrie 1 Qüestió 3:

Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y=x^4-x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

Solució

50) PAU 2007 Sèrie 1 Problema 1:

Considereu la recta d'equació $r: x=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.

a) Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol (*x*, *y*, *z*) de la recta al punt *P* = (1, 2, 5) com una funció de la coordenada x.

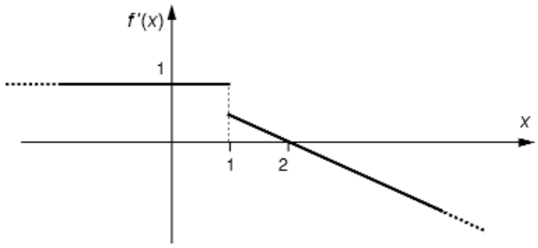
b) Trobeu quin valor de x fa mínima aquesta funció, deduïu quin punt Q de la recta és el més proper a *P* i calculeu la distància del punt a la recta.

c) Escriviu l'equació de la recta que passa per *P* i Q i comproveu que és perpendicular a *r*.

Solució

51) PAU 2007 Sèrie 2 Qüestió 2:

2. La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



a) Digueu si $f(x)$ és derivable en tots els punts de $\mathbb{R}$ i per què.

b) Estudieu el creixement i el decreixement de $f(x)$.

c) Trobeu si $f(x)$ té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de x i de quin tipus.

d) Sabent que $f(0)=1$, calculeu el valor de $f(1)$.

Justifiqueu totes les respostes.

Solució

52) PAU 2007 Sèrie 2 Qüestió 3:

Calculeu els valors del paràmetre a, $a\neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y=ax^4+2ax^3-ax+1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

Solució

53) PAU 2007 Sèrie 2 Problema 1:

Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.

Solució

54) PAU 2007 Sèrie 3 Problema 2:

Donades les funcions $f(x)=x^2-ax-4$ i $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+b$.

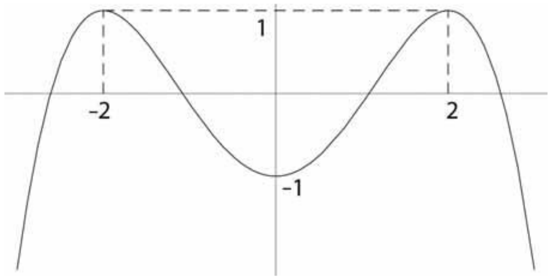
a) Calculeu ***a*** i ***b*** de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x=3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.

c) Pel valor de *a* obtingut en el primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses *OX* i la funció $f(x)$.

Solució

55) PAU 2008 Sèrie 2 Problema 1:
Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval (–3, 3) és la següent:



a) Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
b) Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval (–3, 3).
c) Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
d) Sabent que la funció és de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, trobeu de quina funció es tracta.

Solució

56) PAU 2008 Sèrie 4 Qüestió 1:
Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b \ (a, b \in \mathbb{R})$. Trobeu els valors de ***a*** i ***b*** que fan que la recta $y = 2x + 1$ sigui tangent a la gràfica de f quan $x = 1$.

Solució

57) PAU 2008 Sèrie 4 Problema 1:
Donades les funcions $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$:

a) Comproveu que $\left[g(x)\right]^2 - \left[f(x)\right]^2 = 1$.

b) Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ i $g'(x) = f(x)$.

c) Comproveu que $f(x+y) = f(x)\cdot g(y) + f(y)\cdot g(x)$.

d) Calculeu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dividint per e^x el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Solució

58) PAU 2008 Sèrie 5 Qüestió 1:
Trobeu els valors dels paràmetres ***a*** i ***b*** per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & si \quad x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Solució

59) PAU 2008 Sèrie 5 Qüestió 3:

Digueu per a quin valor de **x**la recta tangent a la corba $y=\ln\left(x^2+1\right)$ és paral·lela ala recta $y=x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

Solució

60) PAU 2008 Sèrie 5 Problema 2:

De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

Solució

61) PAU 2009 Sèrie 1 Qüestió 3:

Sigui $f\left(x\right)=2x^3-x^2+3x+1$. Donades les rectes $r_1: y=x+2$ i $r_2: y=7x-2$:

a) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba $y=f\left(x\right)$ en algun punt.

b) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.

Solució

62) PAU 2009 Sèrie 1 Problema 1:

Considereu la funció real de variable real $f\left(x\right)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

a) Trobeu-ne el domini.
b) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.
c) Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los.

Solució

63) PAU 2009 Sèrie 3 Problema 1:

Sigui la funció $f\left(x\right)=a+\dfrac{4}{x}+\dfrac{b}{x^2}$.

a) Calculeu els valors de ***a***i ***b***, sabent que la recta 2*x* + 3*y* = 14 és tangent a la gràfica de la funció $f\left(x\right)$ en el punt d'abscissa x = 3.

Per a la resta d'apartats, considereu que *a* = –3 i que *b* = 4.

b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f\left(x\right)$. Trobeu iclassifiqueu els extrems relatius que té la funció.

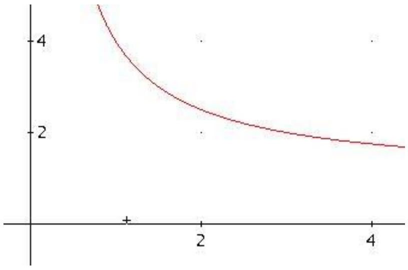
c) Calculeu els punts de tall de la funció $f\left(x\right)$ amb l'eix *OX*.

d) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f\left(x\right)$, l'eix *OX* i les rectes $x=1$ i $x=3$.

Solució

64) PAU 2009 Sèrie 4 Problema 1:

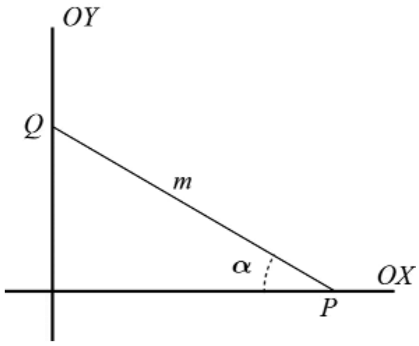
La gràfica de la funció $f\left(x\right)=\dfrac{3+x}{x}$, des de $x=1$ fins a $x=4$, és la següent:



a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x=1$ i $x=3$.
b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.
c) Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.
d) Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

Solució

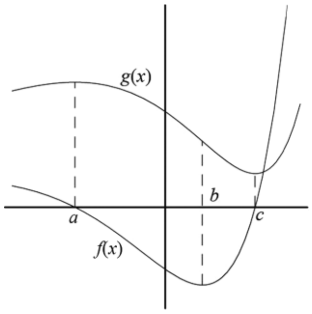
65) PAU 2010 Sèrie 1Qüestió 3:
Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix OX perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



Solució

66) PAU 2010 Sèrie 4 Qüestió 3:
Sigui $P\left(x\right)=ax^2+bx+c$ un polinomi qualsevol de segon grau.
a) Trobeu la relació existent entre els paràmetres a, b i c sabent que es compleix que P(1) = 0 i P(2) = 0.
b) Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir P'(3/2).
Solució

67) PAU 2010 Sèrie 4 Qüestió 5:
En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció f (x) és la derivada de la funció g(x) o és a l'inrevés, estudiant què passa en els punts x = a, x = b i x = c.



[Solució](#)

68) PAU 2011 Sèrie 1 Qüestió 6:
Sigui $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ quan a≠0.

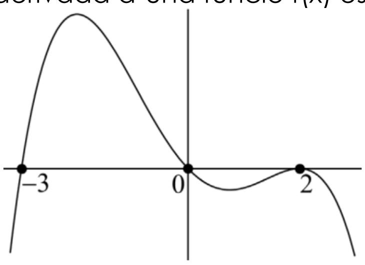
a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa x=2.
b) Quan a=2, classifiqueu-ne els extrems relatius.

[Solució](#)

69) PAU 2011 Sèrie 2 Qüestió 3:
Donada la funció f (x)=x3+ ax2+ bx+ c:
a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres a, b i c perquè f (x) tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa x=−1.
b) Calculeu el valor del paràmetre a perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció f (x) en el punt d'abscissa x=0.
c) Determineu la relació entre els paràmetres a, b i c sabent que la gràfica de f (x) talla l'eix OX en el punt d'abscissa x=−2.
d) Calculeu el valor dels paràmetres a, b i c perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

[Solució](#)

70) PAU 2011 Sèrie 4 Qüestió 3:
La gràfica corresponent a la derivada d'una funció f(x) és la següent:



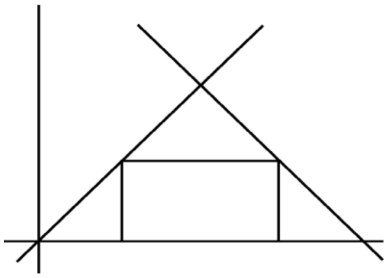
a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de f(x).
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció f(x).

[Solució](#)

71) PAU 2011 Sèrie 4 Qüestió 6:
Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.
a) Feu un esbós de la situació descrita.
b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y ésl'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que 4x+3y=12.
c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

Solució

72) PAU 2012 Sèrie 1 Qüestió 4:
Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions y = x, x + y = 8, y = 0, i té un costat sobre la recta y = 0. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.

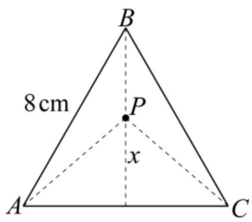


Solució

73) PAU 2012 Sèrie 3 Qüestió 2:
Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,
a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.
b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

Solució

74) PAU 2012 Sèrie 3 Qüestió 5:
Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.
a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.
b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).
c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.



Solució

75) PAU 2012 Sèrie 4 Qüestió 4:
Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte **A** i $(40-5x)/(10-x)$ tones d'un producte **B**. La quantitat màxima de producte **A**que es pot produir és 8 tones.
El preu de venda del producte **A**és 100€ per tona i el del producte **B**és 250€ per tona.
a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.
b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

Solució

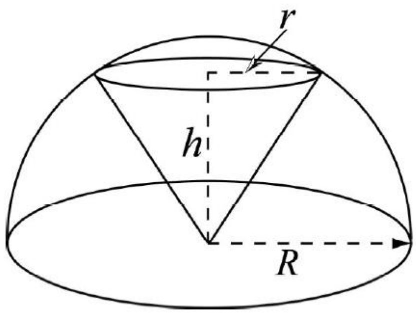
76) PAU 2012 Sèrie 4 Qüestió 6:

Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,

a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.
b) Calculeu els punts de tangència.

Solució

77) PAU 2013 Sèrie 3 Qüestió 5:



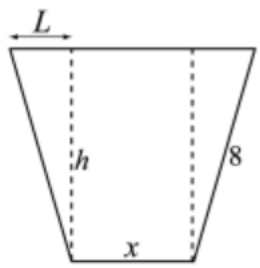
En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal i com es veu en el dibuix.
a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com $V = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 - h^2\right)$.
b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

Solució

78) PAU 2013 Sèrie 3 Qüestió 6:
Sigui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta $r: y = x + 3$ en el punt d'abscissa $x = -1$, i que en el punt d'abscissa $x = 1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r. Calculeu el valor dels paràmetres **a**, **b** i **c**.

Solució

79) PAU 2013 Sèrie 4 Qüestió 4:



Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.
a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).
b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

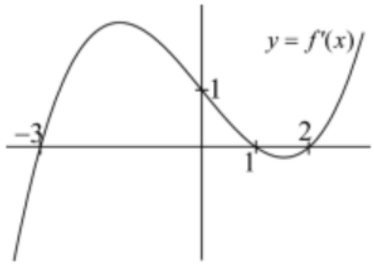
$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (*no cal que comproveu que és realment un màxim*)

Solució

80) PAU 2013 Sèrie 4 Qüestió 6:

La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty,-3]$ i $[2,+\infty)$.



a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

Solució

81) PAU 2013 Sèrie 5 Qüestió 4: (Incomplet)

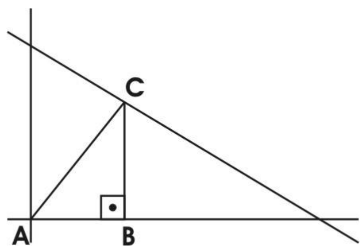
Per a $x \geq 1$, considereu la funció $f(x)=+\sqrt{x-1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.

Solució

82) PAU 2013 Sèrie 5 Qüestió 6:

Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtexs $B=(x,0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtexs C pertany a la recta $x+2y=8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x)=2x-\dfrac{x^2}{4}$

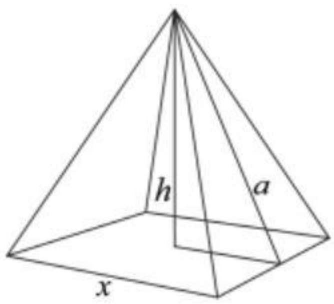
.

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

Solució

83) PAU 2013 Sèrie 1 Qüestió 6:

Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de $300m^2$ de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.



a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x)=\frac{x\sqrt{(9\times 10^4)-x^4}}{6}$$

b) Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

Solució

84) PAU 2014 Sèrie 3 Qüestió 3:

Un nedador és al mar en un punt **N**, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt **S**, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt **A**, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt **S**, de manera que el triangle **NSA** és rectangle en el vèrtex **S**. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

a) Si **P** és un punt entre el punt **S** i el punt **A** que està a una distància **x** de **S**, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt **N** al punt **P** i caminar des del punt **P** fins al punt **A** és determinat per l'expressió $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\dfrac{6-x}{5}$.

b) Calculeu el valor de **x** que determina el temps mínim que cal per a anar del punt **N** al punt **A**, passant per **P**. Quin és el valor d'aquest temps mínim?

Solució

85) PAU 2014 Sèrie 4 Qüestió 1:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

a) Calculeu les asimptotes verticals, horitzontals i obliques de la funcio f.

b) Trobeu l'equacio de la recta tangent a la grafica de la funcio f en aquells punts enque la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y=-5x+4$.

Solució

86) PAU 2014 Sèrie 5 Qüestió 2:

Siguin les funcions $f(x)=\dfrac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x)=+\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x=0$.

Solució

87) PAU 2014 Sèrie 5 Qüestió 4:

Sabem que una funció f té per derivada la funció $f'(x)=(3x-2)^2(x-2)$.

a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.

b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x=2$.

Solució

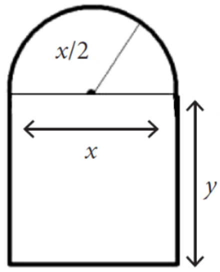
88) PAU 2015 Sèrie 2 Qüestió 3:(Incomplet)

a)Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

Solució

89) PAU 2015 Sèrie 2 Qüestió 6:

La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què **x** és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i **y** és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció $f(x,y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

b) Si el perímetre de la portalada fa **20 m**, determineu les mides **x** i **y** de la portalada que en maximitzen l'àrea.

Solució

90) PAU 2015 Sèrie 4 Qüestió 2:

Sigui la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

a)Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.

Solució

91) PAU 2015 Sèrie 5 Qüestió 5:

Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$.

b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

Solució

92) PAU 2016 Sèrie 3 Qüestió 3:

Sigui la funció $f(x) = x \cdot e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.

b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

Solució

93) PAU 2016 Sèrie 1 Qüestió 3:
Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm³. Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm², però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.

a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2{,}5x^2 + \dfrac{320}{x}$.

b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

Solució

94) PAU 2016 Sèrie 1 Qüestió 4: (Incompleta)
Sigui la funció $f(x) = \sin(x)$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x = 0$ i $x = \pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.

Solució

95) PAU 2016 Sèrie 3 Qüestió 5:
Considereu el tetraedre que té per vèrtexs els punts $A = (x, 0, 1)$, $B = (0, x, 1)$, $C = (3, 0, 0)$ i $D = (0, x, 0)$, amb $0 < x < 3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x) = \dfrac{1}{6}\left(-x^2 + 3x\right)$.

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.

NOTA: Podeu calcular el volum del tetraedre de vèrtexs A, B, C i D amb l'expressió $\dfrac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

Solució

96) PAU 2016 Sèrie 5 Qüestió 3:
Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu els màxims relatius, mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

Solució

97) PAU 2017 Sèrie 1 Qüestió 3:

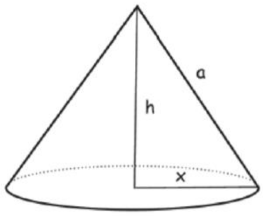
Sigui la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2-k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre k:

a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció.
b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.

Solució

98) PAU 2017 Sèrie 1 Qüestió 6:

Considereu un con de 120 cm^3 de volum que té una altura **h**, un radi de la base **x** i una aresta **a**, com el de la figura següent:



a) Comproveu que $a^2=\dfrac{360}{\pi}\cdot\dfrac{1}{h}+h^2$
b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.
NOTA: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura que el con.

Solució

99) PAU 2017 Sèrie 2 Qüestió 4:

De les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ i $g'(x)$, en coneixem els valors següents:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	–6

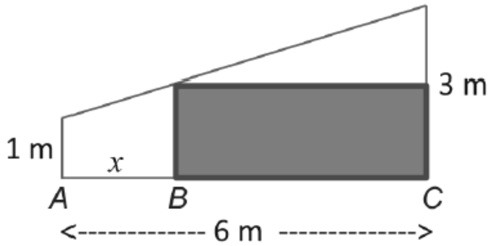
x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la funció $f(x)$ sabem també que el pendent de la recta tangent a un punt d'abscissa x és $4x^3-9x^2-2x+1$. Trobeu $f(x)$.

b) Calculeu $(g\circ f)'(1)$.

Solució

100) PAU 2017 Sèrie 5 Qüestió 6:
El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la zona ombrejada.



a) Expresseu l'àrea del rectangle en funció de la longitud x del segment AB.
b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.

Solució

101) PAU 2018 Sèrie 1 Qüestió 3:
Sigui la funció $f\left(x\right)=x^3-x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x+3y=0$.

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

Solució

102) PAU 2018 Sèrie 1 Qüestió 5: (Incompleta)
Sigui la funció $f\left(x\right)=\sqrt{x}+x-2$.

a) Comproveu que la funció $f\left(x\right)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $\left[0,\,2\right]$ i que, per tant, l'equació $f\left(x\right)=0$ té alguna solució a l'interval $\left(0,2\right)$. Comproveu que $x=1$ és una solució de l'equació $f\left(x\right)=0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'\left(x\right)$, que la solució és única.

Solució

103) PAU 2018 Sèrie 3 Qüestió 1:
Considereu la funció polinòmica $f\left(x\right)=x^3-ax^2+bx+c$.

a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c, sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x=0$ és la recta $y=x+3$.

b) Per als valors $a=2$, $b=1$ i $c=3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los.

Solució

104) PAU 2018 Sèrie 5 Qüestió 3:
Sigui la funció $f\left(x\right)=a\cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a\neq 0$ i $b\neq 0$.

a) Calculeu els valors de a i de b que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1,e)$.

b) Per al cas $a=3$ i $b=5$, calculeu l'asímptota horitzontal de la funció f quan x tendeix a $+\infty$.

Solució

105) PAU 2018 Sèrie 5 Qüestió 4:

Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x=2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y=-124x+249$ i que $f(-3)=-4$.

a) Calculeu $f''(2)$ $f'(2)$ i $f(2)$.

b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f'(x)dx$.

Solució

106) PAU 2019 Sèrie 1 Qüestió 1:

Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm² de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.

Solució

107) PAU 2019 Sèrie 4 Qüestió 1:

Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m². Sabem que el preu de la fusta és de 7,5 €/m per als costats horitzontals i de 12,5€/m per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?

Solució

108) PAU 2019 Sèrie 4 Qüestió 6:

Sabem que una funció $f(x)$ és continua i derivable a tots els nombres reals, que té com a segona derivada $f''(x)=6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x=1$ és horitzontal.

a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció té un mínim relatiu en $x=1$.

b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x=1$ és $y=5$, calculeu l'expressió de la funció f.

Solució

109) PAU 2019 Sèrie 5 Qüestió 4:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.

Solució

110) PAU 2019 Sèrie 5 Qüestió 6: (Incomplet)

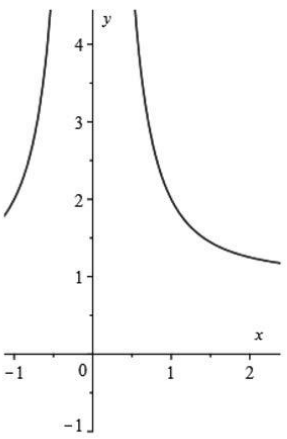
Considereu la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Calculeu el domini de la funció f, els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f.

Solució

111) PAU 2020 Sèrie 1 Qüestió 1:

Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=(a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció $g(a)=\dfrac{(a^2+3)^2}{4a}$.

b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

Solució

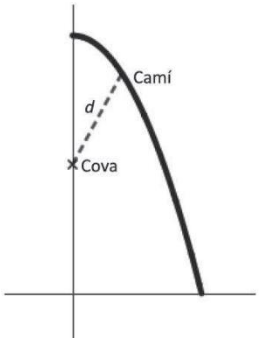
112) PAU 2020 Sèrie 1 Qüestió 4:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x=2$.

Solució

113) PAU 2020 Sèrie 3 Qüestió 2:

S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(0,4)$ i $(2,0)$. La cova està situada en el punt de coordenades $(0,2)$, tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini d des del camí a la cova que sigui el més curt possible.



a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés.

Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d.

Solució

114) PAU 2020 Sèrie 3 Qüestió 4: (Incomplet)

Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$, en què $\ln$ indica el logaritme neperià, definida per a $x > 0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.

Solució

115) PAU 2020 Sèrie 3 Qüestió 6: (Incomplet)

Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

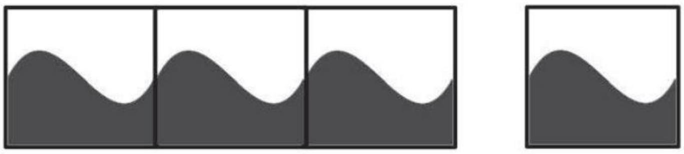


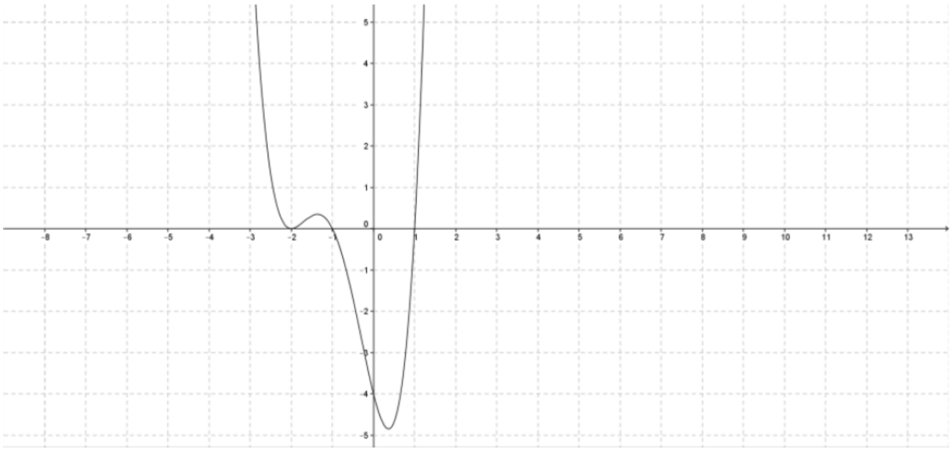
Figura 1 Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ i $(2,2)$, tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.

Solució

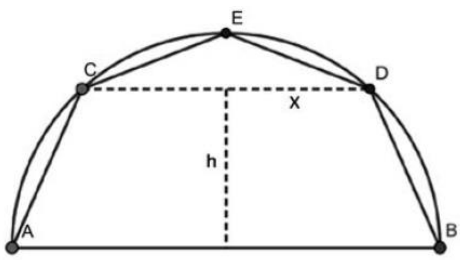
116) PAU 2020 Sèrie 4 Qüestió 3:
Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt $(0,1)$. La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura.



a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x=0$.
b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.

Solució

117) PAU 2020 Sèrie 4 Qüestió 5:
Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant a continuació una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon ACEDB, tal com es mostra en la figura.



a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon ACEDB.
b) Quina ha de ser la distància (indicada en la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon ACEDB sigui màxima?

Solució

SOLUCIONARI:

1) PAU 1999 Sèrie 1 Problema 1:

Donada la funció $f(x)=x-4+\dfrac{16}{x-4}$

a) Estudieu-ne la continuïtat.

Evidentment l'únic punt on podem tenir problemes de continuïtat és quan el denominador de la fracció sigui zero. És a dir, en el punt $x_0=4$.

Estudiem per tant la continuïtat de la funció $f(x)$ en el punt $x_0=4$.

D'entrada ja sabem que la funció serà discontinua perquè en aquest punt no existeix. És a dir, $\nexists f(4)$. A més:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\left(x-4+\frac{16}{x-4}\right)=4-4+\frac{16}{4-4}=0+\frac{16}{0}=\frac{16}{0}=\infty\notin\mathbb{R}\to f$$ té una discontinuïtat de tipus salt infinit o asimptòtica en el punt $x_0=4$

Podem calcular també, tot i que no cal, els límits laterals en aquest punt, aleshores obtenim que: $f(3.99)\simeq -1600\to \lim_{x\to 4^-} f(x)=-\infty$ i $f(4.01)\simeq 1600\to \lim_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$

Per tant f continua en $\mathbb{R}-\{4\}$ i en el punt $x_0=4$ presenta una discontinuïtat de salt infinit o asimptòtica.

b) Estudieu-ne els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims locals.

Evidentment hem de derivar la funció.

$$f(x)=x-4+\frac{16}{x-4}\to f'(x)=1+\frac{0\cdot(x-4)-16\cdot 1}{(x-4)^2}=1-\frac{16}{(x-4)^2}=\frac{(x-4)^2-16}{(x-4)^2}=$$

$$=\frac{x^2-8x+16-16}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x}{(x-4)^2}=\frac{x(x-8)}{(x-4)^2}$$

Calculem els punts on s'anul·la la derivada:

$$f'(x)=0\to\frac{x(x-8)}{(x-4)^2}=0\to x(x-8)=0\to\begin{cases}x=0\\x=8\end{cases}$$

Finalment fem la taula d'intervals de creixement i decreixement de la funció tenint en compte els punts on s'anul·la la derivada i **<u>també els punts on aquesta no existeix.</u>**

Notem que $f'(x)=\dfrac{x(x-8)}{(x-4)^2}$ existirà sempre menys quan s'anul·li el denominador, per tant, sempre excepte en el punt $x_0=4$

Interval	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,8)$	8	$(8,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	+	0	–	$\nexists$	–	0	+
Monotonia de $f(x)$	↗	M	↘	$\nexists$	↘	m	↗

Així f creixent en $(-\infty,0)\cup(8,+\infty)$ i f decreixent en $(0,4)\cup(4,8)$. En el punt $x=0$ té un màxim relatiu i en el punt $x=8$ un mínim relatiu.

c) Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes verticals $x=0$ i $x=2$.

Evidentment per calcular l'àrea cal integrar la funció. El que ens estan demanant és el resultat de la següent integral:

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-4+\frac{16}{x-4}\right)dx=\int_0^2(x-4)dx+\int_0^2\left(\frac{16}{x-4}\right)dx=\int_0^2(x-4)dx+16\int_0^2\left(\frac{1}{x-4}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_0^2+16\left[\ln(x-4)\right]_0^2=\left(\frac{2^2}{2}-4\cdot 2\right)-\left(\frac{0^2}{2}-4\cdot 0\right)+16\left(\ln(2-4)-\ln(0-4)\right)=$$

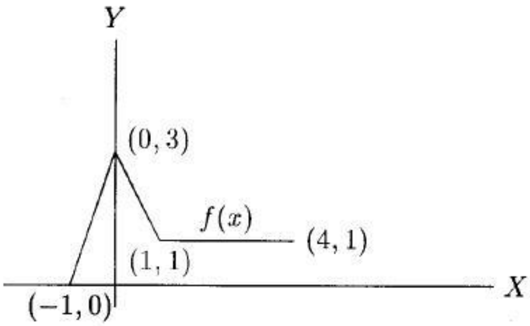
$=(2-8)-0+16\left(\ln(-2)-\ln(-4)\right)=$ **Recordeu que el logaritme d'un nombre negatiu no existeix, per tant, sembla que aquesta àrea és impossible de calcular però cal recordar també que la resta de logaritmes és el logaritme del quocient.**

$$-6+16\ln\left(\frac{-2}{-4}\right)=-6+16\ln\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-6+16\left(\cancel{\ln(1)}-\ln(2)\right)=\boxed{-6-16\ln(2)}$$

[Tornar a l'enunciat]

2) PAU 1999 Sèrie 2 Qüestió 1:
La gràfica d'una funció és la que hi ha en el dibuix següent. Quina és la gràfica de la seva funció derivada? En quins punts és discontínua la derivada?



Sabem que la derivada d'una funció en un punt és la pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt.

- Del dibuix es dedueix que la funció passa pels punts $A=(-1,0)$ i $B=(0,3)$, per tant, en aquest interval té pendent 3.

Recordem que $Pendent=\dfrac{Increment\ d'altura}{Increment\ d'x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{3-0}{0-(-1)}=\dfrac{3}{1}=3$.

Anàlogament en l'interval $(0,1)$ la funció passa del punt $(0,3)$ al $(1,1)$ i per tant la seva pendent és: $Pendent = \dfrac{Increment\ d'altura}{Increment\ d'x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-3}{1-0} = \dfrac{-2}{1} = -2$

En la resta de domini la funció f és constant, per tant, la seva derivada és 0. Resumint tenim que: $f'(x) = \begin{cases} 3 & si \ \ x \in (-1,0) \\ -2 & si \ \ x \in (0,1) \\ 0 & si \ \ x \in (1,4) \end{cases}$ notant a més que $f'(x)$ no existeix ni en el punt $x=0$ ni en el punt $x=1$ perquè en aquests punts la funció f presenta punts angulars i per tant no és derivable.

Tornar a l'enunciat

3) PAU 1999 Sèrie 2 Problema 1:

Considereu la funció $f(x) = \dfrac{1}{8x - x^2}$

a) Trobeu el domini de $f(x)$ i les asímptotes.

f és una fracció algèbrica per tant el seu domini serà tot $\mathbb{R}$ excepte els punts on s'anul·li el denominador. $8x - x^2 = 0 \rightarrow x(8-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases}$ Així $\boxed{D(f) = \mathbb{R} - \{0, 8\}}$

• **Asímptotes verticals:**

Apareixen en els punts $x_0 / \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Però per a que el límit doni infinit s'ha de dividir per zero, per tant, estudiem:

$x = 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{8x - x^2} \right) = \dfrac{1}{8 \cdot 0 - 0^2} = \dfrac{1}{0-0} = \dfrac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 0$ asímptota vertical de la funció f.

Anàlogament:

$x = 8 \rightarrow \lim\limits_{x \to 8} f(x) = \lim\limits_{x \to 8} \left(\dfrac{1}{8x - x^2} \right) = \dfrac{1}{8 \cdot 8 - 8^2} = \dfrac{1}{64 - 64} = \dfrac{1}{0} = \infty \rightarrow x = 8$ asímptota vertical de la funció f.

• **Asímptotes horitzontals:**

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{8x - x^2} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}{x^2 \left(\frac{8}{x} - 1 \right)} \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{8}{x} - 1} \right) = \dfrac{0}{0-1} = \dfrac{0}{-1} = -1 \rightarrow y = -1$ és asímptota horitzontal de la funció f

• **Asímptotes obliqües:**

Si f té asímptotes horitzontals aleshores no en pot tenir d'obliqües.

b) Determineu el signe de la funció en el seu domini (determinar el signe de $f(x)$ vol dir establir per a quins valors de x es compleix $f(x)\geq 0$ i per a quins $f(x)\leq 0$).

Per saber en quins intervals la funció f és positiva i en quins és negativa cal mirar quan canvia de signe, és a dir, quan $f(x)=0$ i quan és discontinua.

$f(x)=0\rightarrow\frac{1}{8x-x^2}=0\rightarrow 1=0\rightarrow\#$ per tant, la funció no té cap arrel.

Mirem dons, els punts de discontinuïtat. Sabem per l'apartat a) que els punts de discontinuïtat de la funció són $x=0$ i $x=8$ per tant, per estudiar el signe de la funció plantegem els següents intervals.

Interval	$(-\infty,0)$	0	$(0,8)$	8	$(8,+\infty)$
Signe de f	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$

Per tant f és positiva en l'interval $(0,8)$ i f és negativa en $(-\infty,0)\cup(8,+\infty)$.

c) Trobeu-ne els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.

Derivem la funció i estudiem el signe de la derivada.

$$f(x)=\frac{1}{8x-x^2}\rightarrow f(x)=\left(8x-x^2\right)^{-1}\rightarrow f'(x)=-1\cdot\left(8x-x^2\right)^{-2}(8-2x)=\frac{2x-8}{\left(8x-x^2\right)^2}$$

Per poder estudiar els intervals de monotonia de la funció mirarem en quins punts s'anul·la la derivada i en quins aquesta derivada no existeix.

- Punts que anul·len la derivada: $f'(x)=0\rightarrow\frac{2x-8}{\left(8x-x^2\right)^2}=0\rightarrow 2x-8=0\rightarrow x=4$.

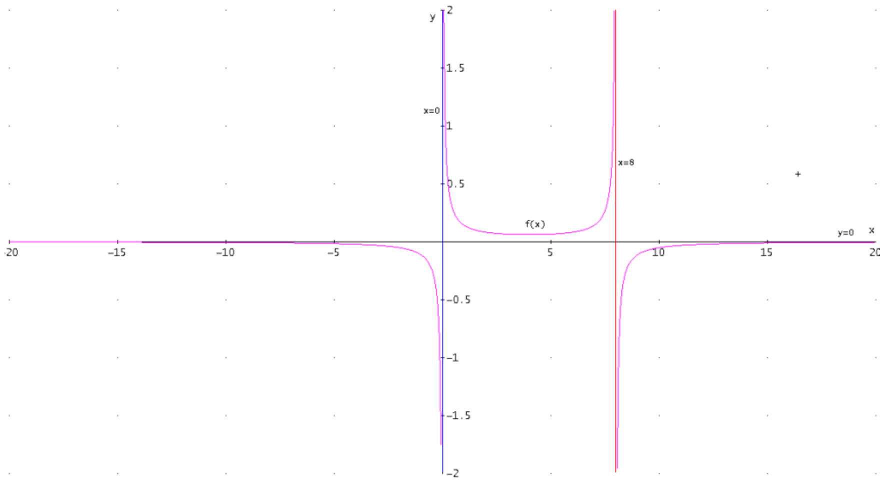
Els punts on la derivada no existeix seran aquells on s'anul·la el denominador. És a dir, les solucions de l'equació $\left(8x-x^2\right)^2=0\rightarrow 8x-x^2=0\rightarrow x(8-x)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=8\end{cases}$.

Per tant, hem de considerar els següents intervals:

Interval	$(-\infty,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,8)$	8	$(8,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$

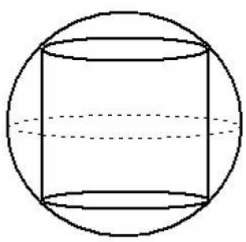
Per tant, f decreixent en $(-\infty,0)\cup(0,4)$ i creixent en $(4,8)\cup(8,+\infty)$ i en el punt $(4,f(4))=\left(4,\frac{1}{16}\right)$ presenta un mínim relatiu.

d) Feu un esquema de la gràfica de la funció.



[Tornar a l'enunciat]

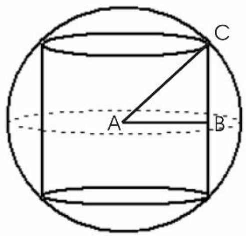
4) PAU 1999 Sèrie 5 Problema 1:
Trobeu l'altura i el radi de la base del cilindre de volum màxim inscrit en una esfera de radi 1.



Recordem que el volum d'un cilindre és l'àrea de la base x l'altura. Com la base és un cercle tenim que:

$$\textit{Volum cilindre} = \textit{Àrea base} \times \textit{Altura} = \pi r^2 \cdot h \to V = \pi h r^2$$

Però aquest volum depén de dues magnituds, el radi de la base, r i l'altura del cilindre h. Ens queda expressar una d'aquestes magnituds en funció de l'altra. Per fer-ho afegim al dibuix anterior unes poques línies més.



En la figura podem observar que el triangle **ABC** és rectangle, que la distància **AC** és el radi de l'esfera, és a dir, 1 i que l'altura del nostre cilindre h, serà dos cops la distància **CB**.
Per simplificar els càlculs anomenem a a la distància CB.
Aplicant Pitàgores tenim que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \to 1 = r^2 + a^2 \to r^2 = 1 - a^2 \xrightarrow{r \geq 0} r = \sqrt{1-a^2}$$

Però

$$a = \overline{CB} = \frac{h}{2} \to r = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-h^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-h^2}$$

Finalment: $V = \pi h r^2 = \pi h \left(\frac{1}{2}\sqrt{4-h^2}\right)^2 = \pi h \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\sqrt{4-h^2}\right)^2 \pi h \frac{4-h^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(4h - h^3\right)$

Ara que ja tenim la funció a optimitzar ens queda optimitzar-la. Per fer-ho calculem la seva derivada i la igualem a zero.

$$V(h) = \frac{\pi}{4}\left(4h - h^3\right) \to V'(h) = \frac{\pi}{4}\left(4 - 3h^2\right)$$

$$V'(h) = 0 \to \frac{\pi}{4}\left(4 - 3h^2\right) = 0 \leftarrow 4 - 3h^2 = 0 \to 3h^2 = 4 \to h^2 = \frac{4}{3} \xrightarrow{h>0} h = \sqrt{\tfrac{4}{3}} =$$

$$=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Comprovem que realment el que hem trobat és un màxim i no un mínim.

$V'(h)=\frac{\pi}{4}\left(4-3h^2\right)\rightarrow V''(h)=-6h\rightarrow V''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-6\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}<0\rightarrow\frac{2\sqrt{3}}{3}$ és un màxim relatiu.

Així l'altura del cilindre de volum màxim és $\boxed{h=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$.

I el radi de la base d'aquest cilindre és:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{4-h^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{4\cdot 3}{9}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{36-12}{9}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{24}{9}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

Tornar a l'enunciat

5) PAU 1999 Sèrie 6 Problema 1:

Considereu la funció $y=f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$

a) Feu un estudi de les seves asímptotes.

• **Asímptotes verticals:**

Recordem que $x=x_0$ és asímptota vertical d'una funció $f(x)$ sii $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\pm\infty$. Per tant, els punts x_0 candidats a asímptota seran aquells que anul·len el denominador. Així $x+1=0\rightarrow x=-1$.

Ara estudiem $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$. Si aquest límit dóna infinit aleshores la recta $x=-1$ serà asímptota vertical de la funció mentre que si el límit dóna finit aleshores la funció no tindrà cap asímptota en aquest punt.

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x}{x+1}=\dfrac{(-1)^2-(-1)}{-1+1}=\dfrac{1+1}{0}=\dfrac{2}{0}=\infty\rightarrow x=-1$ és asímptota vertical

Com en l'apartat **c)** em demanen dibuixar la gràfica aleshores vaig a calcular els límits laterals per l'esquerra i per la dreta perquè m'ajudaran a poder dibuixar-la.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-x}{x+1}\simeq\frac{(-1.01)^2-(-1.01)}{-1.01+1}\simeq -203\rightarrow\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-x}{x+1}\simeq\frac{(-0.99)^2-(-0.99)}{-0.99+1}\simeq 197\rightarrow\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$$

• **Asímptotes horitzontals:**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x(x-1)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{1+\frac{1}{x}}\right)=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty\notin\mathbb{R}\rightarrow f(x)$ no té asímptotes horitzontals.

• **Asímptotes obliqües:**

$y=mx+n$ asímptota obliqua de $f(x)$ on $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ i $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=\frac{1}{1}=1\to m=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x+1}-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x-x(x+1)}{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}-x}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(-2)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{-2}{1+0}=-2\to$$

$$\to n=-2$$

Per tant: $y=mx+n=1x-2\to y=x-2$ asímptota obliqua de la funció $f(x)$.

b) Calculeu els punts en què aquesta funció té extrem relatiu i digueu per a quins intervals del domini la funció és creixent.

Per calcular els extrems relatius em d'igualar la derivada de la funció a zero.

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}\to f'(x)=\frac{(2x-1)(x+1)-\left(x^2-x\right)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x-1-x^2+x}{(x+1)^2}\to$$

$$\to f'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\to\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=0\to x^2+2x-1=0\to x=-1\pm\sqrt{2}$$

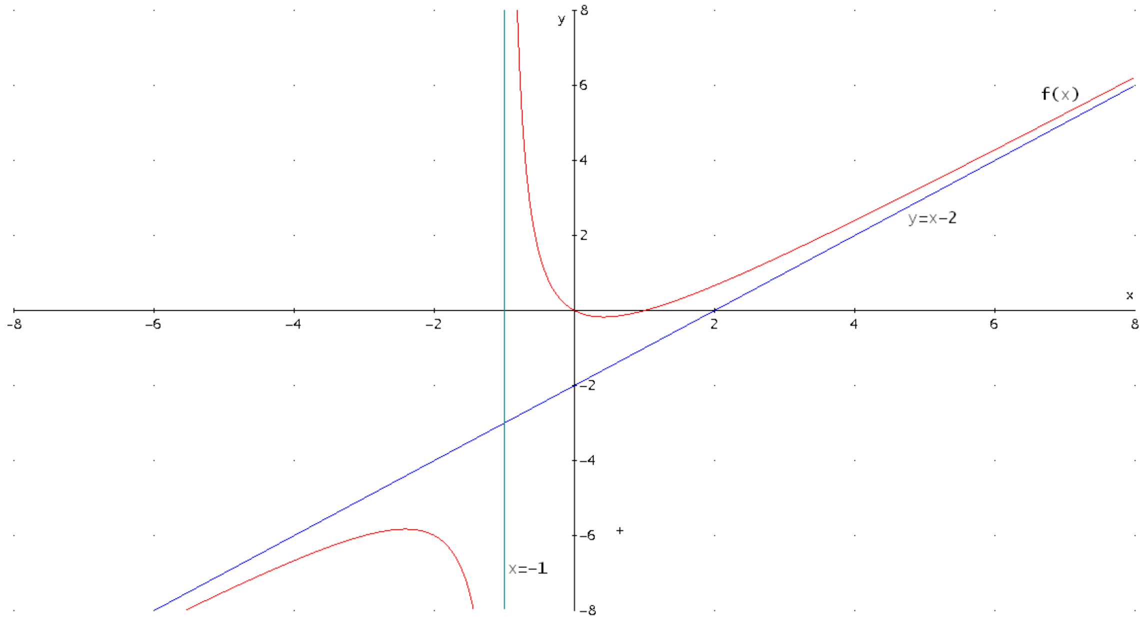
Per poder estudiar els intervals de monotonia de la funció no tant sols hem de tenir en compte els punts on s'anul·la la derivada sinó també els punts on la funció és discontinua. Per tant, a part dels punts $-1+\sqrt{2}$ i $-1-\sqrt{2}$ també hem de considerar el punt $x=-1$

Així considerarem els següents intervals:

Interval	$\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)$	$-1-\sqrt{2}$	$\left(-1-\sqrt{2},-1\right)$	-1	$\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$	$-1+\sqrt{2}$	$\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	m	$\nearrow$

Per tant, f creixent en $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$ i decreixent en $\left(-1-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$ i la funció tindrà dos extrems relatius. Un màxim relatiu en el punt $\left(-1-\sqrt{2},\ f\left(-1-\sqrt{2}\right)\right)$ i un mínim relatiu en el punt $\left(-1+\sqrt{2},\ f\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)$

c) Feu un esbós de la gràfica de la funció a partir de les dades obtingudes en els apartats anteriors.



Tornar a l'enunciat

6) PAU 2000 Sèrie 1 Qüestió 1:
Calculeu els valors de a tals que les tangents a la gràfica de la funció $f(x)=ax^3+2x^2+3$ en els punts d'abscisses $x=1$ i $x=-1$ siguin perpendiculars entre si.

Recordem que si una recta en $\mathbb{R}^2$ té pendent m aleshores la seva perpendicular té pendent $\frac{-1}{m}$. (És a dir, les pendents són inverses)
Aleshores si les rectes tangents en els punts $x=1$ i en $x=-1$ han de ser perpendiculars, aleshores aquestes rectes han de tenir les seves pendents de manera que una sigui la inversa de l'altra.
Però la pendent de la recta tangent a una funció $f(x)$ en un punt x_0 és la derivada de la funció en aquest punt, és a dir $f'(x_0)$.

Per tant, la condició del problema es tradueix en que $f'(1)=\frac{-1}{f'(-1)}$

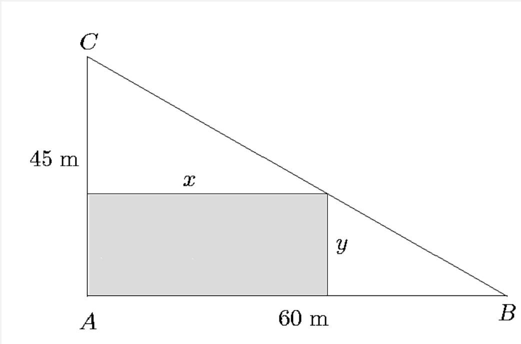
$$f(x)=ax^3+2x^2+3 \rightarrow f'(x)=3ax^2+4x \rightarrow \begin{cases} f'(1)=3a\cdot 1^2+4\cdot 1=3a+4 \\ f'(-1)=3a\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)=3a-4 \end{cases}$$

$$f'(1)=\frac{-1}{f'(-1)} \rightarrow 3a+4=\frac{-1}{3a-4} \rightarrow (3a+4)\cdot(3a-4)=-1 \rightarrow 9a^2-16=-1 \rightarrow 9a^2=15 \rightarrow$$

$$\rightarrow a^2=\frac{15}{9} \rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{15}{9}} \rightarrow \boxed{a=\frac{\pm\sqrt{15}}{3}}$$

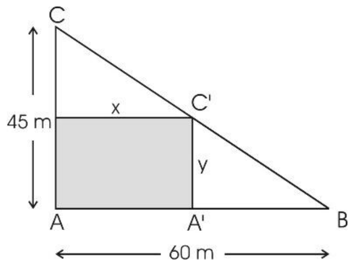
Tornar a l'enunciat

7) PAU 2000 Sèrie 1 Problema 1:
Un terreny té forma de triangle rectangle, els catets mesuren *AB* = 60 m i *AC* = 45 m. En aquest terreny es pot construir una casa de planta rectangular com indica la part ombrejada de la figura següent:



Voleu vendre aquest terreny i us paguen 5.000 pessetes per cada metre quadrat no edificable i 25.000 pessetes per cada metre quadrat edificable.
a) Determineu la relació que hi ha entre l'amplada x i la profunditat y del rectangle que determina la part edificable.

Els triangles BAC i BA'C' són semblants, aleshores els seus costats són proporcionals. Per tant, podem afirmar que:
$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{A'B}} \rightarrow \frac{45}{60} = \frac{y}{60-x} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{y}{60-x} \rightarrow 3(60-x) = 4y \rightarrow$
$\rightarrow 4y = 180 - 3x \rightarrow \boxed{y = 45 - \frac{3}{4}x}$



b) Determineu l'expressió que dóna el valor del terreny en funció de l'amplada x del rectangle edificable.

- Els metres quadrats de terreny edificable seran: $x \cdot y = x \cdot \left(45 - \frac{3}{4}x\right) = 45x - \frac{3}{4}x^2$
- Els metres quadrats de terreny no edificable seran, l'àrea del triangle gran ABC menys l'àrea del rectangle, per tant: $\frac{60 \cdot 45}{2} - x \cdot \left(45 - \frac{3}{4}x\right) = 1350 - 45x + \frac{3}{4}x^2$
- Finalment el valor del terreny serà:

$$V(x) = 25000\left(45x - \tfrac{3}{4}x^2\right) + 5000\left(1350 - 45x + \tfrac{3}{4}x^2\right) =$$
$$= 1125000x - 18750x^2 + 6750000 - 225000x + 3750x^2 \rightarrow$$
$$\boxed{\rightarrow V(x) = -15000x^2 + 900000x + 6750000}$$

c) Quines són les dimensions de la part edificable que ens permeten obtenir un valor màxim per a aquest terreny?

$$V(x) = -15000x^2 + 900000x + 6750000 \rightarrow V'(x) = -30000x + 900000$$
$$V'(x) = 0 \rightarrow -30000x + 900000 = 0 \rightarrow 30000x = 900000 \rightarrow x = \tfrac{900000}{30000} = 30 \rightarrow \boxed{x = 30m}$$
$$y = 45 - \tfrac{3}{4}x \xrightarrow{x=30} y = 45 - \tfrac{3}{4} \cdot 30 = 45 - 22{,}5 \rightarrow \boxed{y = 22{,}5m}$$

Comprovem que realment es tracta d'un màxim mitjançant la segona derivada.

$V'(x) = -30000x + 900000 \to V''(x) = -30000 \to V''(30) = -30000 < 0 \to x = 30$ és un màxim relatiu.

d) Quin és aquest valor màxim?

$V(30) = -15000 \cdot 30^2 + 900000 \cdot 30 + 6750000 = \boxed{20250000}$

Tornar a l'enunciat

8) PAU 2000 Sèrie 2 Qüestió 1:
a) Trobeu els extrems relatius de la funció polinòmica $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$ i calculeu els valors de $f(x)$ en aquests punts. A partir d'aquestes dades, feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

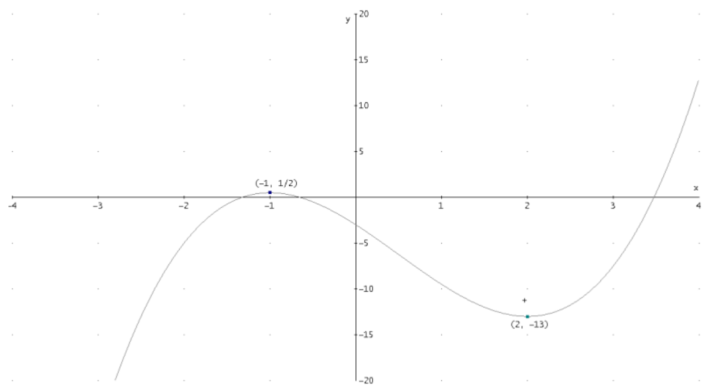
Per calcular els extrems evidentment hem de resoldre l'equació $f'(x) = 0$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3 \to f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 3x - 6 = 0 \to 3(x^2 - x - 2) = 0 \to x^2 - x - 2 = 0 \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3 \to f(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 - 3 = \frac{1}{2} \quad i \quad f(2) = 8 - 6 - 12 - 3 = -13$

Així la funció passa per $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ i $(2, -13)$



b) Demostreu que l'equació $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3 = 0$ té, exactament, tres solucions reals.

Les solucions de l'equació $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3 = 0$ són les arrels de la funció $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$.

Aquesta funció és continua en tot $\mathbb{R}$ perquè és una funció polinòmica.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot 1 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$f(-1) = \frac{1}{2} > 0$

Pel teorema de Bolzano aplicat a l'interval $(-\infty, -1)$ f té almenys una arrel en aquest interval. Però en tot aquest interval la funció és monòtona, per tant, aquesta arrel és única.

• Anàlogament, en l'interval $(-1,2)$ la funció és continua donat que ho és en tot $\mathbb{R}$.
$f(-1)=\frac{1}{2}>0$ mentre que $f(2)=-13<0$. Pel teorema de Bolzano la funció f té almenys una arrel en aquest interval. Però com la funció en aquest interval és monòtona donat que no existeix cap punt de discontinuïtat ni cap màxim ni mínim relatiu aleshores aquesta arrel és única.

• Finalment, considerant l'interval $(2,+\infty)$ tenim que f és continua en tot l'interval. Que $f(2)=-13<0$ i que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ aleshores pel teorema de Bolzano la funció f té almenys una arrel en aquest interval.

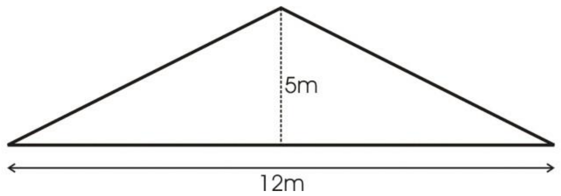
Però a l'igual que en els intervals anteriors podem assegurar que la funció f és monòtona en l'interval $(2,+\infty)$ donat que és continua i no té cap màxim ni mínim relatiu per tant aquesta arrel també és única.

Aleshores podem afirmar que la funció $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-3$ té un total de 3 arrels i per tant l'equació $x^3-\frac{3}{2}x^2-6x-3=0$ té un total de 3 solucions.

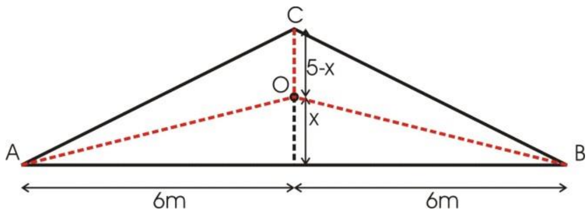
Tornar a l'enunciat

9) PAU 2000 Sèrie 2 Problema 1:
El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.
a) Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.

Un dibuix de la situació seria el següent:



Anomenem **A**, **B** i **C** als vèrtexs del triangle i **O** al punt que considerem sobre l'altura relativa al costat **AB**. Suposem també que aquest punt **O** es troba a una distància x del costat **AB**. Aleshores la suma total de les distàncies d'aquest punt O a cadascun dels vèrtexs serà $D=d(O,A)+d(O,B)+d(O,C)$ pintada amb vermell en el següent dibuix.



Ara, aplicant Pitàgores tenim que $d(O,A)^2=x^2+6^2 \to d(O,A)=\sqrt{x^2+6^2}$

I la distància total serà:

$$D=d(O,A)+d(O,B)+d(O,C)=\sqrt{x^2+6^2}+\sqrt{x^2+6^2}+5-x\to$$

$$\to \boxed{D(x)=2\sqrt{x^2+36}+5-x \quad on \quad x\in[0,5]}$$

b) Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle sigui màxima i els punts per als quals sigui mínima.

$$D(x)=2\sqrt{x^2+36}+5-x \to D'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+36}}\cdot 2x-1=\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}-1$$

$$D'(x)=0\to\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}-1=0\to\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}=1\to 2x=\sqrt{x^2+36}\to 4x^2=x^2+36\to$$

$\to 3x^2=36\to x^2=12\to x=\pm\sqrt{12}$ però en el nostre problema solament té sentit la solució positiva perquè la negativa se'n sortiria del triangle.

Podem saber quin si el punt $x=\sqrt{12}$ és un màxim o un mínim mitjançant la segona derivada obtenint que:

$$D'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}-1\to D''(x)=\frac{2\sqrt{x^2+36}-2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+36}}\cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2+36}\right)^2}=\frac{2\sqrt{x^2+36}-\frac{2x^2}{\sqrt{x^2+36}}}{x^2+36}=$$

$$=\frac{\frac{2(x^2+36)-2x^2}{\sqrt{x^2+36}}}{x^2+36}=\frac{2x^2+72-2x^2}{(x^2+36)\cdot\sqrt{x^2+36}}=\frac{72}{\sqrt{(x^2+36)^3}}$$

$$D''\left(\sqrt{12}\right)=\frac{72}{\sqrt{\left(\left(\sqrt{12}\right)^2+36\right)^3}}=\frac{72}{\sqrt{(12+36)^3}}=\frac{72}{\sqrt{48^3}}>0\to x=\sqrt{12}\text{ és un mínim.}$$

En aquest mínim la funció val:

$$D\left(\sqrt{12}\right)=2\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2+36}+5-\sqrt{12}=2\sqrt{12+36}+5-\sqrt{12}=5+6\sqrt{3}\simeq 15,39$$

• Com solament tenim un extrem relatiu (que és un mínim) el màxim de la nostra funció s'assolirà en un dels dos extrems de l'interval on està definida, és a dir, en $x=0$ o en $x=5$. Avaluem la funció en aquestos dos punts:

$$D(x)=2\sqrt{x^2+36}+5-x\to\begin{cases}D(0)=2\sqrt{36}+5=17\\ D(5)=2\sqrt{61}+0\simeq 15,62\end{cases}$$

tant, la funció assoleix el seu màxim en el punt $x=0$ és a dir, quan agafem el punt O com a el punt mitjà del segment $\overline{AB}$.

[Tornar a l'enunciat]

10) PAU 2000 Sèrie 3 Qüestió 2:
Determineu els punts de la gràfica de $f(x)=x^4+5x$ on la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant. Calculeu l'equació d'aquestes rectes tangents.

La bisectriu del primer quadrant és la recta $y=x$ que per tant té pendent 1. Les rectes paral·leles a aquesta bisectriu tindran la mateixa pendent. Per tant, el problema ens demana els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ té pendent 1. Però la pendent de la recta tangent en un punt és la derivada de la funció en aquest punt, per tant, hem de calcular els punts on la derivada val 1.

$$f(x)=x^4+5x \to f'(x)=4x^3+5$$

$$f'(x)=1 \to 4x^3+5=1 \to 4x^3=-4 \to x^3=-1 \to x=\sqrt[3]{-1} \to \boxed{x=-1}$$

També ens demana calcular l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt:

Recordem que l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt x_0 és:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

En el nostre cas:

$$x_0=-1 \to f(x_0)=f(-1)=(-1)^4+5(-1)=1-5=-4$$

$$f'(x)=4x^3+5 \to f'(-1)=4(-1)^3+5=-4+5=1$$

$$y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1)) \to y-(-4)=1\cdot(x+1) \to y+4=x+1 \to \boxed{y=x-3}$$

Tornar a l'enunciat

11) PAU 2000 Sèrie 3 Problema 1:
Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x^2}{x+a}$, on ***a*** és un paràmetre.

a) Calculeu ***a*** sabent que la recta $y=x+2$ és una asímptota obliqua d'aquesta funció.

Recordem que una asímptota obliqua és una recta de la forma $y=mx+n$ on $m=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ i $n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$.

En el nostre cas, si l'asímptota és la recta $y=x+2$ aleshores $m=1$ i $n=2$.

Per tant:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \to 1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x+a}}{x} \to 1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+ax} \to 1=1$$ És a dir, aquest límit sempre és 1 independentment del valor del paràmetre a, per tant, aquesta condició no ens aporta informació sobre el valor de a. Mirem l'altra condició:

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)\xrightarrow[n=2]{m=1}2=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1\cdot x) \to 2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+a}-x\right) \to$$

$$\to 2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x(x+a)}{x+a}\right) \to 2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x^2-ax}{x+a}\right) \to 2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-ax}{x+a}\right)$$

Però $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-ax}{x+a}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\cdot(-a)}{x\left(1+\frac{a}{x}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-a}{1+\frac{a}{x}}\right)=\dfrac{-a}{1+0}=-a\to -a=2\to \boxed{a=-2}$

b) Prenent el valor de **a** obtingut en l'altre apartat, calculeu el domini, les interseccions de la gràfica amb els eixos, els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de la funció f. Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció a partir de les dades que heu obtingut.

Si $a=-2$ aleshores $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

•**DOMINI**: Recordem que el domini de les fraccions algebraiques és tot $\mathbb{R}$ excepte els punts on dividim per zero. En el nostre cas: $x-2=0\to x=2\to \boxed{D(f)=\mathbb{R}-\{2\}}$

• **TALLS AMB ELS EIXOS**:

• **Talls amb l'eix x**:

Tall amb l'eix **x** $\to altura=0\to y=0\to f(x)=0\to \dfrac{x^2}{x-2}=0\to x^2=0\to x=0\to$ La funció talla l'eix **x** en el punt $(x,y)=(0,0)$.

• **Tall amb l'eix y**:

Tall amb l'eix **y** $\to x=0\to$ La funció talla l'eix **y** en el punt $(0,f(0))$ que és el mateix que abans.

• **EXTREMS RELATIUS I INTERVALS DE CREIXEMENT I DECREIXEMENT:**

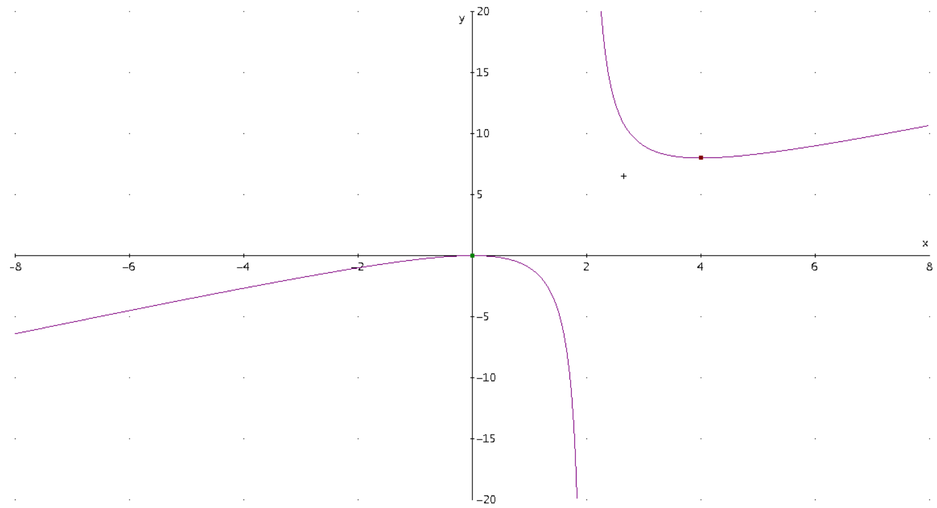
$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}\to f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0\to\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0\to x^2-4x=0\to x\cdot(x-4)=0\to\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$$

Recordem que per estudiar els intervals de monotonia de la funció no solament hem de considerar els punts on s'anul·la la derivada sinó també els punts de discontinuïtat de la funció, per tant, als dos punts trobats ara: $x=0$ i $x=4$, cal afegir el punt $x=2$ on f és discontinua. Així considerem els següents intervals:

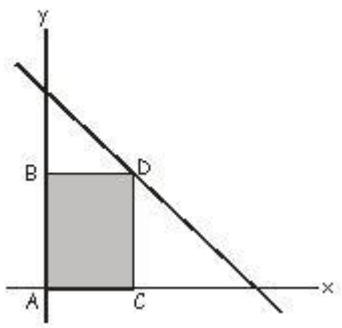
Interval	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	+	0	−	$\nexists$	−	0	+
Monotonia de $f(x)$	↗	M	↘	$\nexists$	↘	m	↗

Per tant, f monòtona creixent en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ i monòtona decreixent en $(0,2)\cup(2,4)$. f presenta un màxim relatiu en el punt $(0,f(0))=(0,0)$ i un mínim relatiu en $(4,f(4))=(4,8)$.



Tornar a l'enunciat

12) PAU 2000 Sèrie 5 Qüestió 2:
Considereu els rectangles del pla, els vèrtexs **A**, **B**, **C** i **D** dels quals compleixen les condicions següents: **a)A** és l'origen de coordenades; **b)B** és a sobre del semieix de les $y > 0$; **C** és a sobre del semieix de les $x > 0$; **d)** és a sobre de la recta d'equació $2x + y = 1$, tal com es veu en la figura següent:



D'entre tots aquests rectangles, trobeu l'àrea del que la té màxima.

El punt A és l'origen de coordenades, per tant $A = (0,0)$

El punt **C** es troba sobre l'eix **X**, per tant serà de la forma $C = (x,0)$.

La base del rectangle és la distància entre els punts A i C, és a dir, la distància entre els punts $(0,0)$ i $(x,0)$ per tant x.

Com el punt D està en la mateixa vertical que C aleshores aquests dos punts han de tenir la mateixa coordenada x, és a dir, donat que $C = (x,0)$ aleshores sabem que $D = (x, y)$. Per tant, l'únic que ens queda per determinar és quan val y.

Però el punt D està a sobre de la recta $2x + y = 1$. Aïllant la y tenim que: $y = 1 - 2x$. Per tant, el nostre rectangle té base x i altura $y = 1 - 2x$ i la seva àrea serà $Àrea = Base \ x \ Altura = x \cdot (1 - 2x) = -2x^2 + x$

Per tant, la funció a maximitzar és $f(x) = -2x^2 + x$.

Però en el context del nostre problema aquesta funció no està definida en tot $\mathbb{R}$ sinó solament quan la coordenada x és positiva i abans de que la recta $2x+y=1$ intersequi amb l'eix X.
Calculem aquest punt d'intersecció:

Tall entre $\begin{cases} Eix\ OX \\ 2x+y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 2x+y=1 \end{cases} \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

Per tant es tracta de maximitzar la funció $f(x)=-2x^2+x$ on $x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$

Per maximitzar-la igualem la derivada a zero.

$$f(x)=-2x^2+x \rightarrow f'(x)=-4x+1$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -4x+1=0 \rightarrow 4x=1 \rightarrow x=\frac{1}{4}$$

Per tant l'àrea màxima s'assoleix quan la base del rectangle és $x=\frac{1}{4}$. Aleshores $y=1-2x=1-2\frac{1}{4}=1-\frac{2}{4}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ i l'àrea del rectangle és:

$$\grave{A}rea = Base\ x\ Altura = x\cdot y=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{8}}$$

Tornar a l'enunciat

13) PAU 2000 Sèrie 6 Qüestió 2:

Donada la funció $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$, determineu l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt on s'anul·la la segona derivada.

Primer haurem de saber quin és aquest punt on s'anul·la la segona derivada.

$$f(x)=\frac{x+1}{e^x} \rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot e^x-(x+1)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{\cancel{e^x}-xe^x\cancel{-e^x}}{e^{2x}}=\frac{-x}{e^x}\rightarrow$$

$$\rightarrow f''(x)=\frac{-1\cdot e^x-(-x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-e^x+xe^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(x-1)}{e^{2x}}=\frac{x-1}{e^x}$$

$$\rightarrow f''(x)=0 \rightarrow \frac{x-1}{e^x}=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$$

Per tant el punt on s'anul·la la segona derivada és el punt $\boxed{x=1}$.

Recordem que l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en un punt x_0 és: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

En el nostre cas $x_0=1 \rightarrow f(x_0)=\dfrac{1+1}{e^1}=\dfrac{2}{e}$ i $f'(x_0)=f'(1)=\dfrac{-1}{e^1}=\dfrac{-1}{e}$ i per tant l'equació de la recta tangent serà:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \rightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1) \rightarrow y-\frac{2}{e}=\frac{-1}{e}(x-1)\rightarrow$$

$$\rightarrow y-\frac{2}{e}=\frac{1}{e}-\frac{x}{e} \rightarrow y=\frac{2}{e}+\frac{1}{e}-\frac{x}{e} \rightarrow y=\frac{3}{e}-\frac{x}{e} \rightarrow \boxed{y=\frac{1}{e}(3-x)}$$

Tornar a l'enunciat

14) PAU 2001 Sèrie 2 Problema 2:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{2x^2+1}$

a) Determineu les seves asímptotes.

• **Asímptotes verticals:**

Les asímptotes verticals apareixen en els punts on la funció dóna infinit, és a dir, en els punts on s'anul·la el denominador però no s'anul·la el numerador.

$$2x^2+1=0 \to 2x^2=-1 \to x^2=\frac{-1}{2} \to x=\sqrt{\frac{-1}{2}} \to \nexists$$

Com el denominador no s'anul·la mai **no hi hauran asímptotes verticals**.

• **Asímptotes horitzontals:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}\left(1-\cancel{\frac{2}{x}}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-0}{2+0}\right)=\frac{1}{2}$$

La recta $\boxed{y=\frac{1}{2}}$ és asímptota horitzontal de la funció.

• **Asímptotes obliqües:**

Si una funció té asímptotes horitzontals aleshores **no té asímptotes obliqües**.

b) Calculeu els intervals on creix i on decreix, i els extrems relatius.

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{2x^2+1} \to f'(x)=\frac{(2x-2)\cdot\left(2x^2+1\right)-\left(x^2-2x\right)\cdot 4x}{\left(2x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^3+2x-4x^2-2-4x^3+8x^2}{\left(2x^2+1\right)^2}=\frac{4x^2+2x-2}{\left(2x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \to \frac{4x^2+2x-2}{\left(2x^2+1\right)^2}=0 \to 4x^2+2x-2=0 \xrightarrow{\div 2} 2x^2+x-1=0 \to \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

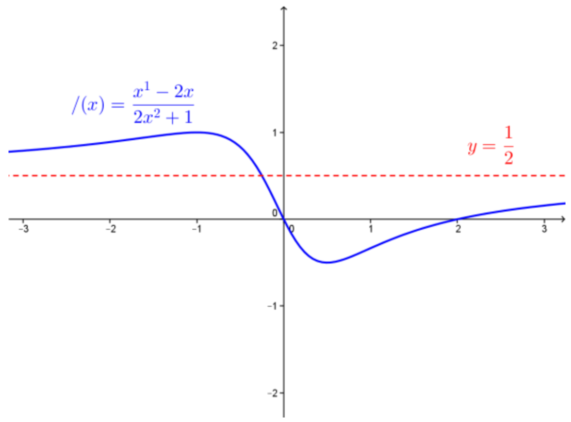
Per estudiar el creixement i decreixement de la funció fem la següent taula on fiquem els punts on s'anul·la la derivada i **<u>els punts on la funció deixa de ser continua</u>**. En aquest cas, la funció és sempre continua.

Interval	$(-\infty,-1)$	-1	$\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

Per tant, f és estrictament creixent en $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ i estrictament decreixent en $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

En el punt $\left(-1,f\left(-1\right)\right)=\left(-1,1\right)$ té un màxim relatiu i en $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$ té un mínim relatiu.

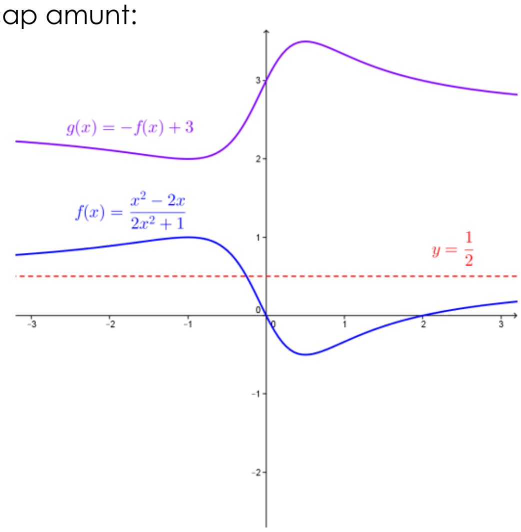
c) D'acord amb els resultats que heu obtingut, dibuixeu aproximadament la seva gràfica.



d) Fixant-vos en la gràfica anterior, expliqueu quina seria la gràfica de la funció $g\left(x\right)=-f\left(x\right)+3$ (feu-ne un esquema). En quins punts té màxims la funció $g\left(x\right)$?

Quan fem la funció $g\left(x\right)=-f\left(x\right)$ el que estem fent es de cada punt fem el seu simètric respecte de l'eix **OX**, és a dir, faríem la gràfica simètrica de l'anterior respecte de l'eix **OX**. Finalment al sumar 3 unitats el que fem és desplaçar el gràfic 3 unitats cap amunt.

El següent gràfic és l'anterior on li hem afegit amb color lila la nova funció $g\left(x\right)$. Es pot comprovar que efectivament g resulta de girar f respecte de l'eix**OX** i després desplaçar-la 3 unitats cap amunt:



Tornar a l'enunciat

15) PAU 2001 Sèrie 4 Qüestió 3:

Considereu la funció definida per $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \;\; x\le 0 \\ 2x+1 & si \;\; x>0 \end{cases}$ on **a** és un nombre real.

a) Calculeu $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i comproveu que $f(x)$ és contínua en $x=0$.

Com en el punt $x=0$ és precisament on coincideixen els dos trossos de la funció per calcular el límit hem de fer-ho per l'esquerra i per la dreta.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{ax}=e^{a\cdot 0}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=2\cdot 0+1=0+1=1$$

Com $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ aleshores podem dir que existeix $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ i val 1.

Com que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ aleshores la funció és continua en $x=0$.

b)Per a quin valor del paràmetre ***a***la funció $f(x)$ és derivable en $x=0$?

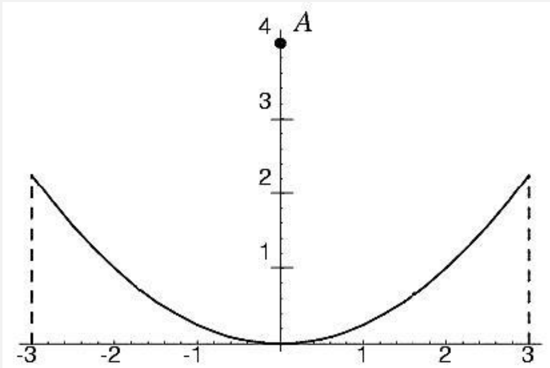
$$f(x)=\begin{cases} e^{ax} & si \;\; x\le 0 \\ 2x+1 & si \;\; x>0 \end{cases} \to f'(x)=\begin{cases} e^{ax}\cdot a & si \;\; x\le 0 \\ 2 & si \;\; x>0 \end{cases} = \begin{cases} ae^{ax} & si \;\; x\le 0 \\ 2 & si \;\; x>0 \end{cases}$$

f derivable en $x=0$ si les derivades per l'esquerra i per la dreta coincideixen, és a dir, si $ae^{a\cdot 0}=2 \leftrightarrow ae^0=2 \leftrightarrow a\cdot 1=2 \leftrightarrow \boxed{a=2}$

Tornar a l'enunciat

16) PAU 2001 Sèrie 4 Problema 1:

La riba d'un tram de riu descriu la corba $y=\dfrac{1}{4}x^2$ per a x entre –3 i 3, i en el punt A = (0, 4) hi ha un poble, tal com es pot veure en l'esquema següent:



a) Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa x.

Els punts de la riba són de la forma $P=(x,y)=\left(x,\tfrac{1}{4}x^2\right)$

La distància entre els punts P i A la podem calcular com el mòdul del vector que els uneix.

$$\overrightarrow{AP}=P-A=\left(x,\tfrac{1}{4}x^2\right)-(0,4)=\left(x,\tfrac{1}{4}x^2-4\right)$$

$$d(\mathrm{P},\mathrm{A})=\left|\overrightarrow{PA}\right|=\left|\left(x,\tfrac{1}{4}x^2-4\right)\right|=\sqrt{x^2+\left(\tfrac{1}{4}x^2-4\right)^2}=\sqrt{x^2+\tfrac{1}{16}x^4-2x^2+16}=$$

$$=\boxed{\boxed{\sqrt{\tfrac{1}{16}x^4-x^2+16}}}$$

b) Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?

$$f(x)=\sqrt{\tfrac{1}{16}x^4-x^2+16}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{16}x^4-x^2+16\right)^{\frac{-1}{2}}\left(\tfrac{1}{4}x^3-2x\right)=\frac{\tfrac{1}{4}x^3-2x}{2\sqrt{\tfrac{1}{16}x^4-x^2+16}}=$$

$$=\frac{\dfrac{x^3-8x}{4}}{2\sqrt{\tfrac{1}{16}x^4-x^2+16}}=\frac{x^3-8x}{8\sqrt{\tfrac{1}{16}x^4-x^2+16}}$$

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{x^3-8x}{8\sqrt{\tfrac{1}{16}x^4-x^2+16}}=0\rightarrow x^3-8x=0\rightarrow x\cdot\left(x^2-8\right)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2=8\rightarrow\begin{cases}x=-2\sqrt{2}\\ x=2\sqrt{2}\end{cases}\end{cases}$$

Interval	$\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)$	$-2\sqrt{2}$	$\left(-2\sqrt{2},0\right)$	0	$\left(0,2\sqrt{2}\right)$	$2\sqrt{2}$	$\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	↘	m	↗	M	↘	m	↗

Per tant, hi ha dos mínims relatius, $x=-2\sqrt{2}$ i $x=2\sqrt{2}$ i un màxim relatiu en el punt $(0,0)$ **(Noteu que per simetria resultava obvi que els extrems relatius havien de ser simètrics respecte de zero)**

NOTA: El problema està plantejat per a $x\in[-3,3]$ per tant la taula correcta no seria l'anterior sinó aquesta:

Interval	$(-3,0)$	0	$(0,3)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonia de $f(x)$	↗	M	↘

c) Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2?

Basant-nos en la taula anterior (la de 3 columnes) donat que la funció és creixent en l'interval $(-3,0)$ i decreixent en $(0,3)$, la distància màxima s'assolirà en el punt $x=0$ i la mínima en els punts $x=-3$ i $x=3$.

Per simetria $f(-3)=f(3)=\sqrt{\frac{1}{16}x^4-x^2+16}=\sqrt{\frac{1}{16}\cdot 3^4-3^2+16}\simeq 3,47$

Per tant la distància mínima és de $3,47$ i no hi pot haver cap punt amb una distància inferior a 2.

Tornar a l'enunciat

17) PAU 2001 Sèrie 5 Qüestió 1:

Per a cada valor del paràmetre $a \in \mathbb{R}$, considereu la funció $f(x) = x + \frac{3-a}{x}$ (definida per a tots els valors de x diferents de 0).

a) Determineu per a cada valor del paràmetre *a*, els extrems relatius que té la funció $f(x)$.

$$f(x) = x + \frac{3-a}{x} \to f'(x) = 1 + \frac{0 \cdot x - (3-a) \cdot 1}{x^2} = 1 + \frac{a-3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \to 1 + \frac{a-3}{x^2} = 0 \to \frac{a-3}{x^2} = -1 \to a-3 = -x^2 \to 3-a = x^2 \to x = \pm\sqrt{3-a}$$

Podem notar que aquests punts solament tenen sentit si $3-a>0$, és a dir, si $a<3$.

$$\to f'(x) = 1 + \frac{a-3}{x^2} \to f''(x) = 0 + \frac{0 \cdot x^2 - (a-3) \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{(3-a) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2(3-a)}{x^3}$$

$f''\left(-\sqrt{3-a}\right) = \frac{2(3-a)}{\left(-\sqrt{3-a}\right)^3} = \frac{2(3-a)}{-(3-a)\left(\sqrt{3-a}\right)} = \frac{2}{-\sqrt{3-a}} < 0 \to -\sqrt{3-a}$ és un màxim relatiu.

$f''\left(\sqrt{3-a}\right) = \frac{2(3-a)}{\left(\sqrt{3-a}\right)^3} = \frac{2(3-a)}{(3-a)\left(\sqrt{3-a}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3-a}} > 0 \to \sqrt{3-a}$ és un mínim relatiu.

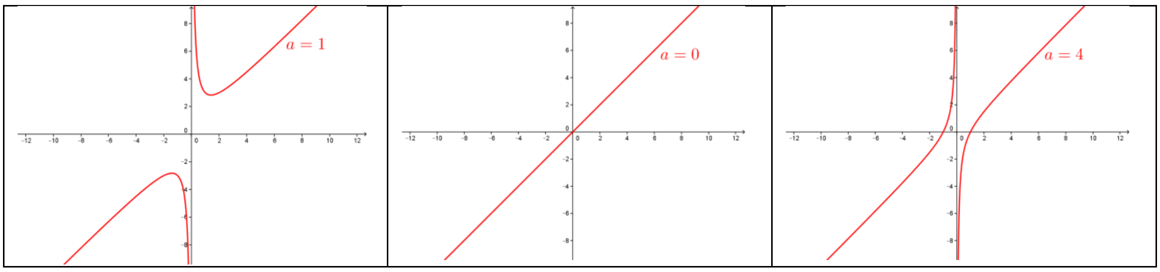
Per tant:

• Si $a<3$ la funció té dos extrems relatius, que són $x=-\sqrt{3-a}$ i $x=\sqrt{3-a}$.
Com $f''\left(-\sqrt{3-a}\right)<0$ i $f''\left(\sqrt{3-a}\right)>0$ tenim que en $x=-\sqrt{3-a}$ hi ha un màxim relatiu i en $x=\sqrt{3-a}$ hi ha un mínim relatiu.

• Si $a=0$ aleshores la funció queda $f(x)=x$ que és la recta diagonal del primer i tercer quadrant que evidentment no té cap màxim ni mínim.

• Si $a>3$ els que haurien de ser candidats a extrems relatius, que són $x=-\sqrt{3-a}$ i $x=\sqrt{3-a}$ no existeixen perquè no es poden calcular les arrels al sortir el radicand negatiu. Per tant, en aquest cas la funció no té extrems relatius.

En els següents gràfics he dibuixat la funció per a $a=1$, $a=0$ i $a=4$



b) Per a quins valors del paràmetre *a* la funció $f(x)$ és sempre creixent?

$f(x)$ serà sempre creixent si $f'(x)$ és sempre positiva.

$f'(x)=1+\dfrac{a-3}{x^2}$ serà positiva per a qualsevol valor de x si el numerador $a-3$ és positiu o 0, és a dir, si $a-3\geq 0 \leftrightarrow \boxed{a\geq 3}$

Tornar a l'enunciat

18) PAU 2002 Sèrie 1 Qüestió 2:

Se sap que la derivada d'una funció $f(x)$ és: $f'(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+1}$

Calculeu les abscisses dels punts on la funció $f(x)$ té els seus extrems relatius, especificant per a cada un dels valors que obtingueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim relatiu.

$$f'(x)=0\rightarrow \frac{x^2+x-6}{x+1}=0\rightarrow x^2+x-6=0\rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=2 \end{cases}$$

$$x+1=0\rightarrow x=-1\rightarrow D(f')=\mathbb{R}-\{-1\}$$

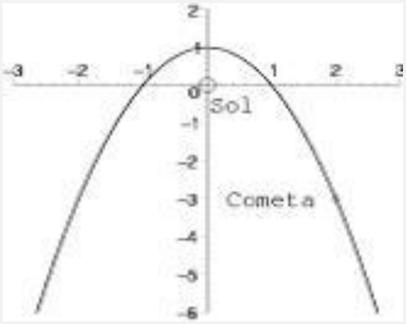
(Noteu que en aquesta taula hem de ficar els punts on s'anul·la la derivada i els que es fa infinita, per tant hem d'incloure el punt $x=-1$.

Interval	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	m	$\nearrow$

Per tant, la funció té dos extrems relatius en $x=-3$ i en $x=2$ i tots dos són mínims relatius perquè en ambdós casos f passa de decreixent a creixent.

Tornar a l'enunciat

19) PAU 2002 Sèrie 1 Problema 1:
Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola $y = 1 - x^2$, tal com es veu a la figura següent:



a) Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?

El cometa es troba en la trajectòria $y = 1 - x^2$. Per tant, un punt qualsevol d'aquesta trajectòria és $P = (x, y) = (x, 1 - x^2)$

La distància del cometa al Sol serà la distància del punt $P = (x, 1 - x^2)$ a l'origen de coordenades $O = (0,0)$.

La distància entre dos punts és el mòdul del vector que els uneix.

$\overrightarrow{OP} = P - O = (x, 1 - x^2) - (0,0) = (x, 1 - x^2)$

$$d(O,P) = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|(x, 1 - x^2)\right| = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4} = \boxed{\boxed{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}}$$

Per trobar el mínim de la distància podem minimitzar la funció distància o el seu quadrat. És a dir, si volguéssim treure l'arrel a l'expressió anterior trobaríem exactament els mateixos màxims i mínims relatius. (Evidentment canviaria la coordenada y d'aquests punts però no la x)

$$d(O,P) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \rightarrow d'(x) = \frac{1}{2}\left(x^4 - x^2 + 1\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(4x^3 - 2x\right) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$$

$$d'(x) = 0 \rightarrow \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = 0 \rightarrow 4x^3 - 2x = 0 \rightarrow 2x \cdot \left(2x^2 - 1\right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \rightarrow x = \dfrac{\pm\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Per tant, tenim tres candidats a extrems relatius, que són $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $x = 0$ i $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Interval	$\left(-\infty,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	↘	m	↗	M	↘	m	↗

Així la funció té dos mínims relatius en els punts $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ i $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ on la distància és

$$d\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{4}{16}-\frac{2}{4}+1}=\sqrt{\frac{4-8+16}{16}}=\sqrt{\frac{12}{16}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per tant la resposta és que hi ha dos punts que són $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ i $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ on s'assoleix la distància mínima al sol i aquesta distància és $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

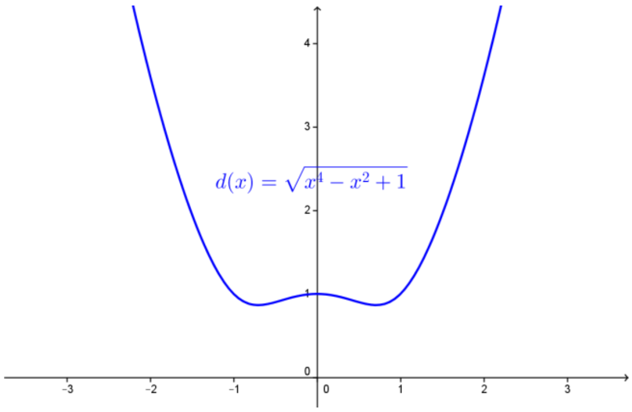
c) Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?

Al dibuix ja es veu que no hi ha cap punt de la paràbola on la distància al Sol sigui màxima perquè la paràbola és una corba infinita no tancada. Una manera de justificar-ho analíticament seria $d(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}\rightarrow\lim_{x\to\infty}d(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^4-x^2+1}=+\infty$ per tant, podem trobar punts de la paràbola a una distància tant gran com vulguem.

d) Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?

Si, el punt $\boxed{x=0}$

En el següent gràfic s'ha representat la funció $d(x)$ i es pot comprovar que aquesta funció té dos mínims relatius en les abscisses $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ i $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, que té un màxim local en el punt $x=0$ i que efectivament no té un màxim absolut perquè la funció té dos branques a l'esquerra i a la dreta que tendeixen cap a més infinit.



Tornar a l'enunciat

20) PAU 2002 Sèrie 2 Qüestió 2:
Sabent que la funció $y=(x+a)(x^2-4)$, on a és un nombre real, té un màxim i un mínim relatius, i que el màxim relatiu s'assoleix en el punt $x=-\frac{1}{3}$, trobeu l'abscissa del mínim relatiu.

Els màxims i mínims relatius s'assoleixen en els punts on s'anul·la la derivada.

$$y=(x+a)(x^2-4) \to y'(x)=1\cdot(x^2-4)+(x+a)\cdot 2x \to y'(x)=x^2-4+2x^2+2ax \to$$
$$\to y'(x)=3x^2+2ax-4$$

Si la funció assoleix un màxim relatiu en $x=\frac{-1}{3}$, en aquest punt la seva derivada ha de ser nul·la. És a dir, $y'\left(\frac{-1}{3}\right)=0$. Però:

$$y'\left(\frac{-1}{3}\right)=0 \to\to 3\left(\frac{-1}{3}\right)^2+2a\left(\frac{-1}{3}\right)-4=0 \to \frac{3}{9}-\frac{2a}{3}-4=0 \to \frac{1}{3}-\frac{2a}{3}-\frac{12}{3}=0 \to$$
$$\to 1-2a-12=0 \to 1-12=2a \to -11=2a \to a=\frac{-11}{2}$$

Per tant, una vegada sabem que $a=\frac{-11}{2}$ substituïm en l'expressió de la derivada i tenim:

$$y'(x)=3x^2+2ax-4 \xrightarrow{a=\frac{-11}{2}} y'(x)=3x^2-11x-4=0$$

$$y'(x)=0 \to 3x^2-11x-4=0 \to \begin{cases} x=\frac{-1}{3} \\ x=4 \end{cases}$$

Per tant, l'altre extrem relatiu el trobem en el punt d'abscissa $\boxed{x=4}$.

Tornar a l'enunciat

21) PAU 2002 Sèrie 3 Problema 1:
S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de $81\pi m^3$ de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 € el m^2 i les dues bases amb un material que costa 45 € el m^2.
a) Determineu la relació que hi haurà entre el radi *r* de les bases circulars i l'altura *h* del cilindre, i doneu el cost *C(r)* del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de *r*.

El volum del cilindre és l'àrea de la base πr^2 per l'altura. Si anomenem h a l'altura del cilindre tenim:

$$A = 81\pi \to \pi r^2 h = 81\pi \xrightarrow{\div \pi} r^2 h = 81 \to \boxed{h = \frac{81}{r^2}}$$

b) Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit perquè el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?

Cost del cilindre:

$$C(r) = 30 \cdot \textit{Superfície lateral} + 45 \cdot \textit{Superfície bases} = 30 \cdot 2\pi r \cdot h + 45\pi r^2 \cdot 2 =$$

$$= 60\pi r h + 90\pi r^2 \overset{h=\frac{81}{r^2}}{=} 60\pi r \cdot \frac{81}{r^2} + 90\pi r^2 = 4860\frac{\pi}{r} + 90\pi r^2$$

$$\to \boxed{C(r) = 4860\pi\frac{1}{r} + 90\pi r^2}$$

Per minimitzar aquesta funció hem de calcular la seva derivada i igualar-la a zero.

$$C(r) = 4860\pi\frac{1}{r} + 90\pi r^2 \to C'(r) = 4860\pi \cdot \frac{-1}{r^2} + 180\pi r = -4860\pi\frac{1}{r^2} + 180\pi r$$

$$C'(r) = 0 \to -4860\pi\frac{1}{r^2} + 180\pi r = 0 \xrightarrow{\div \pi} -4860 \cdot \frac{1}{r^2} + 180r = 0 \to 180r = \frac{4860}{r^2} \to$$

$$\to r^3 = \frac{4860}{180} \to r^3 = 27 \to r = \sqrt[3]{27} \to r = 3$$

L'altura del cilindre serà: $h = \frac{81}{r^2} = \frac{81}{3^2} = \frac{81}{9} = 9$

Per tant el cilindre ha de tenir un radi de **3 metres i una altura de 9 metres**.

NOTA: Com el problema no ens demana comprovar que efectivament aquest punt sigui un mínim relatiu i no un màxim no ho faré.

c) Quin serà, en aquest cas, el cost del material?

$$C(r) = 4860\pi\frac{1}{r} + 90\pi r^2 \to C(3) = 4860\pi\frac{1}{3} + 90\pi \cdot 3^2 = 1620\pi + 810\pi =$$

$$= 2430\pi = \boxed{7634{,}07€}$$

Tornar a l'enunciat

22) PAU 2003 Sèrie 2 Qüestió 1:

Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt $P=(1,-1)$ i que són tangents a la corba d'equació $y=(x-1)^2$.

Els punts de la corba $y=(x-1)^2$ són de la forma $Q=\left(x,(x-1)^2\right)$.

El pendent de la recta tangent a la corba $y=(x-1)^2$ en cadascun d'aquests punts $Q=\left(x,(x-1)^2\right)$ és $y'(x)=2(x-1)$.

Si fem la recta r que passa per $P=(1,-1)$ i per $Q=\left(x,(x-1)^2\right)$ tenim que el pendent d'aquesta recta serà: $P=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(x-1)^2-(-1)}{x-1}=\dfrac{x^2-2x+1+1}{x-1}=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

Per a que r sigui la tangent hem d'igualar les dues pendents:

$$2(x-1)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}\rightarrow 2(x-1)^2=x^2-2x+2\rightarrow 2\left(x^2-2x+1\right)=x^2-2x+2\rightarrow$$
$$\rightarrow 2x^2-4x+2=x^2-2x+2\rightarrow x^2-2x=0\rightarrow x\cdot(x-2)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

Finalment, recordant que l'equació de la recta tangent a la corba $y(x)$ en el punt d'abscissa $x=a$ és $y-y(a)=y'(a)(x-a)$ tindrem que:

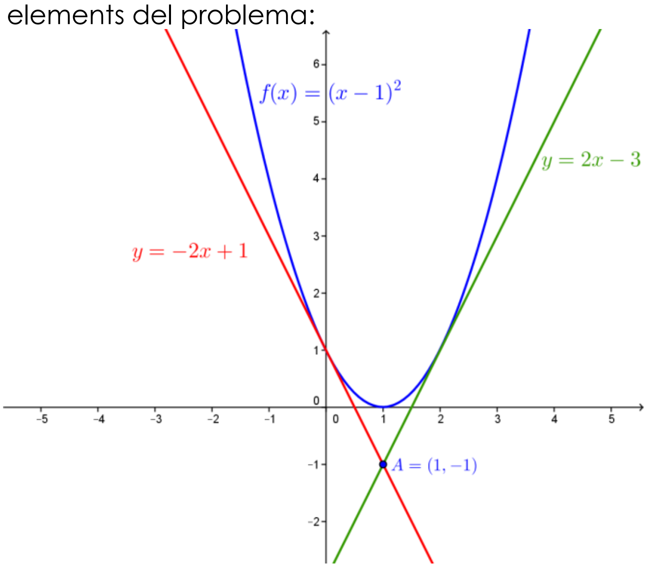
Recta tangent en $x=0$:

$$y-y(0)=y'(0)(x-0)\rightarrow y-1=-2(x-0)\rightarrow y-1=-2x\rightarrow \boxed{y=-2x+1}$$

Recta tangent en $x=2$:

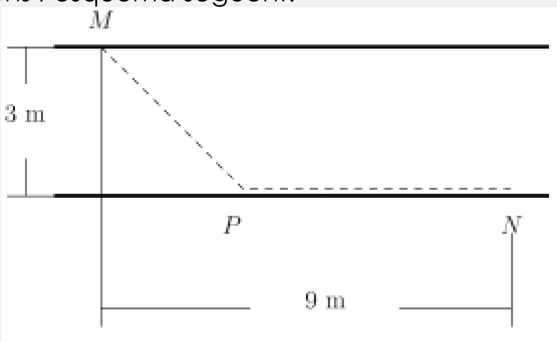
$$y-y(2)=y'(2)(x-2)\rightarrow y-1=2(x-2)\rightarrow y-1=2x-4\rightarrow \boxed{y=2x-3}$$

Gràfic amb tots els elements del problema:



Tornar a l'enunciat

23) PAU 2003 Sèrie 2 Problema 1:
Volem unir el punt **M** situat en un costat d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt **N** situat a l'altre costat i 9 m més avall mitjançant dos cables rectes, un des de **M** fins a un punt **P** situat a l'altre costat del carrer i un altre des de **P** fins a **N** seguint el mateix costat del carrer, segons l'esquema següent:



El cost de la instal·lació del cable **MP** és de 12 € per metre i del cable *PN* de 6 € per metre.
Quin punt **P** haurem d'escollir de manera que la connexió de **M** amb **N** sigui tan econòmica com sigui possible? Quin serà aquest cost mínim?

Sigui **O** el punt de l'altra banda de carrer i a la mateixa alçada que **M**.
Sigui **x** la distància entre **O** i **P**.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle **MOP** rectangle en **O** tindrem:

$$\overline{MP}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{OP}^2 \rightarrow d(M,P)^2 = 3^2 + x^2 \rightarrow d(M,P) = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}$$

El cost de la instal·lació és:

$$Cost = CostMP + CostPN = 12 \cdot d(M,P) + 6d(P,N) = 12\sqrt{9+x^2} + 6(9-x)$$

Per tant, la funció que hem de minimitzar és:

$$C(x) = 12\sqrt{9+x^2} + 6(9-x)$$

$$C(x) = 12\sqrt{9+x^2} + 6(9-x) \rightarrow C'(x) = 12 \cdot \frac{1}{2}\left(9+x^2\right)^{\frac{-1}{2}} 2x - 6 = \frac{12x}{\sqrt{9+x^2}} - 6$$

$$C'(x) = 0 \rightarrow \frac{12x}{\sqrt{9+x^2}} - 6 = 0 \rightarrow \frac{12x}{\sqrt{9+x^2}} = 6 \rightarrow 12x = 6\sqrt{9+x^2} \rightarrow 2x = \sqrt{9+x^2} \xrightarrow{x^2}$$
$$4x^2 = 9 + x^2 \rightarrow 3x^2 = 9 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Ens quedarem solament amb la solució positiva, és a dir, amb $x = \sqrt{3}$ perquè la solució negativa no té sentit en el context del problema. No obstant, com que en el procés de resolució de l'equació hem elevat al quadrat, una vegada resolta l'equació hem de comprovar si les solucions que hem trobat són solucions de l'equació original perquè al elevar al quadrat podem introduir solucions.

Finalment, tot i que no ho demana el problema, caldria comprovar que efectivament en el punt $x = \sqrt{3}$ la funció cost assoleix un mínim.

$$C(x) = 12\sqrt{9+x^2} + 6(9-x) \rightarrow C\left(\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{9+\left(\sqrt{3}\right)^2} + 6\left(9-\sqrt{3}\right) =$$

$$=12\sqrt{9+3}+6\left(9-\sqrt{3}\right)=12\sqrt{12}+54-6\sqrt{3}=12\cdot 2\sqrt{3}+54-6\sqrt{3}=18\sqrt{3}+54=$$

$$=18\left(\sqrt{3}+3\right)\simeq \boxed{85{,}18€}$$

Tornar a l'enunciat

24) PAU 2003 Sèrie 3 Qüestió 2:

Calculeu el punt de la corba $y=2+x-x^2$ en què la tangent és paral·lela a la recta $y=x$.

La recta tangent a la corba serà paral·lela a la recta $y=x$ si tenen la mateixa pendent.

Com la recta $y=x$ té pendent 1, la recta tangent a la corba serà paral·lela a la recta $y=x$ si té pendent igual a 1.

Però la pendent de la recta tangent a la corba en un punt coincideix amb la derivada en aquest punt. Per tant, estem buscant els punts de la corba on la derivada és 1. Així:

$$y=2+x-x^2 \rightarrow y'(x)=1-2x$$

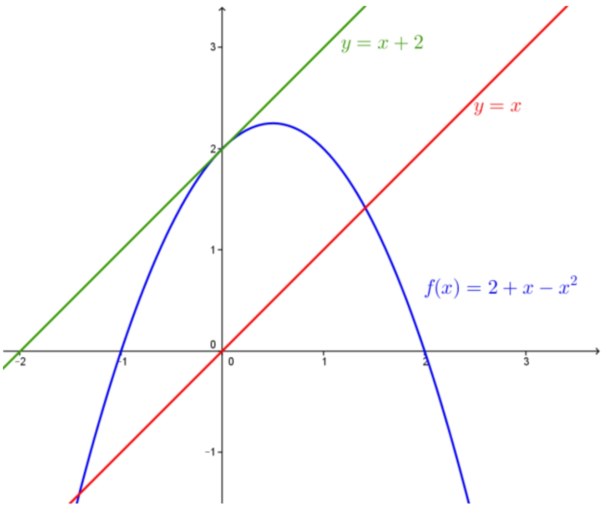
$$y'=1 \rightarrow 1-2x=1 \rightarrow 1-1=2x \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0$$

Calculem aleshores l'equació de la recta tangent a la corba en el punt $x=0$.

Aquesta recta és:

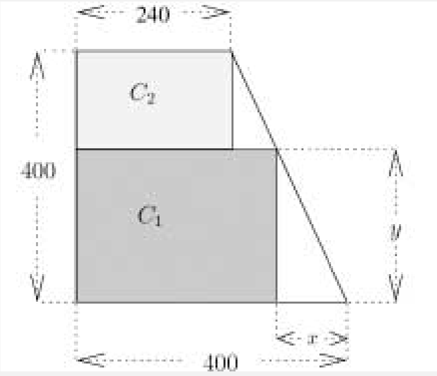
$$y-y(0)=y'(0)(x-0) \rightarrow y-2=1(x-0) \rightarrow y-2=x \rightarrow \boxed{y=x+2}$$

Gràfic amb els elements del problema:

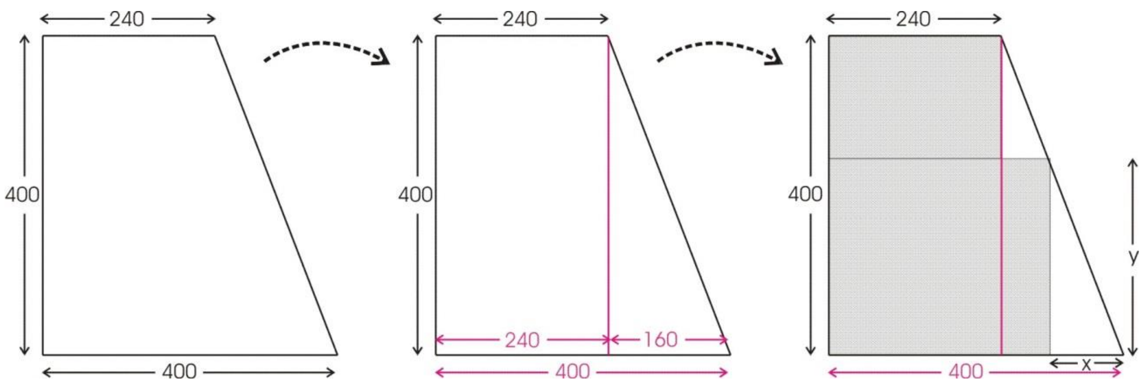


Tornar a l'enunciat

25) PAU 2003 Sèrie 3 Problema 1:
Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m, i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars C1 i C2. Anomenem x i y els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.



a) Comproveu que $y=\frac{5}{2}x$.



Dividint el trapezi amb un rectangle i un triangle tal i com mostra la figura es pot observar que el rectangle tindrà 240 metres d'ample per 400 d'alt mentre que el triangle tindrà $400-240=160$ metres d'ample per 400 d'alt.
Per construcció el triangle anterior i el triangle de catets **x** i **y** seran semblants, per tant:

$$\frac{y}{x}=\frac{400}{160}\rightarrow\frac{y}{x}=\frac{5}{2}\rightarrow\boxed{y=\frac{5}{2}x}$$

b) Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de x.

El camp C_1 fa $400-x$ metres d'ample per y metres d'alt, per tant la seva àrea serà $A_1=(400-x)\cdot y=(400-x)\cdot\frac{5}{2}x$

El camp C_2 fa 240 metres d'ample per $400-y$ metres d'alt, per tant la seva àrea serà $A_2=240(400-y)=240\left(400-\frac{5}{2}x\right)$

Per tant la suma de les dues àrees serà:

$$A = A_1 + A_2 = (400-x)\cdot\frac{5}{2}x + 240\left(400-\frac{5}{2}x\right) = 1000x - \frac{5}{2}x^2 + 96000 - 600x =$$

$$= \boxed{-\frac{5}{2}x^2 + 400x + 96000}$$

c) El camp C1 es vol sembrar amb blat de moro i el camp C2 amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per m^2 i amb el blat un benefici de 0,10 € per m^2. Determineu les mides de cada un dels camps per obtenir el benefici màxim.

La funció benefici serà:

$$f(x) = 0{,}12\cdot A_1 + 0{,}10\cdot A_2 = 0{,}12(400-x)\cdot\frac{5}{2}x + 0{,}10\cdot 240\left(400-\frac{5}{2}x\right) =$$

$$= 120x - 0{,}3x^2 + 9600 - 60x = -0{,}3x^2 + 60x + 9600 \rightarrow f(x) = -0{,}3x^2 + 60x + 9600$$

Aquesta funció és una paràbola invertida per tant, tindrà un màxim.

$$f(x) = -0{,}3x^2 + 60x + 9600 \rightarrow f'(x) = -0{,}6x + 60$$

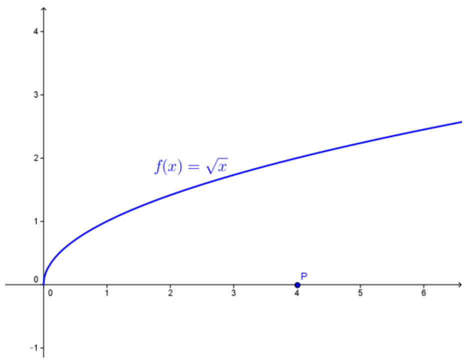
$$f'(x) = 0 \rightarrow -0{,}6x + 60 = 0 \rightarrow 0{,}6x = 60 \rightarrow x = \frac{60}{0{,}6} \rightarrow x = 100$$

Per tant, una vegada sabem que el benefici màxim s'obté quan $x = 100$ podem assegurar que el camp C_1 tindrà unes dimensions de $400-x$ per y és a dir de 300 per $\frac{5}{2}\cdot 100 = 250$ mentre que el camp C_2 farà 240 per $400-y$ és a dir, 240 per 150.

És a dir, $\boxed{C_1 = 300\ x\ 250}$ i $\boxed{C_2 = 240\ x\ 150}$

Tornar a l'enunciat

26) PAU 2003 Sèrie 5 Qüestió 1:
Determineu quin és el punt de la gràfica de $y = \sqrt{x}$ (és a dir, de la forma $(x, \sqrt{x})$) que és més a prop del punt $P = (4,0)$.



Un punt qualsevol de la gràfica és de la forma $Q=\left(x,\sqrt{x}\right)$.

La distància entre aquest punt Q i el punt P és el mòdul del vector que els uneix.

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=\left(x,\sqrt{x}\right)-\left(4,0\right)=\left(x-4,\sqrt{x}\right)$$

$$d\left(P,Q\right)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\left(x-4,\sqrt{x}\right)\right|=\sqrt{\left(x-4\right)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt{x^2-8x+16+x}=\sqrt{x^2-7x+16}$$

Per trobar el mínim derivem i igualem a zero.

$$d\left(x\right)=\sqrt{x^2-7x+16}\rightarrow d'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(x^2-7x+16\right)^{\frac{-1}{2}}\left(2x-7\right)=\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}$$

$$d'\left(x\right)=0\rightarrow\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}=0\rightarrow 2x-7=0\rightarrow 2x=7\rightarrow\boxed{x=\frac{7}{2}}$$

Per comprovar que $x=\frac{7}{2}$ és un mínim i no un màxim podríem estudiar el signe de $d'\left(x\right)$. Com el denominador és una arrel que sempre es positiva solament cal estudiar el signe del numerador comprovant que en el punt $x=\frac{7}{2}$ la derivada passa de negativa a positiva, per tant el punt $x=\frac{7}{2}$ és un mínim.

Tornar a l'enunciat

27) PAU 2003 Sèrie 5 Problema 1:

a) Determineu el valor del paràmetre *a* que fa que la funció $f\left(x\right)=\frac{x+a}{x^3}$ presenti un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=3$.

Si f presenta un extrem relatiu en el punt $x=3$aleshores $f'\left(3\right)=0$.

$$f\left(x\right)=\frac{x+a}{x^3}\rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1\cdot x^3-\left(x+a\right)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x^3-3x^3-3ax^2}{x^6}=\frac{-2x^3-3ax^2}{x^6}$$

$$f'\left(3\right)=0\rightarrow=\frac{-2\cdot 3^3-3a\cdot 3^2}{3^6}=0\rightarrow -2\cdot 3^3-3a\cdot 3^2=0\rightarrow 27\cdot\left(-2\right)-27a=0\rightarrow$$

$$\rightarrow 27\left(-2-a\right)=0\rightarrow -2-a=0\rightarrow\boxed{a=-2}$$

b) Per a aquest valor del paràmetre ***a***, calculeu els intervals de creixement i decreixement, i les asímptotes de la funció.

$$f\left(x\right)=\frac{x+a}{x^3}\xrightarrow{a=-2}f\left(x\right)=\frac{x-2}{x^3}$$

$$f(x)=\frac{x-2}{x^3}\rightarrow f'(x)=\frac{x^3-(x-2)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x^3-3x^3+6x^2}{x^6}=\frac{6x^2-2x^3}{x^6}=\frac{6-2x}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{6-2x}{x^4}=0\rightarrow 6-2x=0\rightarrow 6=2x\rightarrow x=3$$

Per estudiar els intervals de creixement i decreixement hem de estudiar els intervals que generen els punts on s'anul·la la derivada i els punts on no existeix, per tant també hem d'incloure el punt $x=0$.

Interval	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
Monotonia de $f(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	M	$\searrow$

Per tant f estrictament creixent en $(-\infty,0)\cup(0,3)$ i estrictament decreixent en $(3,+\infty)$.

En el punt $\boxed{(3,f(3))}$ té un màxim relatiu.

- **Asímptotes verticals:**

Busquem els punt a tals que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ Donat que $f(x)=\frac{x-2}{x^3}$, això passarà en el punt $x=0$. Per tant la recta $\boxed{x=0}$ és asímptota vertical de la funció.

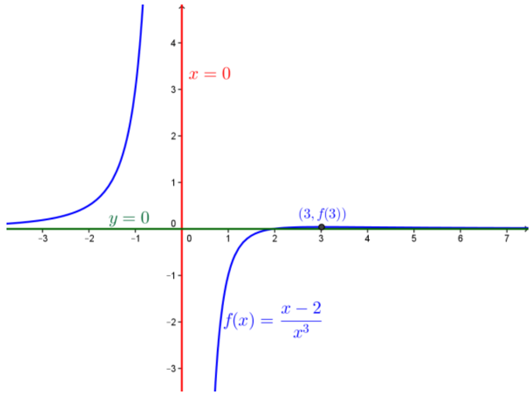
- **Asímptotes horitzontals:**

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}}\right)=\frac{0-0}{1}=0\rightarrow \boxed{y=0}$ asímptota horitzontal de la funció.

- **Asímptotes obliqües:**

Si una funció té asímptotes horitzontals aleshores no en té d'obliqües.

c) A partir de les dades que heu obtingut, feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.



[Tornar a l'enunciat]

28) PAU 2004 Sèrie 1 Problema 1:

Considereu la funció $f(x)=x^3+mx^2+1,\ m\geq 0$.**(Incomplet)**

b) Per a *m* = 1, indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de 45° amb el semieix positiu de ***OX***.

$$m=1\rightarrow f(x)=x^3+x^2+1$$

La recta tangent farà un angle de 45^{o} amb el semieix positiu de OX si aquesta recta tangent és paral·lela a la diagonal del primer quadrant $y=x$, és a dir, si té pendent igual a 1.

Com la pendent de la recta tangent coincideix amb la derivada de la funció ens estan demanant en quins punts la derivada val 1.

$$f(x)=x^3+x^2+1\rightarrow f'(x)=3x^2+2x$$

$$f'(x)=1\rightarrow 3x^2+2x=1\rightarrow 3x^2+2x-1=0\rightarrow \begin{cases} \boxed{x=1-} \\ \boxed{x=\frac{1}{3}} \end{cases}$$

[Tornar a l'enunciat]

29) PAU 2004 Sèrie 1 Problema 2:

Donats la funció $f(x)=\sqrt{x}$ i el punt *A*(2, 0) situat sobre l'eix de les abscisses:

a) Trobeu la funció que expressa la distància del punt *A* a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.

Un punt qualsevol de la gràfica $f(x)=\sqrt{x}$ és de la forma $P=\left(x,\sqrt{x}\right)$.

La distància entre aquest punt P i el punt A és el mòdul del vector que els uneix.

$$\overrightarrow{AP}=P-A=\left(x,\sqrt{x}\right)-(2,0)=\left(x-2,\sqrt{x}\right)$$

$$d(A,P)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=\left|\left(x-2,\sqrt{x}\right)\right|=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2}=\sqrt{x^2-4x+4+x}=\sqrt{x^2-3x+4}$$

Per trobar el mínim derivem i igualem a zero.

$$d(x)=\sqrt{x^2-3x+4}\rightarrow d'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-3x+4\right)^{\frac{-1}{2}}(2x-3)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$d'(x)=0\rightarrow\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}=0\rightarrow 2x-3=0\rightarrow 2x=3\rightarrow\boxed{x=\frac{3}{2}}$$

Per comprovar que $x=\frac{3}{2}$ és un mínim i no un màxim podríem estudiar el signe de $d'(x)$. Com el denominador és una arrel que sempre es positiva solament cal estudiar el signe del numerador comprovant que en el punt $x=\frac{3}{2}$ la derivada passa de negativa a positiva, per tant el punt $x=\frac{3}{2}$ és un mínim.

b) Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a A.

Aquestes coordenades seran $P=\left(\frac{3}{2},f\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\boxed{\left(\frac{3}{2},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}$

Tornar a l'enunciat

30) PAU 2004 Sèrie 3 Qüestió 1:
Considereu la funció $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=3$.

L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$. En el nostre cas serà: $y-f(3)=f'(3)(x-3)$

$$f(x)=x^3-3x^2+2x+2\rightarrow f'(x)=3x^2-6x+2$$

$$f(3)=3^3-3\cdot3^2+2\cdot3+2=27-27+6+2=8$$

$$f'(3)=3\cdot3^2-6\cdot3+2=27-18+2=11$$

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\rightarrow y-8=11(x-3)\rightarrow y-8=11x-33\rightarrow\boxed{y=11x-25}$$

b) Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de $f(x)$ que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

Si hi ha un altra recta paral·lela a l'anterior haurà de tenir la mateixa pendent, és a dir, pendent igual a 11.
Com la pendent de la recta tangent en un punt coincideix amb la derivada en aquest punt, ens estan demanant si hi ha algun altre punt on la derivada val 11. Per tant plantegem l'equació:

$$f'(x)=11 \rightarrow 3x^2-6x+2=11 \rightarrow 3x^2-6x-9=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-2x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Evidentment hem tornat a trobar el punt anterior, és a dir, el punt $x=3$ i podem contestar que hi ha un altre, que és $\boxed{x=-1}$.

Com ens demanen trobar l'equació d'aquesta recta, la calculem:

$$y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1)) \rightarrow y+4=11(x+1) \rightarrow y+4=11x+11 \rightarrow \boxed{y=11x+7}$$

Tornar a l'enunciat

31) PAU 2004 Sèrie 3 Qüestió 3:

Considereu la funció $f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2}$ on ***a*** és un paràmetre.

a) Calculeu el valor del paràmetre ***a*** sabent que $f(x)$ té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=3$.

Si la funció té un extrem en el punt $x=3$ aleshores la derivada de la funció s'anul·larà en aquest punt:

$$f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2} \rightarrow f'(x)=0-\frac{a}{x^2}-\frac{6\cdot 2x}{x^4} \rightarrow f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{12}{x^3}$$

$$f'(3)=0 \rightarrow -\frac{a}{3^2}-\frac{12}{3^3}=0 \rightarrow \frac{12}{3^3}=-\frac{a}{3^2} \rightarrow 12\cdot 3^2=-a\cdot 3^3 \rightarrow \boxed{a=-4}$$

b) Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

Per saber si es tracta d'un màxim o un mínim estudiem el signe de la derivada de la funció al voltant del punt $x=3$.

$$f(x)=1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2} \xrightarrow{a=-4} f(x)=1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{12}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{4}{x^2}-\frac{12}{x^3}=0 \rightarrow \frac{4}{x^2}=\frac{12}{x^3} \rightarrow 12x^2=4x^3 \rightarrow 4x^3-12x^2=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x^2(x-3)=0 \rightarrow \rightarrow \begin{cases} 4x^2=0 \rightarrow x=0 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

Finalment fem la taula següent ficant els valors on s'anul·la la derivada i els que no existeix:

Interval	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	↗	$\nexists$	↘	m	↗

En el punt $x=3$ la funció passa de decreixent a creixent per tant es tracta d'un **mínim relatiu**.

Tornar a l'enunciat

32) PAU 2004 Sèrie 4 Qüestió 3:
El consum d'un cotxe depèn de la seva velocitat v (expressada en km/h) segons la funció $f(v)=\dfrac{3e^{0,012v}}{v}$ (en litres/km). Quina és la velocitat més econòmica?

$$f(v)=\frac{3e^{0,012v}}{v}\rightarrow f'(v)=\frac{3e^{0,012}\cdot 0,012v-3e^{0,012}\cdot 1}{v^2}$$

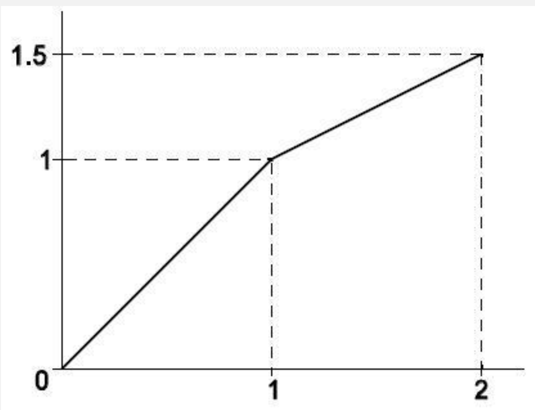
$$f'(v)=0\rightarrow \frac{3e^{0,012}\cdot 0,012v-3e^{0,012}\cdot 1}{v^2}=0\rightarrow 3e^{0,012}\cdot 0,012v-3e^{0,012}\cdot 1=0\rightarrow$$

$$\rightarrow 3e^{0,012}(0,012v-1)=0\xrightarrow{e^{0,012}\neq 0}0,012v-1=0\rightarrow 0,012v=1\rightarrow v=\frac{1}{0,012}\rightarrow \boxed{v\simeq 83,3}$$

Per saber que en el punt $v=83,3$ ens trobem en un mínim hem d'estudiar el signe de la derivada al voltant d'aquest punt (o avaluar la segona derivada en el punt). Com $f'(v)<0$ a l'esquerra de $83,3$ mentre que $f'(v)>0$ el punt és un mínim relatiu.

Tornar a l'enunciat

33) PAU 2004 Sèrie 4 Qüestió 4:
Considereu la funció *f(x)* de la figura definida a l'interval [0, 2].



a) Calculeu la funció derivada *f'(x)* a l'interval (0, 2).

La derivada d'una funció coincideix amb la pendent de la recta tangent. Com $f(x)$ està formada per 2 segments (polinomi de 1r grau) la seva derivada serà una constant que coincidirà amb la pendent del segment, per tant:

En l'interval $(0,1)$ $f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{1-0}{1-0}=\frac{1}{1}=1$

En l'interval $(1,2)$ $f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{1,5-1}{2-1}=\frac{0,5}{1}=0,5$

En el punt $x=1$ la funció no és derivable perquè té un pic.

Per tant, $\boxed{f'(x)=\begin{cases}1 & si\ x\in(0,1)\\ \frac{1}{2} & si\, x\in(1,2)\end{cases}}$

b) Hi ha algun punt de (0, 2) en el qual*f '(x)* no existeixi?

Sí, en el punt $x=1$ la funció no és derivable perquè té un "pic".

c) Calculeu $\int_0^2 f(x)dx$.

Raoneu totes les respostes.

Com la funció és sempre positiva en l'interval $[0,2]$, aquesta integral coincidirà amb l'àrea entre la funció, l'eix **OX** i les rectes $x=0$ i $x=2$, mirant el gràfic que acompanya e problema podem dir que aquesta àrea és l'àrea d'un triangle de base 1 i altura 1 més l'àrea d'un quadrat de costat 1 més l'àrea d'un triangle de base 1 i altura 1/2 . Per tant:

$$\int_0^2 f(x)dx=\frac{1\cdot 1}{2}+1\cdot 1+\frac{1\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{7}{4}}$$

NOTA: També podríem trobar l'expressió analítica de f i integrar-la.

En l'interval $[0,1]$ f és la recta $y=x$ mentre que en l'interval $[1,2]$ podem calcular l'expressió de f com la recta que passa pels punts $A=(1,1)$ i $B=(2,\ 1,5)$ o també com la recta de ordenada en l'origen ½ i pendent 1/2 . És a dir:

$f(x)=\begin{cases}x & si\ x\in[0,1]\\ \frac{x+1}{2} & si\, x\in(1,2]\end{cases}$ i per tant:

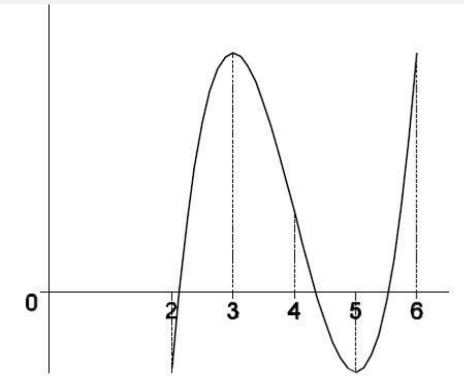
$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2\frac{x+1}{2}dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{1}{2}-0\right]+\left[\frac{4}{4}+\frac{2}{2}\right]-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]=\cancel{\frac{1}{2}}+0+1+1-\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{7}{4}}$$

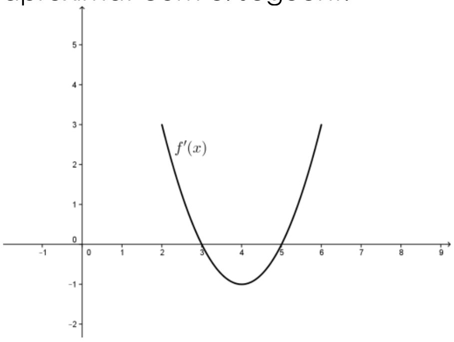
Tornar a l'enunciat

34) PAU 2004 Sèrie 5 Qüestió 2:

La gràfica següent correspon a una funció $f:[2,6]\to\mathbb{R}$ derivable i amb derivada contínua. Feu un esbós de la gràfica de $f':(2,6)\to\mathbb{R}$ i justifiqueu-ne el perquè.



La funció té un màxim relatiu en $x=3$ i un mínim relatiu en $x=5$, per tant, en aquests punts la derivada valdrà zero. També podem observar que la funció és estrictament creixent en $(2,3)$ i en $(5,6)$ mentre que és estrictament decreixent en $(3,5)$ per tant, la funció derivada serà positiva en $(2,3)\cup(5,6)$ i negativa en $(3,5)$. Amb aquestes dades es pot fer un dibuix aproximat com el següent:



[Tornar a l'enunciat]

35) PAU 2004 Sèrie 5 Problema 1:
Considereu la funció polinòmica de tercer grau, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$.
a) Trobeu els valors de ***a***, ***b***, ***c*** i ***d*** per als quals *f(x)* talla l'eix **OX** en els punts x = 0 i x = 1 i presenta un mínim relatiu en el punt x = 0.

Si f talla l'eix **OX** en els punts $x=0$ i $x=1$ aleshores tenim que $f(0)=0$ i que $f(1)=0$.

$$f(0)=0\rightarrow a0^3+b0^2+c0+d=0\rightarrow d=0$$

$$f(1)=0\rightarrow a1^3+b1^2+c1+d=0\rightarrow a+b+c=0$$

Si f té un mínim relatiu en el punt $x=0$ en aquest punt la derivada serà nul·la. Per tant:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\xrightarrow{d=0}f(x)=ax^3+bx^2+cx\rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f'(x)=0\rightarrow 3a0^2+2b\cdot 0+c=0\rightarrow c=0$$

Per tant tenim que $c=0$, $d=0$ i que $a+b=0$ és a dir, $b=-a$. Així la funció serà:

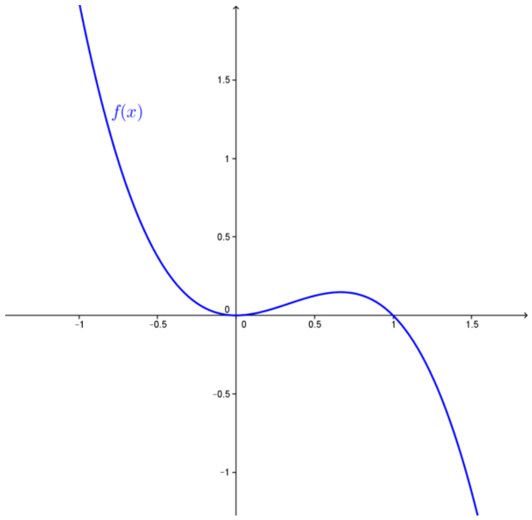
$$f(x)=ax^3-ax^2$$

$$f(x)=ax^3-ax^2\rightarrow f'(x)=3ax^2-2ax\rightarrow f''(x)=6ax-2a$$

Si f té un mínim relatiu en $x=0$ aleshores $f''(0)>0$, per tant:

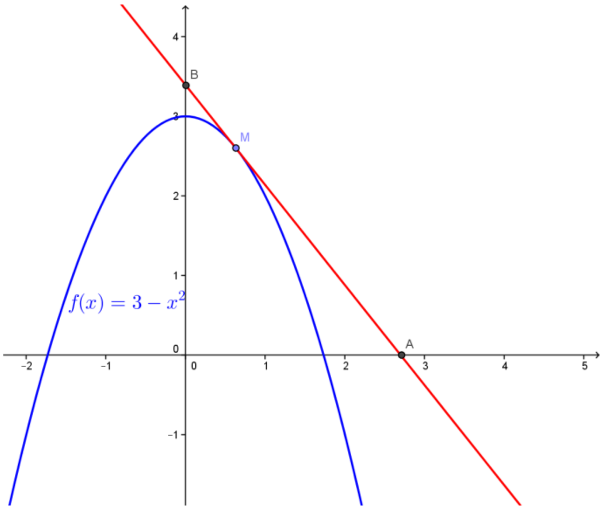
$$6a\cdot 0-2a>0\rightarrow -2a>0\rightarrow a<0$$

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat, i acabeu de calcular els elements necessaris per dibuixar-la.



Tornar a l'enunciat

36) PAU 2005 Sèrie 1 Qüestió 6:
La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant $(x > 0\ ,\ y > 0)$, talla l'eix OX en el punt A i l'eix OY en el punt B.
a) Feu un gràfic dels elements del problema.



b) Trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui l'àrea mínima.

La recta tangent en l'abscissa $x = a$ és $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

En el nostre cas $f(x) = 3 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow \begin{cases} f(a) = 3 - a^2 \\ f'(a) = -2a \end{cases}$

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \rightarrow y - (3 - a^2) = -2a(x-a) \rightarrow y - 3 + a^2 = -2ax + 2a^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = -2ax + a^2 + 3$$

Per tant, l'equació de la recta tangent en un punt $x = a$ és: $y = -2ax + a^2 + 3$
El punt A és el tall de la recta anterior amb l'eix OX:

$$y = -2ax + a^2 + 3 \xrightarrow{y=0} -2ax + a^2 + 3 = 0 \rightarrow 2ax = a^2 + 3 \rightarrow x = \frac{a^2+3}{2a} \rightarrow A = \left(\frac{a^2+3}{2a}, 0\right)$$

El punt B és el tall de la recta $y = -2ax + a^2 + 3$ amb l'eix **OY**:
$$y = -2ax + a^2 + 3 \xrightarrow{x=0} y = a^2 + 3 \rightarrow B = (0, a^2 + 3)$$

Per tant, el triangle format per l'origen de coordenades i els punts A i B té base $\frac{a^2+3}{2a}$ i altura $a^2 + 3$. Per tant, $A_T = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{\frac{a^2+3}{2a} \cdot (a^2+3)}{2} = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$

Per trobar el mínim d'aquesta funció cal derivar-la i igualar-la a zero.

$$f(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}\to f'(a)=\frac{2(a^2+3)\cdot 2a\cdot 4a-(a^2+3)^2\cdot 4}{(4a)^2}=$$

$$=\frac{(a^2+3)(16a^2-4(a^2+3))}{16a^2}=\frac{(a^2+3)(12a^2-12)}{16a^2}$$

$$f'(a)=0\to\frac{(a^2+3)(12a^2-12)}{16a^2}=0\to(a^2+3)(12a^2-12)=0\to 12a^2-12=0\to$$

$$\to 12a^2=12\to a^2=1\to a=\sqrt{1}\to a=\pm 1\xrightarrow{a>0}a=1$$

$$M=(1,f(1))=(1,3-1^2)\to\boxed{M=(1,2)}$$

Es podria comprovar que M és un mínim o bé estudiant el signe de la primera derivada al voltant de $a=1$ o demostrant que la segona derivada en 1 és positiva.

Tornar a l'enunciat

37) PAU 2005 Sèrie 1 Problema 2:(Incomplet)

Considereu la funció $f(x)=4x-x^2$.

a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x=0$ i $x=4$.

b) Feu un gràfic dels elements del problema.

Sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt $x=a$ és: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En el nostre cas:

$$f(x)=4x-x^2\to f'(x)=4-2x\to\begin{cases}f'(0)=4-2\cdot 0=4-0=4\\ f'(4)=4-2\cdot 4=4-8=-4\end{cases}$$

Per tant en el punt $x=0$ la recta tangent és:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\to y-0=$$

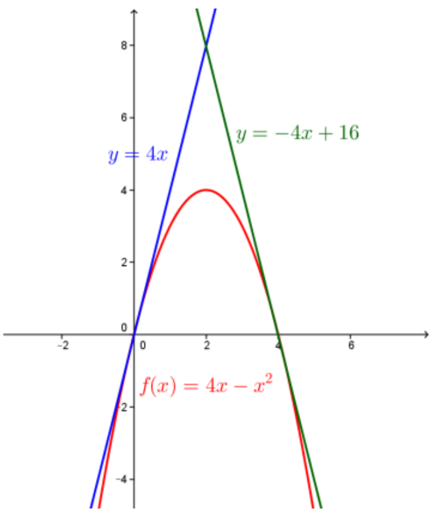
$$=4(x-0)\to\boxed{y=4x}$$

I en el punt $x=4$ la recta tangent és:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\to y-0=$$

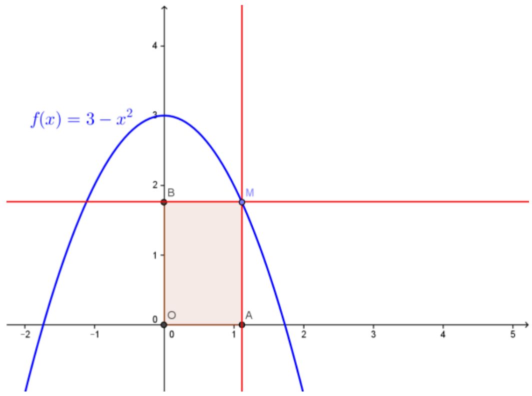
$$-4(x-4)\to\boxed{y=-4x+16}$$

b) Feu un gràfic dels elements del problema.



Tornar a l'enunciat

38) PAU 2005 Sèrie 3 Qüestió 5:
Considereu la funció $f(x)=3-x^2$ i un punt de la seva gràfica, *M*, situat en el primer quadrant $(x>0\ ,\ y>0)$. Si pel punt *M* tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb *OX* i *OY* determina dos punts, *A* i *B*, respectivament.
a) Feu un gràfic dels elements del problema.



b) Trobeu les coordenades del punt *M* que fa que el rectangle *OAMB* tingui l'àrea màxima.

El punt M té la forma $M=(x,f(x))\rightarrow M=(x,3-x^2)$

Per tant, el punt A serà: $A=(x,0)$ i $B=(0,3-x^2)$

Així l'àrea del rectangle OAMB serà: $A=Base\ x\ Altura=x\cdot(3-x^2)$

Maximitzem per tant la funció $A(x)=x\cdot(3-x^2)=3x-x^3$

$$A(x)=3x-x^3\rightarrow A'(x)=3-3x^2$$

$$A'(x)=0\rightarrow 3-3x^2=0\rightarrow 3=3x^2\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\sqrt{1}\rightarrow x=\pm1\xrightarrow{x>0}x=1$$

Ara es tracta de saber si en el punt $x=1$ s'assoleix realment un màxim.

$A'(x)=3-3x^2\rightarrow A''(x)=-6x\rightarrow A''(1)=-6<0\rightarrow x=1$ és un màxim relatiu.

Tornar a l'enunciat

39) PAU 2005 Sèrie 4 Qüestió 3:
Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=6x^5-15x^4+10x^3$.

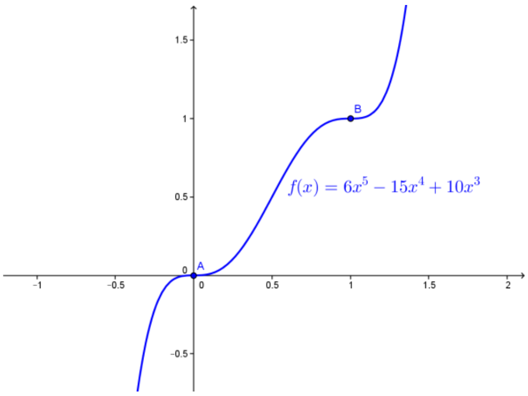
$$f(x)=6x^5-15x^4+10x^3\rightarrow f'(x)=30x^4-60x^3+30x^2$$

$$f'(x)=0\rightarrow 30x^4-60x^3+30x^2=0\rightarrow 30x^2(x^2-2x+1)=0\rightarrow 30x^2(x-1)^2=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}30x^2=0\rightarrow x=0\\(x-1)^2=0\rightarrow x-1=0\rightarrow x=1\end{cases}$$

Interval	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

Per tant la funció és sempre creixent i en els punts candidats a màxims i mínims el que ens trobem en realitat són punts d'inflexió. Per tant la funció no té màxims ni mínims relatius. En el següent gràfic hem representat la funció:



Podem observar com en els punts $A=(0, f(0))$ i $B=(1, f(1))$ la funció no té cap màxim ni mínim relatiu sinó punts d'inflexió.

Tornar a l'enunciat

40) PAU 2005 Sèrie 4 Qüestió 4:
Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui **A** el punt de la paràbola d'abscissa **0**.
a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt ***A***.

L'equació de la recta tangent en $x=0$ és $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 \rightarrow f'(x) = 4x + 1 \rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \rightarrow y - 1 = 1(x-0) \rightarrow y - 1 = x \rightarrow \boxed{y = x + 1}$$

b) En quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?

La recta anterior té pendent igual a 1. Per a que un altra recta sigui perpendicular a l'anterior haurà de tenir pendent igual a -1. Per tant hem de calcular en quin punt de la gràfica la derivada val -1.

$$f'(x) = -1 \rightarrow 4x + 1 = -1 \rightarrow 4x = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{4} \rightarrow \boxed{x = \frac{-1}{2}}$$

Tornar a l'enunciat

41) PAU 2006 Sèrie 1 Qüestió 4:

Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}$.

$$x-1=0\rightarrow x=1\rightarrow \boxed{D\left(f\right)=\mathbb{R}-\{1\}}$$

• **Asímptotes verticals:**
Apareixen en els punts $x=a$ on la funció té un límit infinit. Això solament pot passar si dividim per zero, per tant l'únic candidat és $x=1$.

$$\lim_{x\to1^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-1}\right)=-\infty$$

Calculant un sol dels dos anteriors límits ja podem assegurar que la recta $\boxed{x=1}$ és asímptota vertical de la funció.

• **Asímptotes horitzontals:**
Apareixen quan el límit en l'infinit de la funció dóna un nombre.

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{x}-\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-4+0}{1-0}\right)=\frac{+\infty-4}{1}=+\infty$$

Com l'anterior límit dóna infinit aleshores **<u>la funció no té asímptotes horitzontals</u>**.

• **Asímptotes obliqües:**

Les asímptotes obliqües $y=mx+n$ es calculem amb $m=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}$ i $n=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)$.

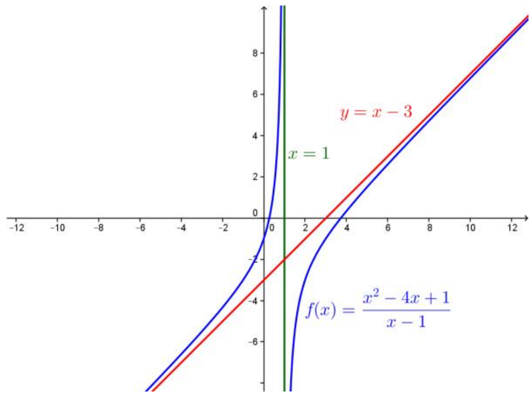
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^2-4x+1}{x-1}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x\left(x-1\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x^2-x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}\right)=\frac{1-0+0}{1-0}=\frac{1}{1}=1\rightarrow m=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+1-x\left(x-1\right)}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4x+1-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x+1}{x-1}\right)=-3$$

Per tant la recta $\boxed{y=x-3}$ és asímptota obliqua de la funció.



[Tornar a l'enunciat]

42) PAU 2006 Sèrie 1 Problema 2:
Considereu la funció $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.
a) Calculeu **c** sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x = 0$ és horitzontal.

Si la recta tangent en $x = 0$ és horitzontal, aleshores aquesta recta tangent té pendent zero i per tant la derivada en el punt $x = 0$ ha de ser zero.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \rightarrow 4 \cdot 0^3 + 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow \boxed{c = 0}$$

b) Per al valor de **c** trobat a l'apartat anterior, calculeu **a** i **b** sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -2$ i que talla l'eix **OX** quan $x = 1$.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7 \xrightarrow{c=0} f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 7$$

f té un extrem relatiu en $x = -2$ aleshores $f'(-2) = 0$

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 7 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$$

$$f'(-2) = 0 \rightarrow 4(-2)^3 + 3a(-2)^2 + 2b(-2) = 0 \rightarrow -32 + 12a - 4b = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12a - 4b = 32 \xrightarrow{\div 4} 3a - b = 8$$

f talla l'eix **OX** quan $x = 1$, aleshores:

$$f(1) = 0 \rightarrow 1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 7 = 0 \rightarrow 1 + a + b + 7 = 0 \rightarrow a + b = -8$$

$$\begin{cases} 3a - b = 8 \\ a + b = -8 \end{cases} \rightarrow 4a = 0 \rightarrow \boxed{a = 0} \;\; i \;\; \boxed{b = -8}$$

c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7 \to f(x)=x^4-8x^2+7 \to f'(x)=4x^3-16x$$

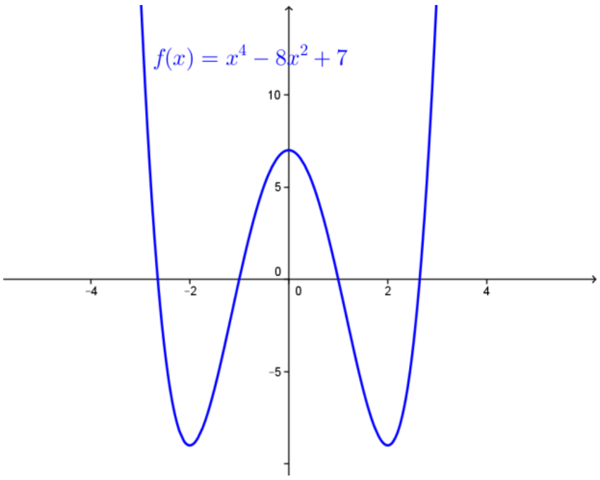
$$f'(x)=0 \to 4x^3-16x=0 \xrightarrow{\div 4} x^3-4x=0 \to x\left(x^2-4\right)=0 \to$$

$$\to \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \to x^2=4 \to x=\sqrt{4} \to x=\pm 2 \end{cases}$$

Interval	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

Per tant la funció és estrictament decreixent en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ i estrictament creixent en $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

En $(-2, f(-2))=(-2,-9)$ i $(2, f(2))=(2,-9)$ té dos mínims relatius mentre que en $(0, f(0))=(0,7)$ té un màxim relatiu.



Tornar a l'enunciat

43) PAU 2006 Sèrie 3 Qüestió 1:

Considereu la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x=0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}\rightarrow f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

El pendent de la recta tangent en $x=0$ és $f'(0)$ per tant:

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\rightarrow f'(0)=\frac{-1}{1^2}=\boxed{-1}$$

Per trobar altres punts amb la mateixa pendent hem de veure si hi ha més punts on la derivada val -1.

$$f'(x)=-1\rightarrow\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-1\rightarrow x^2+2x-1=-1(x+1)^2\rightarrow x^2+2x-1=-x^2-2x-1\rightarrow$$

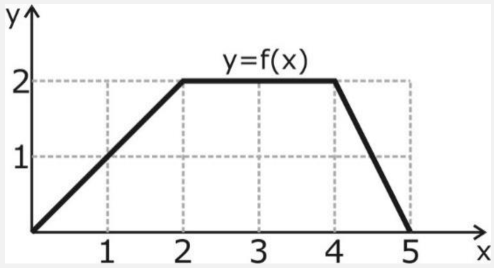
$$\rightarrow 2x^2+4x=0\rightarrow 2x(x+2)=0\rightarrow\begin{cases}2x=0\rightarrow x=0\\ x+2=0\rightarrow x=-2\end{cases}$$

Per tant, a part del punt $x=0$ que ens donava l'enunciat on la derivada valia -1, existeix també un altre punt amb la mateixa derivada. Aquest punt és $\boxed{x=-2}$

Tornar a l'enunciat

44) PAU 2006 Sèrie 3 Qüestió 2:(Incomplet)

Considereu la funció $y=f(x)$ definida per a $x\in[0,5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?

La derivada en un punt coincideix amb la pendent de la recta tangent en aquest punt.
Si la funció és una recta, aleshores la recta tangent en un punt és precisament la funció.

• Per tant en l'interval $[0,2]$:

$$f'(x)=Pendent\ recta\ \tan gent=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2-0}{2-0}=\frac{2}{2}=1$$

• En l'interval $[2,4]$:

$$f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{2-2}{4-2}=\frac{0}{2}=0$$

• En l'interval $[4,5]$:

$$f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(4)}{5-4}=\frac{0-2}{5-4}=\frac{-2}{1}=-2$$

Així: $$\boxed{f'(x)=\begin{cases}1\ si\ \ x\in(0,2)\\0\ \ si\ x\in(2,4)\\-2\ si\ x\in(4,5)\end{cases}}$$

Noteu que en $x=2$ i en $x=4$ la funció no és derivable.

[Tornar a l'enunciat]

45) PAU 2006 Sèrie 3 Problema 1:

Donada la funció $f(x)=e^{-x^2+2x}$.

a) Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.

• **Domini:**

El domini de la funció exponencial $g(x)=e^x$ és tot $\mathbb{R}$, per tant, el domini de la funció $f(x)=e^{-x^2+2x}$ serà també tot $\mathbb{R}$.

• **Talls amb l'eix X:**

Talls amb l'eix X $\rightarrow y=0 \rightarrow f(x)=e^{-x^2+2x}=0$. Però la funció exponencial $g(x)=e^x$ mai pot ser zero, per tant, la nostra funció $f(x)=e^{-x^2+2x}$ tampoc podrà ser zero. Així $f(x)$ no talla l'eix X.

• **Tall amb l'eix Y:**

Tall amb l'eix Y $\rightarrow x=0 \rightarrow f(0)=e^{-0^2+2\cdot 0}=e^{0+0}=e^0=1 \rightarrow (0,1)$.

b) Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.

Per estudiar el creixement i decreixement de la funció hem de treballar amb la derivada.

$$f(x)=e^{-x^2+2x} \rightarrow f'(x)=e^{-x^2+2x}\cdot(-2x+2)$$

$$f'(x)=0 \rightarrow e^{-x^2+2x}\cdot(-2x+2)=0 \rightarrow -2x+2=0 \rightarrow 2x=2 \rightarrow x=1$$

Intervals	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signe de f'	$+$	0	$-$
Monotonia de f	↗	M	↘

En l'interval $(-\infty,1)$ és creixent mentre que en l'interval $(1,+\infty)$ és decreixent.

En el punt $x=1$ s'anul·la la derivada i la funció passa de creixent a decreixent, per tant, aquí té un màxim.

c) Trobeu les possibles asímptotes.

• **Asímptotes verticals:**

Les asímptotes verticals apareixen en els punts $x=a$ on $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, és a dir, en els punts on dividim per zero o en els que hi ha una singularitat. En el cas de la nostra funció $f(x)=e^{-x^2+2x}$ això no es donarà mai perquè la funció exponencial és continua en tot $\mathbb{R}$.

• **Asímptotes horitzontals:**

Si $\lim_{x\to -\infty} f(x)=a$ o $\lim_{x\to +\infty} f(x)=a$ aleshores la recta $y=a$ és una asímptota horitzontal de la funció $f(x)$. Per tant, calculem aquests límits:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty} e^{x^2\left(-1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty} e^{x^2\left(-1+\cancel{\frac{2}{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)=\frac{1}{\infty}=0 \rightarrow$$

$\rightarrow$ La recta $y=0$ és asímptota horitzontal de la funció.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-(-x)^2+2(-x)}=\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2-2x}\lim_{x\to+\infty} e^{x^2\left(-1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty} e^{x^2\left(-1-\cancel{\frac{2}{x}}\right)}=$$

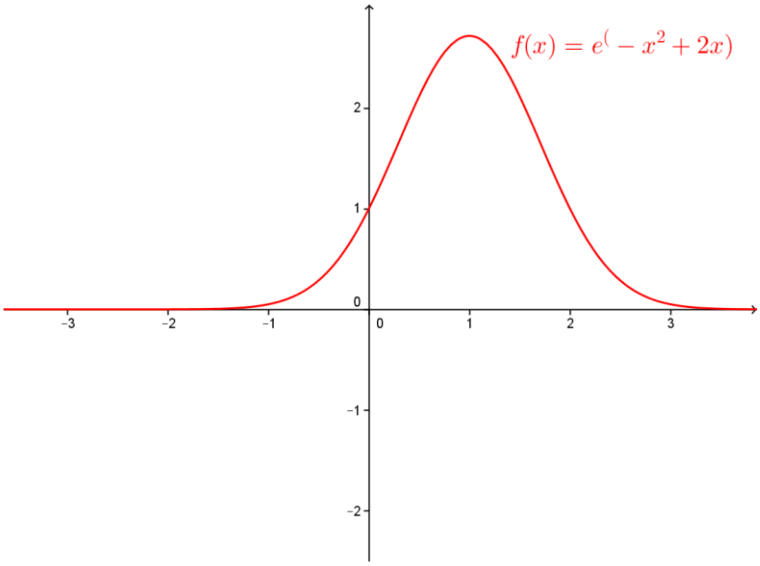
$$=\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)=\frac{1}{\infty}=0 \rightarrow$$ La recta $y=0$ és asímptota horitzontal de la funció.

Per tant, la única asímptota horitzontal és la recta $y=0$ que serà asímptota tant pel costat de $-\infty$ com pel costat de $+\infty$.

• **Asímptotes obliqües:**
Si una funció té asímptotes horitzontals aleshores no té asímptotes obliqües, per tant, f no té asímptotes obliqües.

En el següent gràfic està representada la funció del problema per poder comprovar tots els apartats:

NOTA: En el gràfic es poden comprovar tots els apartats anteriors. Es veu clarament que el domini és tot $\mathbb{R}$, que la funció no talla l'eix X mentre que talla l'eix Y en el punt $(0,1)$. També observem que la funció és creixent en $(-\infty,1)$, decreixent en $(1,+\infty)$ i que en $x=1$ té un màxim relatiu. Finalment veiem que no té asímptotes verticals ni obliqües mentre que la recta $y=0$ és una asímptota horitzontal.



Tornar a l'enunciat

46) PAU 2006 Sèrie 4 Qüestió 1:

Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funció definida per $f(x)=e^x(ax+b)$, on **a** i **b** són nombres reals.

a) Calculeu els valors de **a** i **b** per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3\,,\,e^3)$.

Si f té un extrem relatiu en el punt $(3\,,\,e^3)$ tindrem que $f'(3)=0$ i que $f(3)=e^3$.

$$f(x)=e^x(ax+b)\to f'(x)=e^x(ax+b)+e^x\cdot a\to f'(x)=e^x(ax+a+b)$$

$$f'(3)=0\to e^3(a\cdot 3+a+b)=0\to e^3(4a+b)\xrightarrow{e^3\neq 0}4a+b=0$$

$$f(3)=e^3\to e^3(a\cdot 3+b)=e^3\to 3a+b=1$$

$$\begin{cases}4a+b=0\\3a+b=1\end{cases}\to\boxed{a=-1}\quad i\quad\boxed{b=4}$$

b) Per als valors de **a** i **b** obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

$$f(x)=e^x(-x+4)\to f'(x)=e^x(-x+4)+e^x\cdot(-1)\to f'(x)=e^x(-x+3)$$

$$f'(x)=0\to e^x(-x+3)=0\xrightarrow{e^x\neq 0}-x+3=0\to x=3$$

Intervals	$(-\infty,3)$	3	$(3,+\infty)$
Signe de f'	$+$	0	$-$
Monotonia de f	$\nearrow$	M	$\searrow$

La funció passa de creixent a decreixent, per tant $x=3$ és un màxim relatiu.

Tornar a l'enunciat

47) PAU 2006 Sèrie 4 Problema 1:(Incomplet)

Considereu la paràbola d'equació $y=x^2+2x-3$.

a) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x=-1$ i $x=1$.

Donada una corba $f(x)$ sabem que l'equació de la recta tangent en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En el nostre cas:

$$f(x)=x^2+2x-3\to f'(x)=2x+2\to\begin{cases}f'(-1)=2\cdot(-1)+2=-2+2=0\\f'(1)=2\cdot 1+2=2+2=4\end{cases}$$

• Recta tangent en $x=-1$:

$y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1)) \rightarrow y-(-4)=0\cdot(x+1) \rightarrow y+4=0 \rightarrow \boxed{y=-4}$

• Recta tangent en $x=1$:

$y-f(1)=f'(1)(x-1) \rightarrow y-0=4\cdot(x-1) \rightarrow \boxed{y=4x-4}$

b) Calculant el mínim de la funció $y=x^2+2x-3$ trobeu el vèrtex de la paràbola.

Per calcular el mínim hem de fer la derivada:

$y(x)=x^2+2x-3 \rightarrow y'(x)=2x+2$

$y'(x)=0 \rightarrow 2x+2=0 \rightarrow 2x=-2 \rightarrow x=-1$

Interval	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	↘	m	↗

Per tant, en el punt $x=-1$ la funció passa de decreixent a creixent i per tant té un mínim relatiu.

$(-1, f(-1))=(-1,4)$

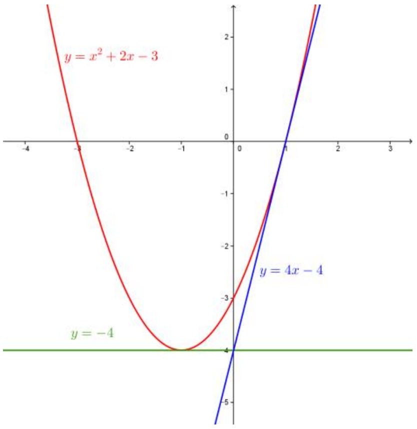
c) Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.

• Talls amb l'eix **OX**:

$y=0 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{(-3,0)} \\ \boxed{(1,0)} \end{cases}$

• Tall amb l'eix **OY**:

$x=0 \rightarrow y(0)=0^2+2\cdot 0-3=-3 \rightarrow \boxed{(0,-3)}$



[Tornar a l'enunciat]

48) PAU 2007 Sèrie 1 Qüestió 1:
En quin punt la recta tangent a la funció $f(x)=x\cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

Si la recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses aleshores és una recta horitzontal i per tant té pendent igual a zero. Com la pendent de la recta tangent coincideix amb la derivada de la funció ens estan demanant en quins punts la derivada val zero.

$$f(x)=x\cdot e^x \to f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x \to f'(x)=e^x(x+1)$$

$$f'(x)=0 \to e^x(x+1)=0 \xrightarrow{e^x\neq 0} x+1=0 \to \boxed{x=-1}$$

La recta tangent en $x=-1$ serà $y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$

$$f(-1)=-1\cdot e^{-1}=\frac{-1}{e}$$

$$f'(x)=e^x(x+1)\to f'(-1)=e^{-1}(-1+1)=0$$

Per tant la recta tangent serà:

$$y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))\to y+\frac{1}{e}=0\cdot(x+1)\to \boxed{y=\frac{-1}{e}}$$

Tornar a l'enunciat

49) PAU 2007 Sèrie 1 Qüestió 3:
Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y=x^4-x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

- **Extrems relatius:**

$$y=x^4-x^2 \to y'=4x^3-2x$$

$$y'=0\to 4x^3-2x=0\to 2x\cdot(2x^2-1)=0\to \begin{cases} 2x=0\to x=0 \\ 2x^2-1=0\to 2x^2=1\to x=\sqrt{\frac{1}{2}}\to x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

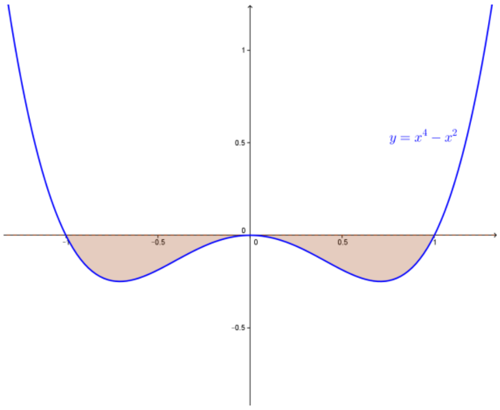
Interval	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

Finalment calculem les dues coordenades d'aquests extrems relatius:

$$y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\to A=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4}\right)$$

$$y(0)=0^4-0^2=0\to B=(0,0)$$

$$y\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\rightarrow C=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4}\right.$$



• **Punts de tall amb els eixos:**
Talls amb l'eix **OX**:

$$y=0\rightarrow x^4-x^2=0\rightarrow x^2\cdot\left(x^2-1\right)=0\rightarrow\begin{cases}x^2=0\rightarrow\\ x^2-1=0\end{cases}$$

Tall amb l'eix **OY**:

$$x=0\rightarrow y(0)=0^4-0^2=0\rightarrow(0,0)$$

El recinte a integrar, acolorit de color marró coincidirà amb la integral de la funció entre -1 i 1 canviada de signe perquè la funció durant tot aquest interval va per sota de l'eix d'abscisses. Per tant:

$$A=\left|\int_{-1}^{1}f(x)dx\right|=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^4-x^2\right)dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{-1}{5}-\frac{-1}{3}\right)\right|=\left|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{-4}{15}\right|=\boxed{\frac{4}{15}}$$

Tornar a l'enunciat

50) PAU 2007 Sèrie 1 Problema 1:
Considereu la recta d'equació $r: x=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.
a) Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol (x, y, z) de la recta al punt *P* = (1, 2, 5) com una funció de la coordenada x.

La recta r és la recta que passa pel punt $A=(0,2,1)$ i té com a vector director $\vec{v}_r=(1,2,2)$. Per tant, un punt genèric de la recta serà de la forma $Q=(0,2,1)+\lambda(1,2,2)\rightarrow Q=(\lambda,\,2\lambda+2,\,2\lambda+1)$

La distància d'aquest punt Q a P serà el mòdul del vector que els uneix:

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(\lambda,\,2\lambda+2,\,2\lambda+1)-(1,2,5)=(\lambda-1,\,2\lambda,\,2\lambda-4)$$

$$d^2(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left(\sqrt{(\lambda-1)^2+(2\lambda)^2+(2\lambda-4)^2}\right)^2=(\lambda-1)^2+(2\lambda)^2+(2\lambda-4)^2=$$

$$=\lambda^2-2\lambda+1+4\lambda^2+4\lambda^2-16\lambda+16=\boxed{9\lambda^2-18\lambda+17}$$

b) Trobeu quin valor de **x** fa mínima aquesta funció, deduïu quin punt **Q** de la recta és el més proper a **P** i calculeu la distància del punt a la recta.

$$d(\lambda)=9\lambda^2-18\lambda+17 \to d'(\lambda)=18\lambda-18$$
$$d'(\lambda)=0 \to 18\lambda-18=0 \to 18\lambda=18 \to \lambda=1$$
$$Q=(\lambda,\ 2\lambda+2,\ 2\lambda+1) \xrightarrow{\lambda=1} \boxed{Q=(1,4,3)}$$

$$d(P,r)=d(P,Q)=d((1,2,5),(1,4,3))=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|(0,-2,2)\right|=\sqrt{8}=\boxed{2\sqrt{2}}$$

c) Escriviu l'equació de la recta que passa per ***P*** i ***Q*** i comproveu que és perpendicular a ***r***.

$P=(1,2,5)\ Q=(1,4,3)\ \overrightarrow{PQ}=(0,2,-2)$

Per tant l'equació de la recta que passa per **P** i **Q** és:

$s:(x,y,z)=(1,2,5)+\lambda(0,2,-2) \to s:(x,y,z)=(1,2,5)+\lambda(0,1,-1) \to \vec{v}_s=(0,1,-1)$

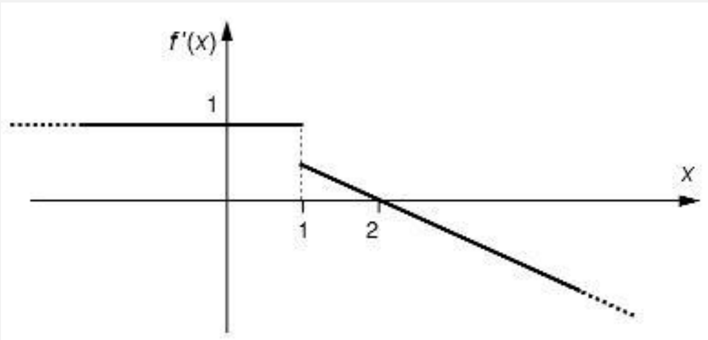
Les rectes r i s seran perpendiculars sii ho són els seus vectors directors $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_s$ que ho seran sii el seu producte escalar dóna zero.

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s=(1,2,2)\cdot(0,1,-1)=0+2-2=0 \to \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \to r \perp s$

Tornar a l'enunciat

51) PAU 2007 Sèrie 2 Qüestió 2:

La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



a) Digueu si $f(x)$ és derivable en tots els punts de $\mathbb{R}$ i per què.

$f'(x)=\begin{cases}1 & si\, x<1 \\ 1-\dfrac{x}{2} & si\ x>1\end{cases}$ i la funció f derivable en tot $\mathbb{R}$ excepte en el punt $x=1$.

b) Estudieu el creixement i el decreixement de $f(x)$.

Per estudiar el creixement i el decreixement de $f(x)$ tenim dos opcions, treballar amb el signe de la derivada o integrar la funció anterior. En aquest cas com estem en el tema de derivades ho fem per la derivada.

Segons el gràfic de l'enunciat la funció $f'(x)$ és positiva en $(-\infty,2)$, per tant f serà creixent en $(-\infty,2)$.

Anàlogament, en el gràfic observem que $f'(x)$ és negativa en $(2,+\infty)$, per tant f serà decreixent en aquest interval.

c) Trobeu si $f(x)$ té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de x i de quin tipus.

En el punt $x=2$ la derivada de f s'anul·la i f passa de creixent a decreixent, per tant, en aquest punt f té un màxim relatiu.

d) Sabent que $f(0)=1$, calculeu el valor de $f(1)$.
Justifiqueu totes les respostes.

$$f'(x)=\begin{cases}1 & si\, x<1\\ 1-\dfrac{x}{2} & si\ x>1\end{cases}\xrightarrow{INTEGRANT} f(x)=\begin{cases}x+C_1 & si\, x<1\\ x-\dfrac{x^2}{4}+C_2 & si\ x>1\end{cases}$$

$f(0)=1\rightarrow 0+C_1=1\rightarrow C_1=1$ per tant:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & si\, x<1\\ x-\dfrac{x^2}{4}+C_2 & si\ x>1\end{cases}$$

Però l'enunciat ens diu que f és continua en tot $\mathbb{R}$, per tant en $x=1$ els dos trossos de f han d'empalmar, és a dir,

$$1+1=1-\frac{1^2}{4}+C_2\rightarrow 1=-\frac{1}{4}+C_2\rightarrow C_2=1+\frac{1}{4}\rightarrow C_2=\frac{5}{4}$$

I per tant: $\boxed{f(x)=\begin{cases}x+1 & si\, x\le 1\\ x-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{5}{4} & si\ x>1\end{cases}}$

Per a ser continua $\boxed{f(1)=2}$

Tornar a l'enunciat

52) PAU 2007 Sèrie 2 Qüestió 3:
Calculeu els valors del paràmetre a, $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

Primer haurem de trobar els punts d'inflexió. Aquests punts és on s'anul·la la segona derivada:

$$y(x) = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512 \to y'(x) = 4ax^3 + 6ax^2 - a \to y''(x) = 12ax^2 + 12ax$$

$$y''(x) = 0 \to 12ax^2 + 12ax = 0 \to 12ax(x+1) = 0 \to \begin{cases} 12ax = 0 \xrightarrow{a\neq 0} x = 0 \\ x + 1 = 0 \to x = -1 \end{cases}$$

Per a que les rectes tangents en $x = 0$ i en $x = -1$ siguin perpendiculars s'ha de complir que si una recta té pendent P, l'altra recta ha de tenir pendent $\frac{-1}{P}$.

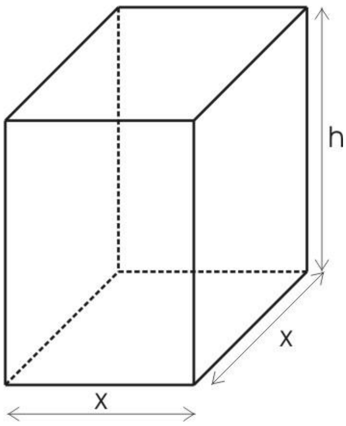
La pendent de la recta tangent en $x = 0$ serà $y'(0) = 4a0^3 + 6a0^2 - a = -a$

La pendent de la recta tangent en $x = -1$ serà $y'(-1) = 4a(-1)^3 + 6a(-1)^2 - a = a$

Per tant, per a que les rectes anteriors siguin perpendiculars s'ha de complir que $-a = \frac{-1}{a} \to a = \frac{1}{a} \to a^2 = 1 \to a = \sqrt{1} \to \boxed{a = \pm 1}$

Tornar a l'enunciat

53) PAU 2007 Sèrie 2 Problema 1:
Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.



Suposem que la base del prisma és un quadrat de costat x mentre que l'altura del prisma és h.
L'àrea del sostre del prisma serà $x \cdot x = x^2$ per tant, la pèrdua de calor a través del sostre serà $300x^2$.
Les cares laterals del prisma seran 4 rectangles de base x i altura h, per tant l'àrea total d'aquestes 4 cares laterals serà $4 \cdot x \cdot h$ i per tant, la pèrdua de calor a través de les cares laterals serà $100 \cdot 4 \cdot x \cdot h = 400xh$.
Per tant la pèrdua total de calor serà: $C(x,h) = 300x^2 + 400xh$.

Donat que aquesta funció depèn de dues variables x i h necessitem ficar una de les variables en funció de l'altra.

Com el volum del prisma ha de ser 768 tenim que $x^2 h = 768 \to h = \frac{768}{x^2}$.

Substituint en la fórmula del cost:

$$C(x,h) = 300x^2 + 400xh \xrightarrow{h=\frac{768}{x^2}} C(x) = 300x^2 + 400x\frac{768}{x^2} \to C(x) = 300x^2 + \frac{307200}{x}$$

Per minimitzar aquesta funció cal derivar-la i igualar la derivada a zero:

$$C(x)=300x^2+\frac{307200}{x}\rightarrow C'(x)=600x-\frac{307200}{x^2}$$

$$C'(x)=0\rightarrow 600x-\frac{307200}{x^2}=0\rightarrow 600x=\frac{307200}{x^2}\rightarrow 600x^3=307200\rightarrow x^3=\frac{307200}{600}\rightarrow$$

$$\rightarrow x^3=512\rightarrow x=\sqrt[3]{512}\rightarrow x=8$$

$$h=\frac{768}{x^2}=\frac{768}{8^2}\rightarrow h=12$$

Per tant, les dimensions òptimes són $x=8$ metres de costat de la base del prisma per $h=12$ metres d'altura.

Per comprovar que realment es tracta d'un mínim podríem fer la taula de signes de la derivada o avaluar la segona derivada en el punt $x=8$. Com el problema solament té sentit per a x's positives, fem la següent taula:

Interval	0	$(0,8)$	8	$(8,+\infty)$
Signe de $C'(x)$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $C(x)$	$\nexists$	$\searrow$	m	$\nearrow$

Per tant, en el punt $x=8$ la funció passa de decreixent a creixent i per tant es tracta d'un mínim relatiu.

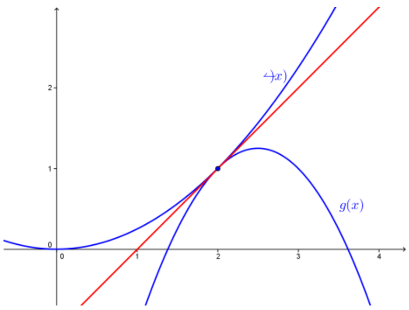
Tornar a l'enunciat

54) PAU 2007 Sèrie 3 Problema 2: (Incomplet)

Donades les funcions $f(x)=x^2-ax-4$ i $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$.

a) Calculeu ***a*** i ***b*** de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x=3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.

Dues funcions f i g són tangents en $x=a$ si en aquest punt coincideixen, és a dir, si $f(a)=g(a)$ i si també comparteixen recta tangent, per tant $f'(a)=g'(a)$. En el nostre cas, f i g seran tangents en $x=3$ sii $f(3)=g(3)$ i $f'(3)=g'(3)$



$$f(3)=g(3)\rightarrow 3^2-a\cdot 3-4=\frac{3^2}{2}+b\rightarrow$$
$$\rightarrow 9-3a-4=\frac{9}{2}+b\rightarrow 3a+b=9-4-\frac{9}{2}\rightarrow 3$$
$$\rightarrow a+b=\frac{1}{2}\rightarrow 6a+2b=1$$

$$f(x)=x^2-ax-4\rightarrow f'(x)=2x-a$$
$$g(x)=\frac{x^2}{2}+b\rightarrow g'(x)=x$$

$$f'(3)=g'(3)\rightarrow 2\cdot 3-a=3\rightarrow 6-a=3\rightarrow 6-3=a\rightarrow a=3$$

$$\begin{cases}6a+2b=1\\ a=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}18+2b=1\\ a=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2b=-17\\ a=3\end{cases}\rightarrow\boxed{\begin{cases}b=\frac{-17}{2}\\ a=3\end{cases}}$$

b) Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.

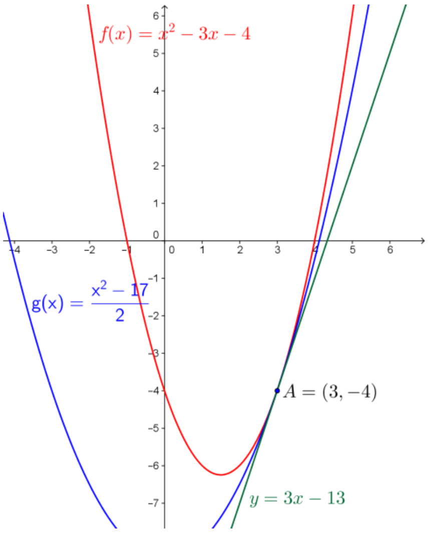
Com la recta tangent a les dues funcions és la mateixa calcularem la recta tangent a la funció f .

Sabem que la recta tangent a la gràfica d'una funció f en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

En el nostre cas, $y-f(3)=f'(3)(x-3)$

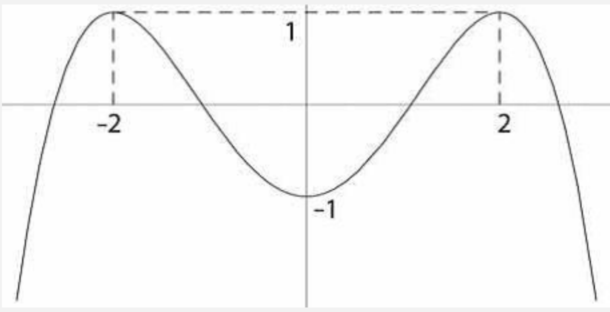
$$a=3\rightarrow f(x)=x^2-3x-4\rightarrow$$
$$\rightarrow f'(x)=2x-3\rightarrow\begin{cases}f(3)=-4\\ f'(3)=3\end{cases}$$
$$y-(-4)=3(x-3)\rightarrow y+4=3x-9\rightarrow\boxed{y=3x-13}$$

A la dreta teniu un gràfic amb els elements del problema.



[Tornar a l'enunciat]

55) PAU 2008 Sèrie 2 Problema 1:
Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval (–3, 3) és la següent:



a) Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.

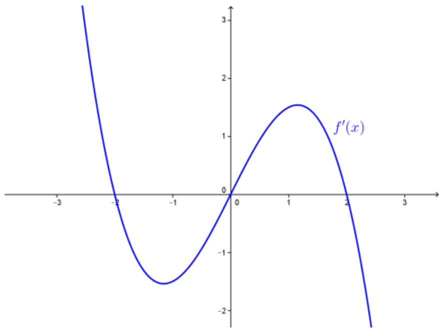
Segons el dibuix la funció té dos màxims relatius en els punts $(-2,1)$ i $(2,1)$ i un mínim relatiu en $(0,-1)$.

b) Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval (–3, 3).

f és estrictament creixent en $(-3,-2)\cup(0,2)$ i estrictament decreixent en $(-2,0)\cup(2,3)$.

c) Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.

Quan la funció tingui un màxim o un mínim relatiu, la derivada valdrà zero. En els intervals on f sigui creixent la seva derivada serà positiva mentre que els intervals on f sigui decreixent la seva derivada serà negativa. Amb tota aquesta informació una gràfica aproximada de la derivada seria:



d) Sabent que la funció és de la forma $f(x)=ax^4+bx^2+c$, trobeu de quina funció es tracta.

f passa pel punt $(-2,1)\to f(-2)=1\to a(-2)^4+b(-2)^2+c=1\to 16a+4b+c=1$

f passa pel punt $(2,1)\to f(2)=1\to a\cdot 2^4+b\cdot 2^2+c=1\to 16a+4b+c=1$

Podem observar que aquesta equació és la mateixa que l'anterior i per tant no ens aporta informació.

f passa pel punt $(0,-1)\to f(0)=-1\to a\cdot 0^4+b\cdot 0^2+c=-1\to c=-1$

$$f(x)=ax^4+bx^2+c\to f'(x)=4ax^3+2bx$$

f té un mínim relatiu en $x=0 \to f'(0)=0 \to 4a\cdot 0^3+2b\cdot 0=0 \to 0=0$ que no ens aporta cap informació.

f té un mínim relatiu en $x=-2 \to f'(-2)=0 \to 4a\cdot(-2)^3+2b\cdot(-2)=0 \to$
$\to -32a+-4b=0 \xrightarrow{\div 4} -8a-b=0 \to 8a+b=0$

f té un mínim relatiu en $x=2 \to f'(2)=0 \to 4a\cdot 2^3+2b\cdot 2=0 \to$
$\to 32a+4b=0 \xrightarrow{\div 4} 8a+b=0$ que és la mateixa equació que abans i per tant no ens aporta res.

$$\begin{cases}16a+4b+c=1\\ c=-1\\ 8a+b=0\end{cases} \cong \begin{cases}16a+4b=2\\ b=-8a\\ c=-1\end{cases} \cong \begin{cases}16a-32a=2\\ b=-8a\\ c=-1\end{cases} \cong \begin{cases}-16a=2\\ b=-8a\\ c=-1\end{cases} \cong \begin{cases}a=\frac{-1}{8}\\ b=-8\cdot\frac{-1}{8}=1\\ c=-1\end{cases}$$

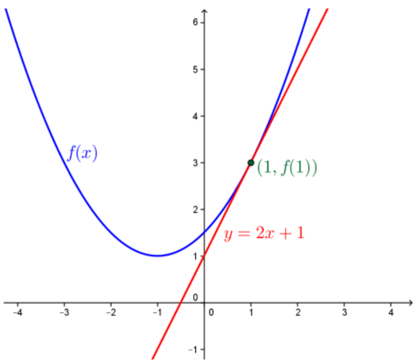
Per tant $\boxed{f(x)=\frac{-1}{8}x^4+x^2-1}$

Tornar a l'enunciat

56) PAU 2008 Sèrie 4 Qüestió 1:
Considereu la funció $f(x)=ax^2+x+b\ (a,b\in\mathbb{R})$. Trobeu els valors de ***a*** i ***b*** que fan que la recta $y=2x+1$ sigui tangent a la gràfica de f quan $x=1$.

Per a que la recta $y=2x+1$ sigui tangent a la gràfica de f en el punt $x=1$ en aquest punt hauran de coincidir tant les dues funcions com les seves derivades. És a dir, $f(1)=y(1)$ i $f'(1)=y'(1)$.

$f(1)=y(1) \to a\cdot 1^2+1+b=2\cdot 1+1 \to$
$\to a+1+b=2+1 \to a+b=2$
$f(x)=ax^2+x+b \to f'(x)=2ax+1$
$y=2x+1 \to y'(x)=2$
$f'(1)=y'(1) \to 2a\cdot 1+1=2 \to 2a+1=2 \to 2a=1 \to a$
$a+b=2 \to \dfrac{1}{2}+b=2 \to b=\dfrac{3}{2}$



A la dreta està el gràfic amb tots els elements del problema.

Tornar a l'enunciat

57) PAU 2008 Sèrie 4 Problema 1:

Donades les funcions $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ i $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$:

a) Comproveu que $\left[g(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2=1$.

$$\left[g(x)\right]^2-\left[f(x)\right]^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\left(e^x\right)^2+2e^xe^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2}{4}\right)-\left(\frac{\left(e^x\right)^2-2e^xe^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{e^{2x}+2e^{x-x}+e^{-2x}}{4}\right)-\left(\frac{e^{2x}-2e^{x-x}+e^{-2x}}{4}\right)=\left(\frac{e^{2x}+2e^{0}+e^{-2x}}{4}\right)-\left(\frac{e^{2x}-2e^{0}+e^{-2x}}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{e^{2x}+2\cdot 1+e^{-2x}}{4}\right)-\left(\frac{e^{2x}-2\cdot 1+e^{-2x}}{4}\right)=\left(\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\right)-\left(\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\right)=$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}=\frac{4}{4}=1$$

b) Comproveu també que $f'(x)=g(x)$ i $g'(x)=f(x)$.

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\to f'(x)=\frac{\left(e^x-e^{-x}\cdot(-1)\right)\cdot 2-\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot 0}{2^2}=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot 2-0}{4}=$$

$$=\frac{2\left(e^x+e^{-x}\right)}{4}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=g(x)$$

$$g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\to g'(x)=\frac{\left(e^x+e^{-x}\cdot(-1)\right)\cdot 2-\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot 0}{2^2}=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot 2-0}{4}=$$

$$=\frac{2\left(e^x-e^{-x}\right)}{4}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=f(x)$$

c) Comproveu que $f(x+y)=f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)$.

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\to f(x+y)=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2}=\frac{e^x\cdot e^y-e^{-x}\cdot e^{-y}}{2}$$

$$f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}=$$

$$=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\cdot\left(e^y+e^{-y}\right)}{4}+\frac{\left(e^y-e^{-y}\right)\cdot\left(e^x+e^{-x}\right)}{4}=$$

$$=\frac{e^xe^y+e^xe^{-y}-e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}}{4}+\frac{e^ye^x+e^ye^{-x}-e^{-y}e^x-e^{-y}e^{-x}}{4}=$$

$$=\frac{e^xe^y+e^xe^{-y}-e^{-x}e^y-e^{-x}e^{-y}}{4}+\frac{e^ye^x+e^ye^{-x}-e^{-y}e^x-e^{-y}e^{-x}}{4}=$$

(Els que estan pintats del mateix color es poden agrupar perquè $e^x\cdot e^y=e^{x+y}=e^{y+x}=e^y\cdot e^x$)

$$=\frac{2e^xe^y-2e^{-x}e^{-y}}{4}=\frac{e^xe^y-e^{-x}e^{-y}}{2}=f\left(x+y\right)$$

> **d)** Calculeu $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ dividint per e^x el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{\cancel{2}}}{\frac{e^x+e^{-x}}{\cancel{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{1}}{\frac{e^x+e^{-x}}{1}}\overset{SUGERIMENT}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{e^x}}{\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x}-\frac{e^{-x}}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{e^{-x}}{e^x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x-x}}{1+e^{-x-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{g(-x)}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-x}-e^x}{\cancel{2}}}{\frac{e^{-x}+e^x}{\cancel{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-x}-e^x}{1}}{\frac{e^{-x}+e^x}{1}}\overset{SUGERIMENT}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}}}{\frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{e^{-x}}-\frac{e^x}{e^{-x}}}{\frac{e^{-x}}{e^{-x}}+\frac{e^x}{e^{-x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{x+x}}{1+e^{x+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}(0-1)}{e^{2x}(0+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}}{e^{2x}}=\frac{-1}{1}=\boxed{-1}$$

Tornar a l'enunciat

58) PAU 2008 Sèrie 5 Qüestió 1:
Trobeu els valors dels paràmetres ***a*** i ***b*** per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en $x=2$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+3 & si \quad x<2 \\ x^3+bx+5 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Per a que sigui continua en el punt $x=2$ s'ha de complir que $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(ax^2+2x+3\right)=a\cdot 2^2+2\cdot 2+3=4a+7$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x^3+bx+5\right)=2^3+b\cdot 2+5=8+2b+5=2b+13$$

Per tant, per a que sigui continua en $x=2$ s'ha de complir que:

$$4a+7=2b+13\rightarrow 4a-2b=13-7\rightarrow 4a-2b=6\xrightarrow{\div 2}2a-b=3\rightarrow b=2a-3$$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+3 & si \quad x<2 \\ x^3+bx+5 & si \quad x\geq 2 \end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax+2 & si \quad x<2 \\ 3x^2+b & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Per a que sigui derivable en $x=2$ les derivades per l'esquerra i per la dreta han de coincidir.

$$2a\cdot 2+2=3\cdot 2^2+b\rightarrow 4a+2=12+b\rightarrow 4a-b=10\rightarrow b=4a-10$$

$$2a-3=4a-10\rightarrow 10-3=4a-2a\rightarrow 7=2a\rightarrow a=\frac{7}{2}$$

$$b=2a-3=2\cdot\frac{7}{2}-3=7-3\rightarrow b=4$$

Per tant, la resposta al problema és $\boxed{\boxed{a=\frac{7}{2}}}$ i $\boxed{\boxed{b=4}}$.

Tornar a l'enunciat

59) PAU 2008 Sèrie 5 Qüestió 3:
Digueu per a quin valor de **x** la recta tangent a la corba $y=\ln\left(x^2+1\right)$ és paral·lela a la recta $y=x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

La recta $y=x$ té pendent 1.

La recta tangent a la corba $y=\ln\left(x^2+1\right)$ serà paral·lela a la recta $y=x$ si té pendent 1.
Però la pendent de la recta tangent a una corba en un punt és la derivada de la corba en aquest punt. Per tant, ens estan demanant si hi ha algun punt de la corba $y=\ln\left(x^2+1\right)$ on la derivada val 1.

$$y(x)=\ln\left(x^2+1\right)\rightarrow y'(x)=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$y'(x)=1\rightarrow \frac{2x}{x^2+1}=1\rightarrow 2x=x^2+1\rightarrow x^2-2x+1=0\rightarrow \boxed{x=1}$$

L'equació de la recta tangent a una corba $f(x)$ en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

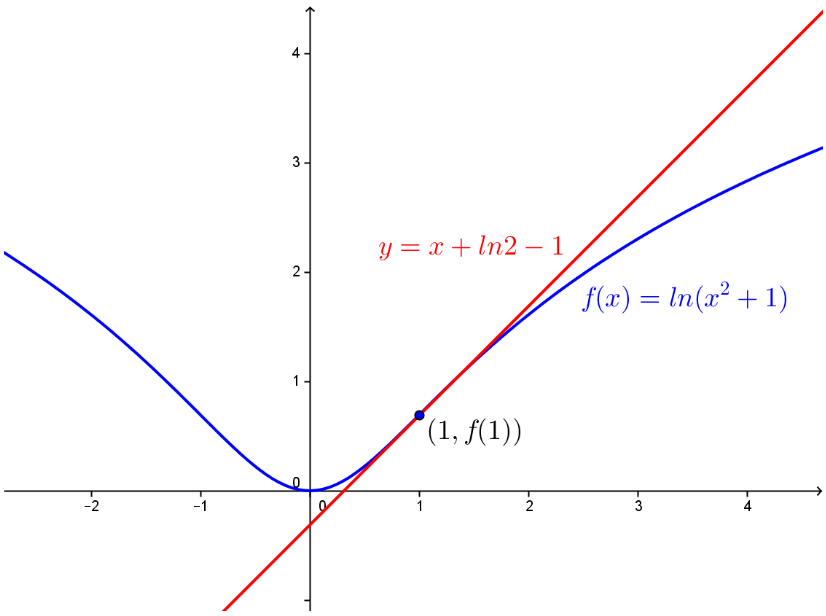
En el nostre cas, la recta tangent en el punt $x=1$ serà $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$$y=\ln\left(x^2+1\right)\rightarrow y(1)=\ln\left(1^2+1\right)=\ln 2$$

$$y'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\rightarrow y'(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+1}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=1$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\rightarrow y-\ln 2=1(x-1)\rightarrow y-\ln 2=x-1\rightarrow \boxed{y=x+\ln 2-1}$$

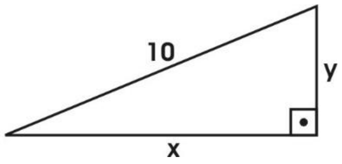
Gràfic amb els elements del problema:



Tornar a l'enunciat

60) PAU2008 Sèrie 5 Problema 2:
De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

En la figura hem representat un triangle equilàter d'hipotenusa **10 cm** on hem anomenat als catets **x** i **y**.



Pel teorema de **Pitàgores** tenim:

$$x^2+y^2=10^2 \rightarrow x^2+y^2=100 \rightarrow y^2=100-x^2 \rightarrow y=\sqrt{100-x^2}$$

Així, el perímetre del triangle serà: $P(x)=x+y+10 \rightarrow P(x)=x+\sqrt{100-x^2}+10$ on x que representa un dels catets tindrà com a valor mínim $x=0$ i com a màxim $x=10$.

Per tant el nostre problema és maximitzar la funció $P(x)=x+\sqrt{100-x^2}+10$ en l'interval $[0,10]$.

$$P(x)=x+\sqrt{100-x^2}+10 \rightarrow P'(x)=1+\frac{1}{2}\left(100-x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot(-2x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=$$
$$=1-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$P'(x)=0 \rightarrow 1-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}=0 \rightarrow 1=\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} \rightarrow \sqrt{100-x^2}=x \xrightarrow{x^2} 100-x^2=x^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 100=2x^2 \rightarrow 50=x^2 \rightarrow x=\pm\sqrt{50} \xrightarrow{x\in[0,10]} x=\sqrt{50} \rightarrow \boxed{x=5\sqrt{2}}$$

Per comprovar que en el punt $x=5\sqrt{2}$ la funció $P(x)$ té un màxim relatiu ens quedaria per demostrar que en aquest punt la derivada segona és negativa.

$$P'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} \rightarrow P''(x)=-\frac{1\cdot\sqrt{100-x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\left(100-x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot(-2x)}{\left(\sqrt{100-x^2}\right)^2}=$$
$$=-\frac{\sqrt{100-x^2}+\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}=-\frac{\sqrt{100-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}=-\frac{\frac{100-x^2+x^2}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}=-\frac{\frac{100}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}=$$
$$=-\frac{100}{\left(100-x^2\right)\sqrt{100-x^2}}=-\frac{100}{\sqrt{\left(100-x^2\right)^3}}$$

$$P''\left(\sqrt{50}\right)=-\frac{100}{\sqrt{\left(100-\left(\sqrt{50}\right)^2\right)^3}}=-\frac{100}{\sqrt{(100-50)^3}}=-\frac{100}{\sqrt{50^3}}=-\frac{\sqrt{2}}{5}<0$$

Per tant, en el punt $x=5\sqrt{2}$ tenim un màxim relatiu.
Aleshores els catets mesuraran:

$x=5\sqrt{2}$ i $y=\sqrt{100-x^2} \to y=\sqrt{100-\left(5\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Per tant el màxim del perímetre s'assoleix quan els dos catets són iguals, és a dir, quan el triangle és isòsceles.

Tornar a l'enunciat

61) PAU 2009 Sèrie 1 Qüestió 3:
Sigui $f(x)=2x^3-x^2+3x+1$. Donades les rectes $r_1: y=x+2$ i $r_2: y=7x-2$:
a) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba $y=f(x)$ en algun punt.
b) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.

Una funció $f(x)$ i una recta $r(x)$ seran tangents en un punt $x=a$ sii en aquest punt coincideixen en valor i en derivada, és a dir, si $f(a)=r(a)$ i $f'(a)=r'(a)$.
La recta $r_1: y=x+2$ té pendent igual a 1. Observem si hi ha algun punt de la funció on la recta tangent tingui pendent igual a 1.

$f(x)=2x^3-x^2+3x+1 \to f'(x)=6x^2-2x+3$

$f'(x)=1 \to 6x^2-2x+3=1 \to 6x^2-2x+2=0 \xrightarrow{\div 2} 3x^2-x+1=0$ que no té solucions reals, per tant, no hi ha cap punt on la derivada de f valgui 1 i per tant r_1 no podrà ser mai tangent a f.

Anàlogament la pendent de la recta $r_2: y=7x-2$ és 7. Comprovem ara si hi ha algun punt on la derivada de la funció f sigui 7.

$f(x)=2x^3-x^2+3x+1 \to f'(x)=6x^2-2x+3$

$$f'(x)=7 \to 6x^2-2x+3=7 \to 6x^2-2x-4=0 \xrightarrow{\div 2} 3x^2-x-2=0 \to \begin{cases} x=\dfrac{-2}{3} \\ x=1 \end{cases}.$$

Per tant solament hi ha dos possibles punts on r_2 i f coincideixen amb la derivada però per a que realment siguin tangents també han de coincidir amb el valor.

$f(x)=2x^3-x^2+3x+1 \to f\left(\dfrac{-2}{3}\right)=\dfrac{-55}{27}$

$r_2(x)=7x-2 \to r_2\left(\dfrac{-2}{3}\right)=7\cdot\left(\dfrac{-2}{3}\right)-2=\dfrac{-14}{3}-2=\dfrac{-20}{3}$

Per tant en el punt $x=-2/3$ no són tangents.

En $x=1$ tenim que:
$f(x)=2x^3-x^2+3x+1 \to f(1)=2-1+3+1=5$ mentre que $r_2(1)=7\cdot 1-2=5$ i per tant en aquest punt si que són tangents.

Tornar a l'enunciat

62) PAU 2009 Sèrie 1 Problema 1:

Considereu la funció real de variable real $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

a) Trobeu-ne el domini.

$$x^2-1=0\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\sqrt{1}=\pm1\rightarrow \boxed{D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}}$$

b) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.

- **Asímptotes verticals:**

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{2\cdot(-1)^3}{(-1)^2-1}=\frac{-2}{1-1}=\frac{-2}{0}=\infty\rightarrow\boxed{x=-1}$$ asímptota vertical de la funció.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{2\cdot1^3}{1^2-1}=\frac{2}{1-1}=\frac{2}{0}=\infty\rightarrow\boxed{x=1}$$ asímptota vertical de la funció.

- **Asímptotes horitzontals:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{2\cdot\infty}{1-0}=\frac{\infty}{1}=\infty$$ com aquest límit no és un número aleshores **no té asímptotes horitzontals**.

- **Asímptotes obliqües:**

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{1-0}=2$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-2x\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

$y=mx+n=2x+0=2x$ és asímptota obliqua de la funció.

c) Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los.

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2-1}\rightarrow f'(x)=\frac{6x^2\cdot\left(x^2-1\right)-2x^3\cdot2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{6x^4-6x^2-4x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^4-6x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \to \frac{2x^4-6x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \to 2x^4-6x^2=0 \to 2x^2\left(x^2-3\right)=0 \to \begin{cases} 2x^2=0 \to x=0 \\ x^2-3=0 \to x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

En la següent taula distingim els punts on s'anul·la la derivada i els punts on aquesta no existeix:

Interval	$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$\left(-\sqrt{3},-1\right)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$-$	$\nexists$
Monotonia de $f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	**PI**	$\searrow$	$\nexists$

Interval	$\left(1,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$

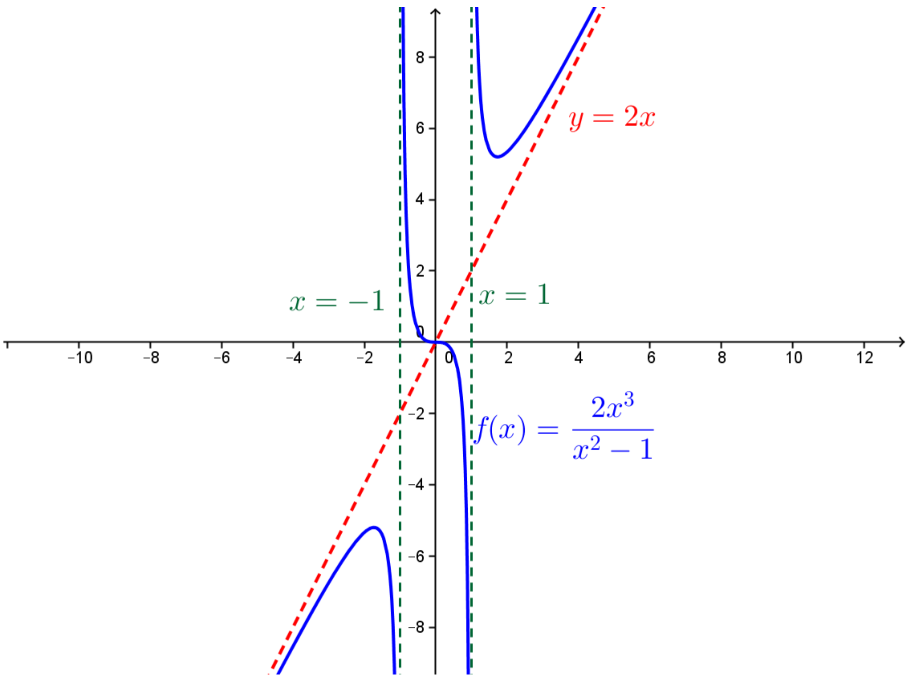
Per tant, en $x=-\sqrt{3}$ té un màxim relatiu mentre que en $x=\sqrt{3}$ té un mínim relatiu.

f és estrictament creixent en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$

I estrictament decreixent en $\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$

NOTEU que en el punt $x=0$ té un punt d'inflexió.

Aquí teniu un gràfic amb els elements del problema:



Tornar a l'enunciat

63) PAU 2009 Sèrie 3 Problema 1:(Incomplet)

Sigui la funció $f(x)=a+\frac{4}{x}+\frac{b}{x^2}$.

a) Calculeu els valors de ***a*** i **b**, sabent que la recta 2x + 3y = 14 és tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa x = 3.

Per a la resta d'apartats, considereu que *a* = –3 i que *b* = 4.

$$2x+3y=14\to 3y=14-2x\to y=\frac{-2x}{3}+\frac{14}{3}$$

Per a que una funció f i una recta r siguin tangents en el punt $x=3$, en aquest punt han de coincidir els seus valors i les seves derivades, és a dir, $f(3)=r(3)$ i $f'(3)=r'(3)$.

$$f(x)=a+\frac{4}{x}+\frac{b}{x^2}=a+4x^{-1}+bx^{-2}\to f'(x)=0-4x^{-2}-2bx^{-3}\to f'(x)=\frac{-4}{x^2}-\frac{2b}{x^3}$$

$$r(x)=\frac{-2x}{3}+\frac{14}{3}\to r'(x)=\frac{-2}{3}$$

$$f(3)=r(3)\to a+\frac{4}{3}+\frac{b}{3^2}=\frac{-2\cdot 3}{3}+\frac{14}{3}\to a+\frac{4}{3}+\frac{b}{9}=-2+\frac{14}{3}\to a+\frac{b}{9}=-2+\frac{14}{3}-\frac{4}{3}\to$$

$$\to a+\frac{b}{9}=-2+\frac{10}{3}\to a+\frac{b}{9}=\frac{4}{3}\xrightarrow{\times 9}9a+b=12$$

$$f'(3)=r'(3)\to\frac{-4}{3^2}-\frac{2b}{3^3}=\frac{-2}{3}\to\frac{-4}{9}-\frac{2b}{27}=\frac{-2}{3}\to\frac{-12}{27}-\frac{2b}{27}=\frac{-18}{27}\to$$

$$\to -12-2b=-18\to 2b=18-12\to 2b=6\to b=3$$

$$9a+b=12\to 9a+3=12\to 9a=9\to a=1$$

Per tant, $\boxed{a=1}$ i $\boxed{b=3}$

Per a la resta d'apartats, considereu que $a=-3$ i que $b=4$.

b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.

A partir d'aquest apartat ens fan treballar amb la funció f on $a=-3$ i $b=4$, per tant:

$$f(x)=-3+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}$$

Per estudiar els extrems d'aquesta funció cal derivar-la i igualar-la a zero.

$$f(x)=-3+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=-3+4x^{-1}+4x^{-2}\rightarrow f'(x)=0-4x^{-2}-8x^{-3}\rightarrow f'(x)=\frac{-4}{x^2}-\frac{8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{-4}{x^2}-\frac{8}{x^3}=0\rightarrow\frac{-4}{x^2}=\frac{8}{x^3}\rightarrow-4x^3=8x^2\rightarrow4x^3+8x^2=0\rightarrow$$

$$\rightarrow4x^2(x+2)=0\rightarrow\begin{cases}4x^2=0\rightarrow x=0\\x+2=0\rightarrow x=-2\end{cases}$$

Recordem que en la taula següent fiquem els punts on s'anul·la la derivada i **también els punts on la funció és discontinua**.

$f(x)=-3+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}$ és discontinua en zero.

Interval	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
Monotonia de $f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$

Per tant la funció té un mínim relatiu en el punt $(-2,f(-2))=\boxed{(-2,-4)}$

f és estrictament decreixent en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ i estrictament creixent en $(-2,0)$

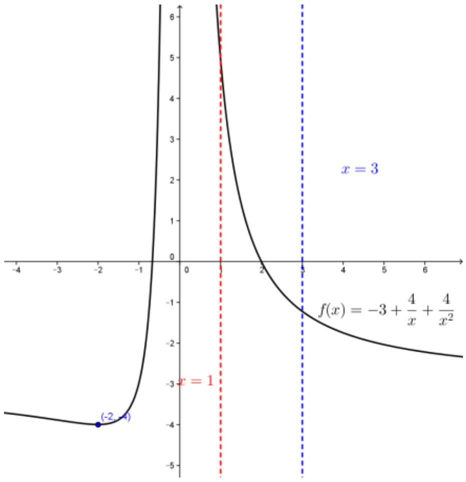
c) Calculeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix **OX**.

Talls amb l'eix **OX:**

$$y=0\rightarrow f(x)=0\rightarrow-3+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0\xrightarrow{x^2}-3x^2+4x+4=0\rightarrow\begin{cases}x=\frac{-2}{3}\\x=2\end{cases}$$

Per tant els punts de tall amb l'eix OX són $\boxed{\left(\frac{-2}{3},0\right)}$ i $\boxed{(2,0)}$.

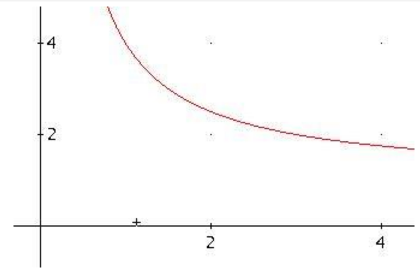
Aquí teniu un gràfic amb els elements del problema:



Tornar a l'enunciat

64) PAU 2009 Sèrie 4 Problema 1: (Incomplet)

La gràfica de la funció $f(x)=\dfrac{3+x}{x}$, des de $x=1$ fins a $x=4$, és la següent:



a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x=1$ i $x=3$.

L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En el nostre cas $f(x)=\dfrac{3+x}{x} \to f'(x)=\dfrac{1\cdot x-(3+x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{x-3-x}{x^2}=\dfrac{-3}{x^2}$

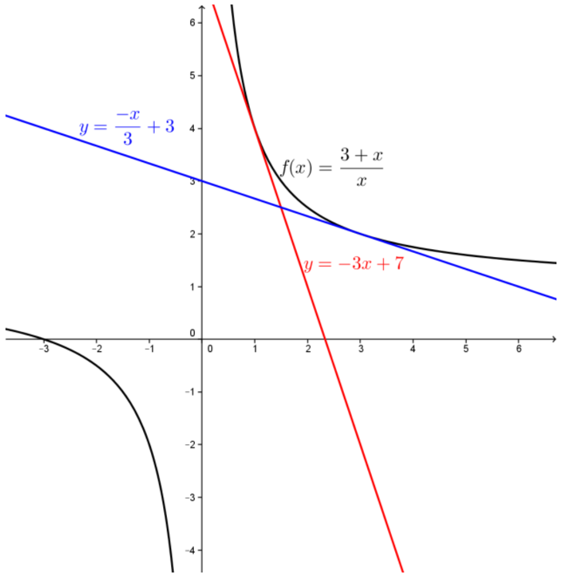
$f(1)=\dfrac{3+1}{1}=4$ $\quad f(3)=\dfrac{3+3}{3}=2$ $\quad f'(1)=\dfrac{-3}{1^2}=-3$ $\quad f'(3)=\dfrac{-3}{3^2}=\dfrac{-1}{3}$

- **Rectes tangents:**

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\to y-4=-3(x-1)\to \boxed{y=-3x+7}$

$y-f(3)=f'(3)(x-3)\to y-2=\dfrac{-1}{3}(x-3)\to y-2=\dfrac{-1}{3}x+1\to \boxed{y=\dfrac{-1}{3}x+3}$

b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.



c) Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.

Els vèrtexs del recinte seran els punts on les rectes són tangents a la corba, és a dir $A = (1, f(1))$ i $B = \left(4, f(4)\right)$ i el punt C on es tallen les dues rectes. Així:

$$A = (1, f(1)) = \left(1, \tfrac{3+1}{1}\right) = \boxed{(1,4)} \quad \text{i} \quad B = (3, f(3)) = \left(3, \tfrac{3+3}{3}\right) = \boxed{(3,2)}$$

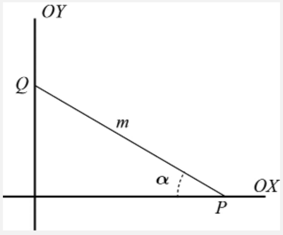
Calculem el punt on es tallen les dues rectes:

$$\frac{-x}{3} + 3 = -3x + 7 \xrightarrow{\times 3} -x + 9 = -9x + 21 \rightarrow 9x - x = 21 - 9 \rightarrow 8x = 12 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$y = -3x + 7 = -3 \cdot \frac{3}{2} + 7 = \frac{-9}{2} + 7 = \frac{5}{2} \rightarrow \boxed{C = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}$$

Tornar a l'enunciat

65) PAU 2010 Sèrie 1 Qüestió 3:
Un segment de longitud fixada m recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix **OX** perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual m és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



Sigui **x** el catet del triangle sobre l'eix **OX** i **y** el catet del triangle sobre l'eix **OY**. És a dir, **x** és la distància de l'origen al punt **P** mentre que **y** és la distància de l'origen a **Q**.
Per definició de sinus i cosinus:

$$\sin\alpha = \frac{c.\ oposat}{hipotenusa} = \frac{y}{m} \to y = m\sin\alpha \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{c.\ contigu}{hipotenusa} = \frac{x}{m} \to x = m\cos\alpha$$

El àrea del triangle serà:

$$A_T = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{m\cos\alpha \cdot \mathrm{m}\sin\alpha}{2} = \frac{m^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha \to A(\alpha) = \frac{m^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

Per optimitzar la funció derivem i igualem la derivada a zero.

$$A(\alpha) = \frac{m^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha \to A'(\alpha) = \frac{m^2}{2}\left(\cos\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)\right) =$$

$$= \frac{m^2}{2}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

$$A'(\alpha) = 0 \to \frac{m^2}{2}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 0 \to \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \to \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \to$$

$$\to 1 - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha \to 1 = 2\sin^2\alpha \to \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \to \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \to \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \to$$

$$\to \begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \alpha = 135^\circ \xrightarrow{0^\circ \le \alpha \le 90^\circ} \nexists \end{cases} \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0^\circ \le \alpha \le 90^\circ} \nexists \end{cases}$$

Per tant l'única solució bona dintre del context del problema és $\boxed{\alpha = 45^\circ}$

Estudiem ara si es tracta d'un màxim o un mínim relatiu:
Donat que la funció $A(\alpha)$ està definida per $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ plantegem la següent taula:

Interval	$(0^\circ, 45^\circ)$	45°	$(45^\circ, 90^\circ)$
Signe de $A'(\alpha)$	+	0	−
Monotonia de $A(\alpha)$	↗	M	↘

Donat que en el punt $\alpha = 45^{\text{o}}$ la funció $A(\alpha)$ passa de creixent a decreixent, en aquest punt la funció té un màxim relatiu.

Tornar a l'enunciat

66) PAU 2010 Sèrie 4 Qüestió 3:
Sigui $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomi qualsevol de segon grau.
a) Trobeu la relació existent entre els paràmetres **a**, **b** i **c** sabent que es compleix que **P(1) = 0** i **P(2) = 0**.
b) Quan es compleix la condició anterior, indiqueu quins valors pot tenir **P'(3/2)**.

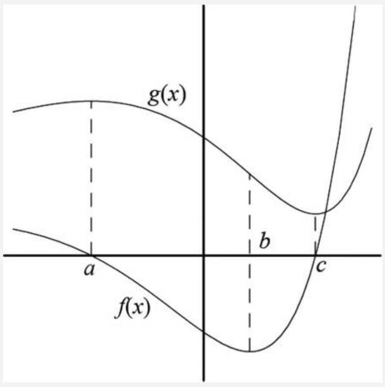
$$P(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0 \rightarrow a + b + c = 0 \\ P(2) = 0 \rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 \rightarrow 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Restant les dues expressions anteriors tenim.
$3a + b = 0 \rightarrow b = -3a$

$$P(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow{b=-3a} P(x) = ax^2 - 3ax + c \rightarrow P'(x) = 2ax - 3a \rightarrow$$
$$\rightarrow P'\left(\tfrac{3}{2}\right) = 2a \cdot \tfrac{3}{2} - 3a = 3a - 3a = \boxed{0}$$

Tornar a l'enunciat

67) PAU 2010 Sèrie 4 Qüestió 5:
En la figura següent es representen dues funcions. L'una és la derivada de l'altra. Decidiu si la funció **f (x)** és la derivada de la funció **g(x)** o és a l'inrevés, estudiantquè passa en els punts**x = a**, **x = b** i **x = c**.



En el punt $x = a$ la funció $g(x)$ té un màxim relatiu i la funció $f(x)$ val zero.
En el punt $x = b$ la funció $g(x)$ és estrictament decreixent i la funció $f(x)$ és negativa.
En el punt $x = c$ la funció $g(x)$ té un mínim relatiu i la funció $f(x)$ val zero. Per tant, la funció $f(x)$ és la derivada de la funció $g(x)$.

Tornar a l'enunciat

68) PAU 2011 Sèrie 1 Qüestió 6:
Sigui $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ quan a≠0.
a) Calculeu el valor de a perquè aquesta funció tingui un extrem relatiu en el puntd'abscissa **x=2**.

Si la funció $f(x)$ té un extrem relatiu en $x=2$ aleshores $f'(2)=0$.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-ax} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-ax} + x^2 \cdot e^{-ax} \cdot (-a) = e^{-ax}(2x - ax^2)$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow e^{-a\cdot 2}(2\cdot 2 - a\cdot 2^2) = 0 \rightarrow e^{-2a}(4-4a) = 0 \rightarrow \begin{cases} e^{-2a} = 0 \rightarrow \nexists \\ 4 - 4a = 0 \rightarrow 4 = 4a \rightarrow \boxed{\boxed{a=1}} \end{cases}$$

De fet, per poder assegurar que en $x=2$ té un extrem relatiu hauríem de comprovar també que la segona derivada en aquest punt no és nul·la o estudiar el signe de la primera derivada.

b) Quan **a=2**, classifiqueu-ne els extrems relatius.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-ax} \xrightarrow{a=2} f(x) = x^2 \cdot e^{-2x} \rightarrow f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2e^{-2x}\cdot(-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x) = e^{-2x}(2x - 2x^2)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^{-2x}(2x-2x^2) = 0 \xrightarrow{e^{-2x}\neq 0} 2x - 2x^2 = 0 \rightarrow 2x(1-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Interval	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia de $f(x)$	↘	m	↗	M	↘

Per tant, quan $a=2$ la funció té un mínim relatiu en $x=0$ i un màxim relatiu en $x=1$.

Tornar a l'enunciat

69) PAU 2011 Sèrie 2 Qüestió 3:
Donada la funció $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$:

a) Determineu la relació que han de complir els paràmetres **a**, **b** i **c** perquè **f (x)** tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa **x=−1**.

Si f té un extrem relatiu en $x=-1$ aleshores $f'(-1)=0$

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \to f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$\to f'(-1)=0 \to 3(-1)^2+2a(-1)+b=0 \to 3-2a+b=0 \to -2a+b=-3 \to$$

$$\to \boxed{2a-b=3}$$

b) Calculeu el valor del paràmetre **a** perquè hi hagi un punt d'inflexió de la funció **f (x)** en el punt d'abscissa **x=0**.

Si f té un punt d'inflexió en $x=0$ aleshores $f''(0)=0$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \to f''(x)=6x+2a$$

$$f''(0)=0 \to 6\cdot 0+2a=0 \to 0+2a=0 \to 2a=0 \to \boxed{a=0}$$

c) Determineu la relació entre els paràmetres **a**, **b** i **c** sabent que la gràfica **de f (x)** talla l'eix **OX** en el punt d'abscissa **x=−2**.

Si la funció f talla l'eix OX en el punt $x=-2$, aleshores $f(-2)=0$

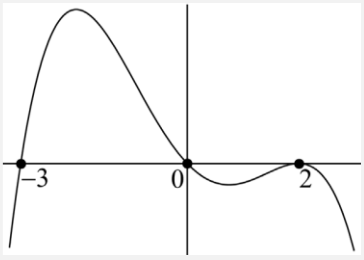
$$f(-2)=0 \to (-2)^3+a(-2)^2+b(-2)+c=0 \to -8+4a-2b+c=0 \to \boxed{4a-2b+c=8}$$

d) Calculeu el valor dels paràmetres **a**, **b** i **c** perquè es compleixin les tres propietats anteriors alhora.

$$\begin{cases} 4a-2b+c=8 \\ 2a-b=3 \\ a=0 \end{cases} \cong \begin{cases} -2b+c=8 \\ -b=3 \\ a=0 \end{cases} \cong \begin{cases} 6+c=8 \\ b=-3 \\ a=0 \end{cases} \cong \boxed{\begin{cases} c=2 \\ b=-3 \\ a=0 \end{cases}}$$

Tornar a l'enunciat

70) PAU 2011 Sèrie 4 Qüestió 3:
La gràfica corresponent a la derivada d'una funció f(x) és la següent:



a) Expliqueu raonadament quins valors de x corresponen a màxims o a mínims relatius de f(x).

Ens diuen que la gràfica correspon a la funció $f'(x)$ aleshores podem emplenar la següent taula on les dades en blau, corresponents a les dues primeres files les obtenim a partir de la gràfica de l'enunciat mentre que les dades de negre de la tercera fila les pensem a partir de les anteriors.

Interval	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
Monotonia de $f(x)$	↘	m	↗	M	↘	PI	↘

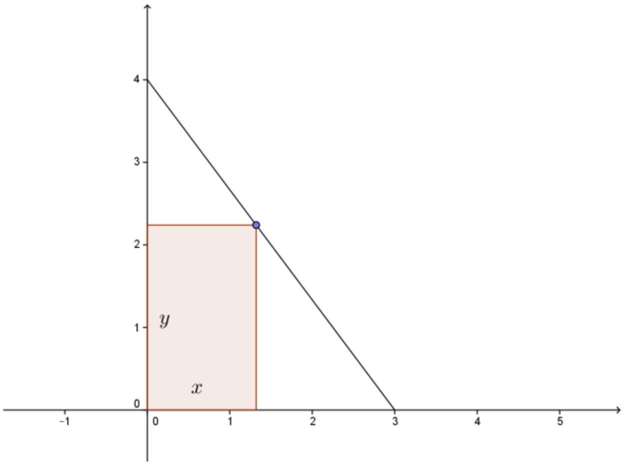
En el punt $x=-3$ la funció passa de decreixent a creixent i per tant en $x=-3$ tenim un mínim relatiu.
En el punt $x=0$ la funció passa de creixent a decreixent i per tant en aquest punt tenim un màxim relatiu.
En el punt $x=2$ tot i que s'anul·la la derivada, la funció és decreixent a l'esquerra i decreixent a la dreta, per tant, en aquest cas es tracta d'un punt d'inflexió.

b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció f(x).

f estrictament creixent en l'interval $(-3,0)$ i estrictament decreixent en $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$.

Tornar a l'enunciat

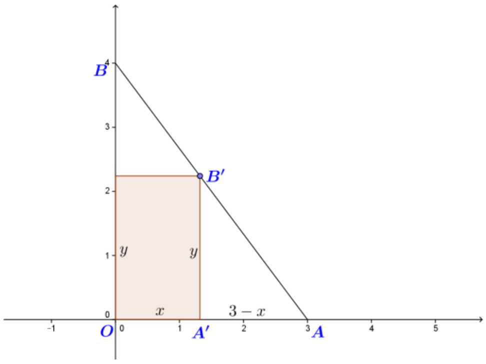
71) PAU 2011 Sèrie 4 Qüestió 6:
Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.
a) Feu un esbós de la situació descrita.



b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que 4x+3y=12.

Els triangles **OAB** i **A'AB'** són semblants, per tant:

$$\frac{4}{3}=\frac{y}{3-x}\rightarrow 4\cdot(3-x)=3y\rightarrow 12-4x=3y\rightarrow$$
$$\rightarrow 12=4x+3y\rightarrow \boxed{4x+3y=12}$$



c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

El rectangle fa x de base per y d'altura. Per tant la seva àrea serà $A=x\cdot y$.
Finalment fiquem y en funció de x aprofitant la relació $4x+3y=12$.

$$4x+3y=12\rightarrow 3y=12-4x\rightarrow y=\frac{12-4x}{3}\rightarrow y=4-\frac{4}{3}x$$

$$A=x\cdot y=x\cdot\left(4-\frac{4}{3}x\right)\rightarrow A(x)=4x-\frac{4}{3}x^2$$

$$A(x)=4x-\frac{4}{3}x^2\rightarrow A'(x)=4-\frac{8}{3}x$$

$$A'(x)=0\rightarrow 4-\frac{8}{3}x=0\rightarrow 4=\frac{8}{3}x\rightarrow \frac{4\cdot 3}{8}=x\rightarrow x=\frac{12}{8}\rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$$

Per provar que aquest punt es tracta d'un màxim podríem avaluar la segona derivada en el punt o fer una taula de signes de la primera.

Donat que la x del problema solament té sentit en l'interval $[0,3]$ tenim:

Interval	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2},3\right)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonia de $f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

Per tant, es tracta d'un màxim.

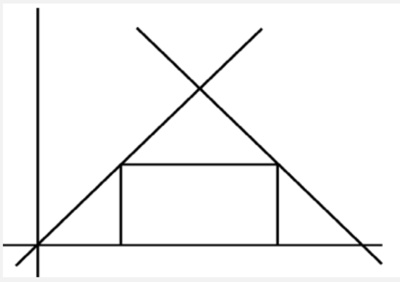
Com ens demanen calcular les dues dimensions del rectangle tenim que:

$$4x+3y=12\xrightarrow{x=\frac{3}{2}}\rightarrow 4\cdot\tfrac{3}{2}+3y=12\rightarrow 6+3y=12\rightarrow 3y=6\rightarrow y=2$$

Per tant, les dimensions del rectangle òptim són: $\boxed{x=\frac{3}{2}}$ de base per $\boxed{y=2}$ d'altura.

Tornar a l'enunciat

72) PAU 2012 Sèrie 1 Qüestió 4:
Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions y = x, x + y = 8, y = 0, i té un costat sobre la recta y = 0. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.



Per començar podríem calcular els vèrtexs del triangle. Aquests seran on es tallen cada parell de rectes:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow O = (0,0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 8 \end{cases} \cong \begin{cases} y = 0 \\ x + 0 = 8 \end{cases} \rightarrow A = (8,0)$$

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = 8 \end{cases} \cong \begin{cases} y = x \\ x + x = 8 \end{cases} \cong \begin{cases} y = x \\ 2x = 8 \end{cases} \rightarrow x = y = 4 \rightarrow B = (4,4)$$

Sigui x la distància representada en color lila al dibuix adjunt. Aleshores tenim que el rectangle farà x d'altura i $8-2x$ de base. Noteu que la x té sentit en l'interval $[0,4]$.

Per tant, l'àrea del rectangle serà $A(x) = x\cdot(8-2x) \quad x \in [0,4]$

Per optimitzar la funció derivem i igualem a zero:

$$A(x) = x\cdot(8-2x) = 8x - 2x^2 \rightarrow A'(x) = 8 - 4x$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow 8 - 4x = 0 \rightarrow 8 = 4x \rightarrow x = 2$$

Interval	$(0,2)$	2	$(2,4)$
Signe de $A'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonia de $A(x)$	↗	M	↘

Per tant el punt $x = 2$ és un màxim i les dimensions òptimes són un rectangle $2 \text{ x } 4$.

Noteu que en aquest cas per saber que $x = 2$ es tractava d'un màxim també resultava molt senzill avaluar la segona derivada.

$$A'(x) = 8 - 4x \rightarrow A''(x) = -4 \rightarrow A''(2) = -4 < 0 \rightarrow x = 2$$ és un màxim.

Tornar a l'enunciat

73) PAU 2012 Sèrie 3 Qüestió 2:
Donades la recta $y = 3x + b$ i la paràbola $y = x^2$,
a) Calculeu l'abscissa del punt on la recta tangent a la paràbola és paral·lela a la recta donada.

La recta $y = 3x + b$ té pendent 3.

Si la recta tangent a la corba $y = x^2$ ha de ser paral·lela a la recta anterior també haurà de tenir pendent igual a 3.
Com la pendent de la recta tangent en un punt coincideix amb la derivada de la corba en aquest punt, hem de calcular en quins punts de la corba $y = x^2$ la derivada val 3.

$$y = x^2 \rightarrow y'(x) = 2x$$

$$y'(x) = 3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

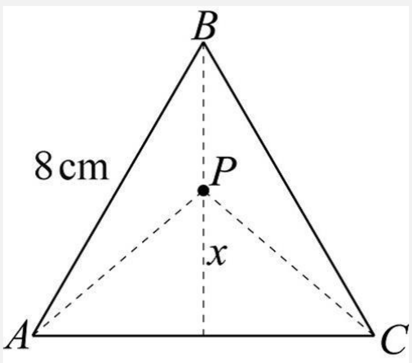
b) Calculeu el valor del paràmetre b perquè la recta sigui tangent a la paràbola.

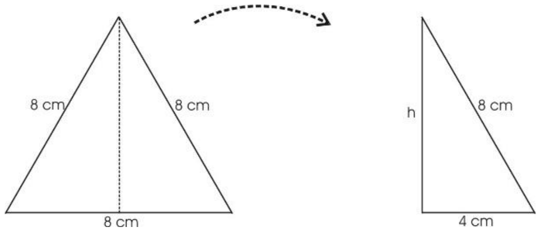
Per a que la recta sigui tangent a la paràbola no solament ha de tenir la pendent correcta sinó també l'alçada correcta. És a dir, ja sabem que en el punt $x = \frac{3}{2}$ la pendent de la recta tangent és 3 però per a que la recta $y = 3x + b$ sigui realment tangent a la corba en aquest punt ens falta afegir que també tinguin el mateix valor. Per tant,

$$3 \cdot \frac{3}{2} + b = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{9}{2} + b = \frac{9}{4} \rightarrow b = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \rightarrow \boxed{b = \frac{-9}{4}}$$

Tornar a l'enunciat

74) PAU 2012 Sèrie 3 Qüestió 5:
Un triangle equilàter de vèrtexs **A**, **B** i **C** té els costats de **8 cm**. Situem un punt **P** sobre una de les altures del triangle, a una distància **x** de la base corresponent.
a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs **A**, **B** i **C**.





Per ser equilàter, l'altura que passa pel vèrtex B divideix del triangle en dos parts iguals, per tant qualsevol dels dos triangles serà rectangle amb la hipotenusa de 8 centímetres i el catet petit de 4 centímetres tal i com mostra la figura anterior.

Aplicant Pitàgores:

$$8^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow 64 = h^2 + 16 \rightarrow h^2 = 64 - 16 \rightarrow h^2 = 48 \rightarrow h = \sqrt{48} \rightarrow \boxed{h = 4\sqrt{3}}$$

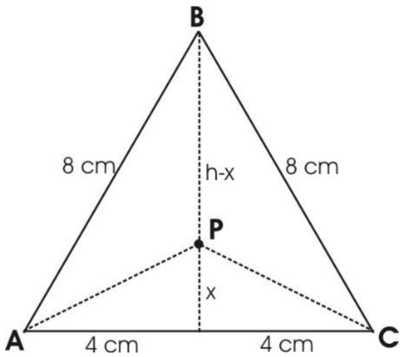
b) Indiqueu la distància del punt **P** a cadascun dels vèrtexs (en funció de **x**).

$$d(P,B) = h - x = 4\sqrt{3} - x$$

Aplicant **Pitàgores**:

$$d^2(A,P) = 4^2 + x^2 \rightarrow d(A,P) = \sqrt{16 + x^2}$$

$$d(C,P) = d(A,P) \rightarrow d(C,P) = \sqrt{16 + x^2}$$



c) Determineu el valor de **x** perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.

$$S(x) = d^2(A,P) + d^2(\mathrm{B},P) + d^2(\mathrm{C},P) = \left(\sqrt{16 + x^2}\right)^2 + \left(4\sqrt{3} - x\right)^2 + \left(\sqrt{16 + x^2}\right)^2 =$$

$$= 16 + x^2 + 48 - 8\sqrt{3}x + x^2 + 16 + x^2 = 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 80 \rightarrow S(x) = 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 80$$

Per minimitzar aquesta funció igualem la derivada a zero.

$$S(x) = 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 80 \rightarrow S'(x) = 6x - 8\sqrt{3}$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow 6x - 8\sqrt{3} = 0 \rightarrow 6x = 8\sqrt{3} \rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{6} \rightarrow \boxed{x = \frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

Per saber si és un màxim o un mínim avaluem la segona derivada.

$$S'(x) = 6x - 8\sqrt{3} \rightarrow S''(x) = 6 \rightarrow S''\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = 6 > 0 \rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ és un mínim.}$$

Tornar a l'enunciat

75) PAU 2012 Sèrie 4 Qüestió 4:
Una fàbrica produeix diàriament x tones d'un producte **A** i $(40-5x)/(10-x)$ tones d'un producte **B**. La quantitat màxima de producte **A**que es pot produir és 8 tones.
El preu de venda del producte **A**és 100€ per tona i el del producte **B**és 250€ per tona.
a) Construïu la funció de la variable x que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.

Podem observar que $x \in [0,8]$.
La funció benefici serà:

$$f(x) = 100x + 250 \cdot \frac{40-5x}{10-x} \rightarrow \boxed{f(x) = 100x + \frac{10000-1250x}{10-x} \quad on \quad x \in [0,8]}$$

b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

$$f(x) = 100x + \frac{10000-1250x}{10-x} \rightarrow f'(x) = 100 + \frac{-1250(10-x)-(10000-1250x)(-1)}{(10-x)^2} \rightarrow$$

$$f'(x) = 100 + \frac{-12500+1250x+10000-1250x}{(10-x)^2} = 100 + \frac{-2500}{(10-x)^2} = 100 - \frac{2500}{(10-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 100 - \frac{2500}{(10-x)^2} = 0 \rightarrow 100 = \frac{2500}{(10-x)^2} \rightarrow 100(10-x)^2 = 2500 \xrightarrow{\div 100}$$

$$\rightarrow (10-x)^2 = 25 \rightarrow 100 - 20x + x^2 = 25 \rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 15 \end{cases} \xrightarrow{x \in [0,8]} \boxed{x=5}$$

Per tant la solució òptima és $x = 5$ i per tant es vendran 5 tones del producte **A** i
$\frac{40-5x}{10-x} = \frac{15}{5} = 3$
tones del producte **B**.

Finalment, per comprovar que el punt $x = 5$ tracta realment d'un màxim podem o bé avaluar la segona derivada en el punt o estudiar el signe de la primera.

$$f'(x) = 100 - \frac{2500}{(10-x)^2} \quad on \quad x \in [0,8]$$

Interval	$(0,5)$	5	$(5,8)$
Signe de $A'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonia de $A(x)$	↗	M	↘

En el punt $x = 5$ la funció passa de creixent a decreixent per tant és un màxim.

Tornar a l'enunciat

76) PAU 2012 Sèrie 4 Qüestió 6:
Donades la recta $y = ax + 1$ i la paràbola $y = 3x - x^2$,
a) Calculeu els valors del paràmetre a perquè siguin tangents.
b) Calculeu els punts de tangència.

Per a que dues funcions $y_1(x)$ i $y_2(x)$ siguin tangents en un punt $x = b$ s'ha de complir que $y_1(b) = y_2(b)$ i que $y_1'(b) = y_2'(b)$.

En el nostre cas, $y_1(x) = \to y_1'(x) = a$ i $y_2(x) = 3x - x^2 \to y_2'(x) = 3 - 2x$

Suposem que les dues funcions són tangents en un punt $x = b$, aleshores:

$$\begin{cases} y_1(b) = y_2(b) \\ y_1'(b) = y_2'(b) \end{cases} \to \begin{cases} a \cdot b + 1 = 3b - b^2 \\ a = 3 - 2b \end{cases} \to (3 - 2b) \cdot b + 1 = 3b - b^2 \to$$

$$\to 3b - 2b^2 + 1 = 3b - b^2 \to 1 = b^2 \to b = \sqrt{1} \to b = \pm 1$$

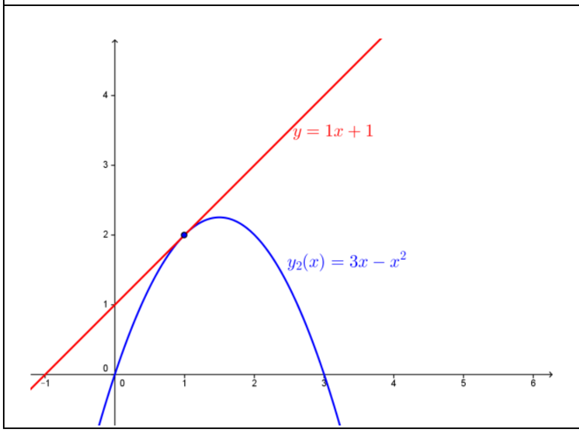
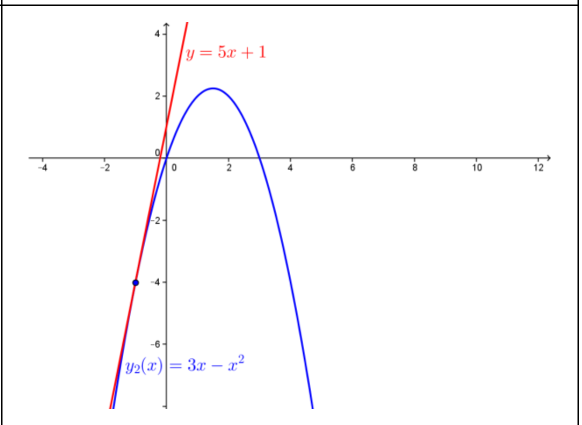
$$\begin{cases} b = 1 \\ b = -1 \end{cases} \xrightarrow{a=3-2b} \begin{cases} a = 3 - 2 \to a = 1 \\ a = 3 + 2 \to a = 5 \end{cases}$$

Per tant, els valors de a per als quals la recta i la paràbola són tangent són $\boxed{a = 1}$ i $\boxed{a = 5}$

En el cas en que $a = 1$ el punt de tangència serà $(b, f(b))$ és a dir, $(1, y_1(1)) = \boxed{(1, 2)}$

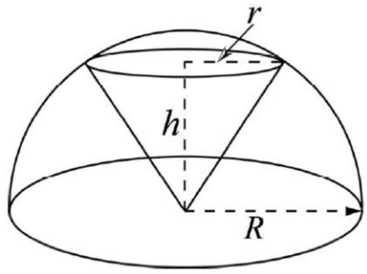
En el cas en que $a = 5$ el punt de tangència serà $(b, f(b))$ és a dir, $(-1, y_1(-1)) = \boxed{(-1, -4)}$

En el següents gràfics s'ha representat la situació per $a = 1$ i per a $a = 5$ i es pot comprovar que en el primer cas el punt de tangència és $(1, 2)$ mentre que en el segon cas és $(-1, -4)$

Cas $a = 1$	**Cas** $a = 5$
	

Tornar a l'enunciat

77) PAU 2013 Sèrie 3 Qüestió 5:
En una semiesfera de radi R inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal i com es veu en el dibuix.
a)Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com $V=\dfrac{\pi\cdot h}{3}\left(R^2-h^2\right)$.



Aplicant Pitàgores: $R^2=h^2+r^2\rightarrow r^2=R^2-h^2$
Àrea base $=\pi r^2=\pi\left(R^2-h^2\right)$
Àrea con $=\dfrac{\text{Àrea base}\times \text{Altura}}{3}=\dfrac{\pi\left(R^2-h^2\right)\times h}{3}=\boxed{\dfrac{\pi\cdot h}{3}\left(R^2-h^2\right)}$

b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

$$V=\frac{\pi\cdot h}{3}\left(R^2-h^2\right)=\frac{\pi}{3}\left(R^2h-h^3\right)$$

Podem observar que en l'expressió del volum aparentment tenim dues variables, però això és fals. El radi R de la semiesfera és fixe perquè la semiesfera ens ve donada i nosaltres juguem amb l'altura del con h per aconseguir el con de volum màxim. Per tant:

$$V(h)=\frac{\pi}{3}\left(R^2h-h^3\right)\rightarrow V'(h)=\frac{\pi}{3}\left(R^2-3h^2\right)$$

$$V'(h)=0\rightarrow\frac{\pi}{3}\left(R^2-3h^2\right)=0\rightarrow R^2-3h^2=0\rightarrow R^2=3h^2\rightarrow h^2=\frac{R^2}{3}\rightarrow h=+\sqrt{\frac{R^2}{3}}\rightarrow$$

$$\rightarrow h=\frac{R}{\sqrt{3}}\rightarrow\boxed{h=\frac{\sqrt{3}}{3}R}$$

En aquest cas el radi de la base del con serà:

$$r^2=R^2-h^2=R^2-\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2=R^2-\frac{R^2}{3}=\frac{3R^2-R^2}{3}=\frac{2R^2}{3}\rightarrow r=+\sqrt{\frac{2R^2}{3}}\rightarrow$$

$$\rightarrow r=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R\rightarrow\boxed{r=\frac{\sqrt{6}}{3}R}$$

Demostrem que es tracta d'un màxim:

$$V'(h)=\frac{\pi}{3}\left(R^2-3h^2\right)\rightarrow V''(h)=\frac{\pi}{3}(0-6h)\rightarrow V''(h)=\frac{\pi}{3}\cdot(-6h)\rightarrow V''(h)=-2\pi h\rightarrow$$

$$\rightarrow V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)=-2\pi\frac{R}{\sqrt{3}}<0\rightarrow h=\frac{R}{\sqrt{3}}$$ és un màxim relatiu.

Tornar a l'enunciat

78) PAU 2013 Sèrie 3 Qüestió 6:
Sigui $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Sabem que la gràfica d'aquesta funció és tangent a la recta $r: y=x+3$ en el punt d'abscissa $x=-1$, i que en el punt d'abscissa $x=1$ la recta tangent és paral·lela a la recta r. Calculeu el valor dels paràmetres **a**, **b** i **c**.

$f(x)$ tangent a la recta $y=x+3$ en el punt $-1 \rightarrow \begin{cases} f(-1)=y(-1) \\ f'(-1)=y'(-1) \end{cases}$

$$f(-1)=y(-1) \rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+c=-1+3 \rightarrow -1+a-b+c=2 \rightarrow a-b+c=3$$

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(-1)=y'(-1) \rightarrow 3(-1)^2+2a(-1)+b=1 \rightarrow 3-2a+b=1 \rightarrow -2a+b=-2 \rightarrow 2a-b=2$$

En el punt d'abscissa $x=1$ la recta tangent és paral·lela a la recta $r \rightarrow$ En $x=1$ la recta tangent té la mateixa pendent que r, és a dir, pendent igual a 1. Però com la pendent de la recta tangent en un punt és el valor de la derivada de la funció en aquest punt tenim que:

$$f'(1)=1 \rightarrow 3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=1 \rightarrow 3+2a+b=1 \rightarrow 2a+b=-2$$

Aleshores tenim el següent sistema:

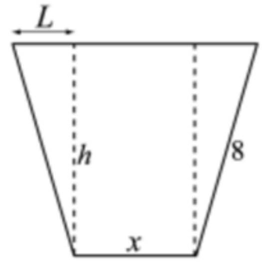
$$\begin{cases} a-b+c=3 \\ 2a-b=2 \\ 2a+b=-2 \end{cases}$$

Sumant les dues últimes equacions tenim $4a=0 \rightarrow a=0$
Substituint en l'última equació tenim $b=-2$
Finalment, substituint en la 1a equació: $0+2+c=3 \rightarrow c=1$

Per tant la solució al problema és: $\boxed{a=0,\ \ b=-2,\ \ c=1}$

Tornar a l'enunciat

79) PAU 2013 Sèrie 4 Qüestió 4:
Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



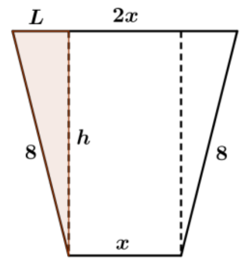
a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).
b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$$

c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (*no cal que comproveu que és realment un màxim*)

$$L=\frac{2x-x}{2}\rightarrow \boxed{L=\frac{x}{2}}$$

Aplicant Pitàgores al triangle acolorit:



$$8^2=h^2+L^2\rightarrow 8^2=h^2+\left(\tfrac{x}{2}\right)^2\rightarrow 64=h^2+\frac{x^2}{4}\rightarrow h^2=64-\frac{x^2}{4}\rightarrow$$

$$\rightarrow h^2=\frac{256-x^2}{4}\rightarrow h=\frac{\sqrt{256-x^2}}{2}$$

$$A=\frac{(Base\ major+Base\ menor)\cdot Altura}{2}=\frac{(2x+x)\cdot h}{2}=\frac{3x\cdot h}{2}=$$

$$=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}\rightarrow \boxed{A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}}$$

$$A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}\rightarrow A'(x)=\frac{3}{4}\cdot\left(1\cdot\sqrt{256-x^2}+x\cdot\frac{1}{2}(256-x^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot(-2x)\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\left(\sqrt{256-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{256-x^2}}\right)$$

$$A'(x)=0\rightarrow\frac{3}{4}\left(\sqrt{256-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{256-x^2}}\right)=0\rightarrow\sqrt{256-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{256-x^2}}=0\rightarrow$$

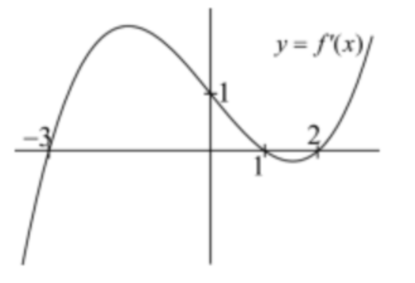
$$\rightarrow\sqrt{256-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{256-x^2}}\rightarrow 256-x^2=x^2\rightarrow 256=2x^2\rightarrow x^2=128\rightarrow x=\sqrt{128}\rightarrow$$

$$\rightarrow x=\pm 8\sqrt{2}\xrightarrow{x>0}\boxed{x=8\sqrt{2}}$$

Tornar a l'enunciat

80) PAU 2013 Sèrie 4 Qüestió 4:

La funció $f(x)$ és derivable i passa per l'origen de coordenades. La gràfica de la funció derivada és la que veieu aquí dibuixada, essent $f'(x)$ creixent als intervals $(-\infty,-3]$ i $[2,+\infty)$.



a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=0$.

b) Indiqueu les abscisses dels extrems relatius de la funció $f(x)$ i classifiqueu aquests extrems.

L'equació de la recta tangent a una funció f en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Per tant, en $x=0$ serà: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

L'enunciat diu que la funció f passa per l'origen de coordenades, per tant, $f(0)=0$.

Si mirem el gràfic tenim que $f'(0)=1$, per tant:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\rightarrow y-0=1(x-0)\rightarrow \boxed{y=x}$$

Interval	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	↘	**m**	↗	**M**	↘	**m**	↗

Per tant la funció té dos mínims relatius en $x=-3$ i en $x=2$ i un màxim relatiu en $x=1$.

Tornar a l'enunciat

81) PAU 2013 Sèrie 5 Qüestió 4: (Incomplet)

Per a $x\geq 1$, considereu la funció $f(x)=+\sqrt{x-1}$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa igual a 10.

L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

En el nostre cas:

$$f(x)=\sqrt{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{2}}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{\frac{-1}{2}}\cdot 1\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f(10) = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$$

$$f'(10) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

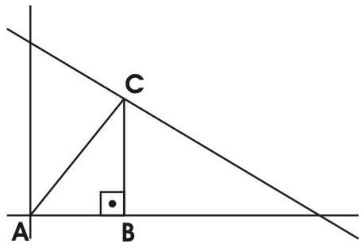
$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \xrightarrow{a=10} y - f(10) = f'(10)(x-10) \to y-3 = \frac{1}{6}(x-10) \to$$

$$y - 3 = \frac{x-10}{6} \to 6y - 18 = x - 10 \to \boxed{x - 6y + 8 = 0}$$

Tornar a l'enunciat

82) PAU 2013 Sèrie 4 Qüestió 4:

Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtexs $B=(x,0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtexs C pertany a la recta $x+2y=8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$.

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

Donat que el punt C pertany la recta $x+2y=8$ les seves coordenades $C=(x,y)$ hauran de complir l'equació de la recta $x+2y=8$. És a dir, $x+2y=8 \to 2y = 8-x \to y = \frac{8-x}{2}$.

Per tant, el punt C és de la forma $C = \left(x, \frac{8-x}{2}\right)$

$$\text{Àrea Triangle} = \frac{Base\ x\ Altura}{2} = \frac{x\cdot\left(\frac{8-x}{2}\right)}{2} = \frac{x\cdot(8-x)}{4} = \frac{8x - x^2}{4} = 2x - \frac{x^2}{4}$$

Per tant: $A(x) = 2x - \frac{x^2}{4}$

$$A(x) = 2x - \frac{x^2}{4} \to A'(x) = 2 - \frac{2x}{4} = 2 - \frac{x}{2}$$

$$A'(x) = 0 \to 2 - \frac{x}{2} = 0 \to 2 = \frac{x}{2} \to x = 4$$

Així el triangle d'àrea màxima s'assoleix quan $x=4$ i per tant els vèrtexs seran:

$$\boxed{A=(0,0),\ B=(0,4)\ \text{i}\ C=(4,2)}$$

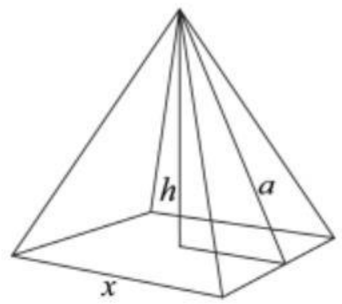
Finalment comprovem que es tracta realment d'un màxim mitjançant la segona derivada:

$A'(x)=2-\frac{2x}{4}\rightarrow A''(x)=0-\frac{2}{4}=\frac{-1}{2}\rightarrow A''(2)=\frac{-1}{2}<0\rightarrow x=2$ és un màxim relatiu.

Tornar a l'enunciat

83) PAU 2013 Sèrie 1 Qüestió 6:
Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de $300m^2$ de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem x la longitud d'un costat de la base de la tenda.
a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

$$V(x)=\frac{x\sqrt{(9\times 10^4)-x^4}}{6}$$



b)Determineu el valor de x perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

Donat que ja sabem que el costat de la base mesura x, per poder calcular el volum de la piràmide necessitarem calcular l'altura h.

Per Pitàgores tenim que $a^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$ **(1)**.

Si les 4 cares de la piràmide han de tenir una superfície de $300m^2$ aleshores tenim que

$$4\cdot\frac{x\cdot a}{2}=300\rightarrow 2ax=300\rightarrow ax=150\rightarrow a=\frac{150}{x}$$

Substituint en l'expressió **(1)** tenim:

$$a^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\xrightarrow{a=\frac{150}{x}}\left(\frac{150}{x}\right)^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\rightarrow\frac{22500}{x^2}=h^2+\frac{x^2}{4}\xrightarrow{\times 4}\frac{90000}{x^2}=4h^2+x^2\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{90000}{x^2}-x^2=4h^2\rightarrow\frac{90000-x^4}{x^2}=4h^2\rightarrow h^2=\frac{90000-x^4}{4x^2}\rightarrow h=\sqrt{\frac{90000-x^4}{4x^2}}$$

Finalment calculem el volum de la piràmide:

$$V=\frac{1}{3}\cdot \text{Àrea base}\cdot \text{Altura}=\frac{1}{3}x^2\cdot h=\frac{1}{3}x^2\cdot\sqrt{\frac{90000-x^4}{4x^2}}=\frac{1}{6}x^2\cdot\sqrt{\frac{90000-x^4}{x^2}}=$$

$$=\frac{1}{6}x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\sqrt{90000-x^4}=\frac{x\sqrt{90000-x^4}}{6}\rightarrow\boxed{V(x)=\frac{x\sqrt{90000-x^4}}{6}}$$

Per poder calcular el valor de x que maximitza el volum hem de derivar i igualar a zero.

$$V(x)=\frac{x\sqrt{90000-x^4}}{6}\rightarrow V'(x)=\frac{1}{6}\left(\sqrt{90000-x^4}+x\frac{1}{2}\left(90000-x^4\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot\left(-4x^3\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{90000-x^4}-\frac{1}{2}\frac{4x^4}{\sqrt{90000-x^4}}\right)=\frac{1}{6}\left(\sqrt{90000-x^4}-\frac{2x^4}{\sqrt{90000-x^4}}\right)$$

$$V'(x)=0\rightarrow\frac{1}{6}\left(\sqrt{90000-x^4}-\frac{2x^4}{\sqrt{90000-x^4}}\right)=0\rightarrow\sqrt{90000-x^4}-\frac{2x^4}{\sqrt{90000-x^4}}=0\rightarrow$$

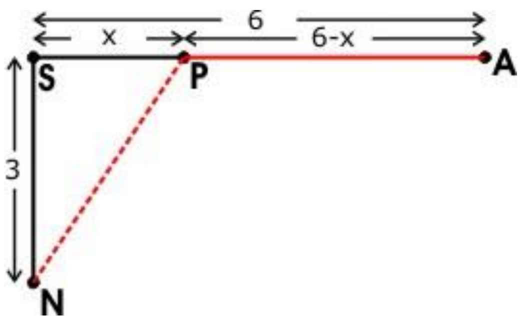
$$\rightarrow\sqrt{90000-x^4}=\frac{2x^4}{\sqrt{90000-x^4}}\rightarrow\left(\sqrt{90000-x^4}\right)^2=2x^4\rightarrow 90000-x^4=2x^4\rightarrow$$

$$\rightarrow 90000=3x^4\rightarrow 30000=x^4\rightarrow x=\sqrt[4]{30000}=\sqrt[4]{3\cdot 10000}=\boxed{10\sqrt[4]{3}}$$

Per tant, el valor de x que fa màxim el volum és $x=10\sqrt[4]{3}$

Tornar a l'enunciat

84) PAU 2014 Sèrie 3 Qüestió 3:
Un nedador és al mar en un punt **N**, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt **S**, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt **A**, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt **S**, de manera que el triangle **NSA** és rectangle en el vèrtex **S**. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.
a) Si **P** és un punt entre el punt **S** i el punt **A** que està a una distància **x** de **S**, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt **N** al punt **P** i caminar des del punt **P** fins al punt **A** és determinat per l'expressió $t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}$.



A la figura de la dreta tenim representats tots els elements del problema.

Calculem primer la distància NP que és la distància que el nedador recorre nadant.
Per Pitàgores, $d_1^2=x^2+3^2\rightarrow d_1=\sqrt{x^2+9}$
La distància que recorre caminant és PA que evidentment és $d_2=6-x$
Com espai és igual a la velocitat per temps, aïllant el temps tenim:

$$e=v\cdot t\rightarrow t=\frac{e}{v}=\frac{e_1}{v_1}+\frac{e_2}{v_2}=\frac{d_1}{3}+\frac{d_2}{5}=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}\rightarrow\boxed{t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}}$$

b) Calculeu el valor de **x** que determina el temps mínim que cal per a anar del punt **N** al punt **A**, passant per **P**. Quin és el valor d'aquest temps mínim?

Per minimitzar la funció anterior calculem la derivada i la igualem la derivada a zero.
Càlcul de la derivada:

$$t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}\rightarrow t(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{5}(6-x)\rightarrow$$

$$\rightarrow t'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+9\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot 2x-\frac{1}{5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{5}\rightarrow t'(x)=\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{5}$$

Igualant a zero:

$$t'(x)=0\rightarrow\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{5}=0\rightarrow\frac{x}{3\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{5}\rightarrow 5x=3\sqrt{x^2+9}\xrightarrow{x^2}$$

$$\rightarrow 25x^2=9\left(x^2+9\right)\rightarrow 25x^2=9x^2+81\rightarrow 16x^2=81\rightarrow x^2=\frac{81}{16}\rightarrow$$

$$\rightarrow x=\sqrt{\frac{81}{16}}x=\pm\frac{9}{4}\xrightarrow{x>0}x=\frac{9}{4}$$

NOTA: Tot i que el problema no ho demana s'hauria de calcular que aquest punt correspon a un mínim relatiu, la manera més fàcil de fer-ho seria avaluar la funció derivada a l'esquerra i a la dreta d'aquest punt. Podem observar que a l'esquerra de $x=\frac{9}{4}$, per exemple, per a $x=0$ la funció $t'(x)$ és negativa mentre que a la dreta del punt $x=\frac{9}{4}$, per exemple per a $x=3\,t'(x)$ és positiva. Per tant, en el punt $x=\dfrac{9}{4}$ la derivada s'anul·la i passa de negativa a positiva i per tant aquest punt es tracta d'un mínim relatiu. Evidentment també es podria raonar avaluant la segona derivada en aquest punt, en aquest cas dóna $t''(x)$

Per tant el temps mínim s'assoleix per a $\boxed{\boxed{x=\frac{9}{4}=2,25km}}$ i aquest temps mínim serà

$$t\left(\tfrac{9}{4}\right)=\frac{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+9}}{3}+\frac{6-\frac{9}{4}}{5}=\boxed{\boxed{2\ hores}}$$

Tornar a l'enunciat

85) PAU 2014 Sèrie 4 Qüestió 1:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$.

a) Calculeu les asimptotes verticals, horitzontals i obliques de la funcio f.

• **Asímptotes verticals:**

La funció tindrà asímptotes verticals en aquells valors de x on doni infinit, és a dir, aquells valors $x=a$ on $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$. En el nostre cas, evidentment és el punt $x=2$ on s'anul·la el denominador però no el numerador.

Aleshores, com $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ ja podem assegurar que la recta $x=2$ és una asímptota vertical de la funció.

• **Asímptotes horitzontals:**

$y=L$ és una asímptota horitzontal de la funció f sii un dels límits $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dóna L.

Calculem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x-2}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\dfrac{1+0}{1-0}=\dfrac{1}{1}=1\to y=1$ és asímptota horitzontal de la funció.

• **Asímptotes obliqües:**

Si una funció té asímptotes horitzontals aleshores no en pot tenir d'obliqües, per tant f no té asímptotes obliqües.

b) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funcio f en aquells punts en que la recta tangent sigui paral·lela a la recta $y=-5x+4$.

Si la recta tangent a f és paral·lela a la recta $y=-5x+4$ aleshores les dues rectes han de tenir la mateixa pendent.

Però la pendent de la recta $y=-5x+4$ és -5, per tant, la recta tangent que estem buscant també ha de tenir pendent -5.

Però la pendent de la recta tangent a una funció f en un punt $x=a$ coincideix amb el valor de la derivada de la funció f en aquest punt $x=a$.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-2}\to f'(x)=\frac{1\cdot(x-2)-(x+3)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x-3}{(x-2)^2}=\frac{-5}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=-5\to\frac{-5}{(x-2)^2}=-5\to(x-2)^2=1\to x-2=\sqrt{1}\to x-2=\pm1\to$$

$$\to\begin{cases}x-2=1\to x=3\\ x-2=-1\to x=1\end{cases}$$

Per tant hi ha dos punts on la recta tangent a f serà paral·lela a la recta $y=-5x+4$, aquests punts són $x=1$ i $x=3$.

• **Equació de la recta tangent a f en el punt $x=1$:**

Recordant que l'equació de la recta tangent a una funció f en un punt $x=x_0$ és $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ tenim:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\rightarrow y+4=-5(x-1)\rightarrow y+4=-5x+5\rightarrow \boxed{y=-5x+1}$$

• **Equació de la recta tangent a f en el punt $x=3$:**

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\rightarrow y-6=-5(x-3)\rightarrow y-6=-5x+15\rightarrow \boxed{y=-5x+21}$$

Tornar a l'enunciat

86) PAU 2014 Sèrie 5 Qüestió 2:

Siguin les funcions $f(x)=\dfrac{e^{ax}+b}{4}$ i $g(x)=+\sqrt{3x+4}$.

a) Determineu el domini i el recorregut de la funció g.

$$g(x)=+\sqrt{3x+4}$$

Per poder calcular una arrel quadrada es necessita que el radicand sigui positiu o zero. Així:

$$3x+4\geq 0\rightarrow 3x\geq -4\rightarrow x\geq \frac{-4}{3}\rightarrow D(g(x))=\{x\in\mathbb{R}/x\geq \tfrac{-4}{3}\}=\left[\frac{-4}{3},+\infty\right)$$

Per tant, $\boxed{D(g(x))=\left[\dfrac{-4}{3},+\infty\right)}$

El recorregut serà $\boxed{R(g)=[0,+\infty)}$

b) Calculeu per a quins valors de a i de b les gràfiques de les funcions són tangents (és a dir, tenen la mateixa recta tangent) en el punt d'abscissa $x=0$.

Per a que dues funcions f i g siguin tangents en un punt $x=a$ en aquest punt han de coincidir tant les funcions com les seves derivades, és a dir, s'ha de complir que $f(a)=g(a)$ i $f'(a)=g'(a)$.

En el nostre cas, com $x=0$, s'haurà de complir que $f(0)=g(0)$ i que $f'(0)=g'(0)$.

$$f(x)=\frac{e^{ax}+b}{4}\rightarrow f(0)=\frac{e^{a0}+b}{4}=\frac{e^{0}+b}{4}=\frac{1+b}{4}$$

$$g(x)=+\sqrt{3x+4}\rightarrow g(0)=+\sqrt{3\cdot 0+4}=+\sqrt{0+4}=+\sqrt{4}=2$$

$$f(0)=g(0)\rightarrow \frac{1+b}{4}=2\rightarrow 1+b=8\rightarrow b=7$$

$$f(x)=\frac{e^{ax}+b}{4}\xrightarrow{b=7}f(x)=\frac{e^{ax}+7}{4}\to f'(x)=\frac{1}{4}e^{ax}\cdot a=\frac{a}{4}e^{ax}\to$$

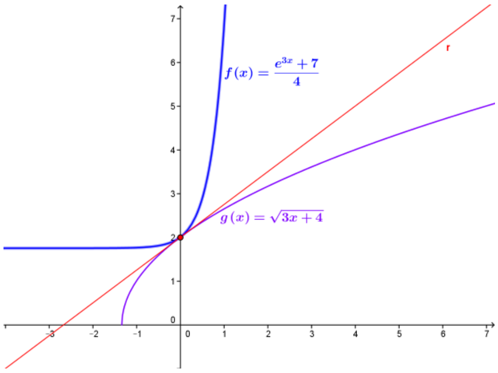
$$\to f'(0)=\frac{a}{4}e^{a\cdot 0}=\frac{a}{4}\cdot 1=\frac{a}{4}$$

$$g(x)=+\sqrt{3x+4}\to g(x)=(3x+4)^{\frac{1}{2}}\to g'(x)=\frac{1}{2}(3x+4)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 3=\frac{3}{2}(3x+4)^{\frac{-1}{2}}=\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$

$$g'(0)=\frac{3}{2\sqrt{3\cdot 0+4}}=\frac{3}{2\sqrt{0+4}}=\frac{3}{2\sqrt{4}}=\frac{3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$$

$$f'(0)=g'(0)\to\frac{a}{4}=\frac{3}{4}\to a=3$$

Per tant, la resposta al problema és $\boxed{a=3 \text{ i } b=7}$



A la figura de la dreta estan dibuixats tots els elements del problema.

Tornar a l'enunciat

87) PAU 2014 Sèrie 5 Qüestió 4:

Sabem que una funció f té per derivada la funció $f'(x)=(3x-2)^2(x-2)$.

a) Calculeu els valors de x en què la funció f té un màxim relatiu, un mínim relatiu o un punt d'inflexió, i indiqueu en cada cas de què es tracta.

• **Màxims i mínims relatius:**

Per estudiar els màxims i mínims relatius hem d'estudiar els punts on s'anul·la la derivada:

$$f'(x)=(3x-2)^2(x-2)$$

$$f'(x)=0\to(3x-2)^2(x-2)=0\to\begin{cases}(3x-2)^2=0\to 3x-2=0\to 3x=2\to x=\frac{2}{3}\\ x-2=0\to x=2\end{cases}$$

Donat que el domini de la funció es tot $\mathbb{R}$ hem d'estudiar el signe de la derivada en els següents intervals:

Interval	$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	↘		↘	**M**	↗

Observem que en el punt $x=2$ la funció passa de decreixent a creixent per tant $x=2$ és un mínim relatiu.

Notem que tot i que en el punt $x=\frac{2}{3}$ s'anul·la la derivada de la funció, aquest punt no és un extrem relatiu perquè la funció no canvia la seva monotonia en aquest punt.

- **Punts d'inflexió:**

Per calcular els punts d'inflexió hem d'anul·lar la segona derivada:

$$f'(x)=(3x-2)^2(x-2)\rightarrow f''(x)=2(3x-2)\cdot 3(x-2)+(3x-2)^2\cdot 1\rightarrow$$

$$\rightarrow f''(x)=6(3x-2)(x-2)+(3x-2)^2=6\left(3x^2-6x-2x+4\right)+9x^2-12x+4=$$

$$=18x^2-48x+24+9x^2-12x+4=27x^2-60x+28$$

$$f''(x)=0\rightarrow 27x^2-60x+28=0\rightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ x=\frac{14}{9}\end{cases}$$

Donat que el domini de la funció és tot $\mathbb{R}$ i que no hi ha cap punt on "*es trenqui*" i que per tant s'hauria d'afegir a la següent taula, hem d'estudiar els intervals següents:

Interval	$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},\frac{14}{9}\right)$	$\frac{14}{9}$	$\left(\frac{14}{9},+\infty\right)$
Signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Curvatura de $f(x)$	$\cup$	I	$\cap$	I	$\cup$

Per tant, la funció té dos punts d'inflexió $x=\frac{2}{3}$ i $x=\frac{14}{9}$.

b) Determineu la funció f sabent que s'anul·la en el punt d'abscissa $x=2$.

Ens demanen determinar la funció f sabent que $f'(x)=(3x-2)^2(x-2)$ i que f s'anul·la en $x=2$. Evidentment hem d'integrar.

$$f'(x)=(3x-2)^2(x-2)=\left(9x^2-12x+4\right)(x-2)=9x^3-12x^2+4x-18x^2+24x-8=$$

$$=9x^3-30x^2+28x-8\rightarrow f(x)=\int\left(9x^3-30x^2+28x-8\right)dx=\frac{9}{4}x^4-10x^3+14x^2-8x+C$$

$$f(2)=0\rightarrow\frac{9}{4}\cdot 2^4-10\cdot 2^3+14\cdot 2^2-8\cdot 2+C=0\rightarrow 36-80+56-16+C=0\rightarrow$$

$$\rightarrow -4+C=0\rightarrow C=4\rightarrow \boxed{f(x)=\frac{9}{4}x^4-10x^3+14x^2-8x+4}$$

Tornar a l'enunciat

88) PAU 2015 Sèrie 2 Qüestió 3: (Incomplet)

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

L'equació de la recta tangent a una corba $f(x)$ en el punt $x = a$ és $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

En el nostre cas:

$$f(x) = x^3 \to f(2) = 2^3 = 8$$

$$f(x) = x^3 \to f'(x) = 3x^2 \to f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$$

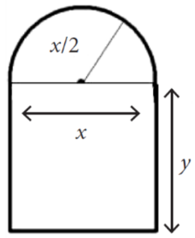
Per tant:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \to y - 8 = 12(x-2) \to y - 8 = 12x - 24 \to \boxed{y = 12x - 16}$$

Tornar a l'enunciat

89) PAU 2015 Sèrie 2 Qüestió 6:

La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què **x** és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i **y** és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció $f(x,y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

L'àrea de la portalada serà la suma de l'àrea d'un rectangle de base x i altura y i l'àrea d'un semicercle de radi $\frac{x}{2}$. Per tant:

$$A = A_1 + A_2 = xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{1}{2}\pi\frac{x^2}{4} = \boxed{xy + \frac{\pi x^2}{8}}$$

b) Si el perímetre de la portalada fa **20 m**, determineu les mides **x** i **y** de la portalada que en maximitzen l'àrea.

Perímetre $= 20 \to x + 2y + \frac{1}{2} \cdot 2\pi r = 20 \to x + 2y + \pi r = 20 \to x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 20 \to$

$$\to 2y = 20 - \frac{\pi x}{2} - x \to y = 10 - \frac{\pi x}{4} - \frac{x}{2} \to \boxed{y = 10 - \frac{\pi + 2}{4}x}$$

$$f(x,y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy \xrightarrow{y = 10 - \frac{\pi+2}{4}x} f(x) = \frac{\pi x^2}{8} + x\left(10 - \frac{\pi + 2}{4}x\right) \to$$

$$\to f(x)=\frac{\pi x^2}{8}+10x-x^2\left(\frac{\pi+2}{4}\right)=\frac{\pi x^2}{8}+10x-\frac{\pi x^2}{4}-\frac{2x^2}{4}=$$

$$=\frac{\pi x^2+80x-2\pi x^2-4x^2}{8}=\frac{-\pi x^2-4x^2+80x}{8}\to \boxed{f(x)=\frac{-\pi x^2-4x^2+80x}{8}}$$

• Per trobar el màxim hem de derivar la funció i igualar-la a zero:

$$f'(x)=\frac{-2\pi x-8x+80}{8}$$

$$f'(x)=0\to \frac{-2\pi x-8x+80}{8}=0\to -2\pi x-8x+80=0\xrightarrow{\div 2}-\pi x-4x+40=0\to$$

$$\to 40=\pi x+4x\to 40=x(\pi+4)\to \boxed{x=\frac{40}{\pi+4}\text{ metres}}$$

• Comprovem que és un màxim:

$$f'(x)=\frac{-2\pi x-8x+80}{8}\to f''(x)=\frac{-2\pi-8}{8}\to f''\left(\frac{40}{\pi+4}\right)=\frac{-2\pi-8}{8}<0\to$$

$\to x=\dfrac{40}{\pi+4}$ és un màxim relatiu.

$$y=10-\frac{\pi+2}{4}x=10-\frac{\pi+2}{4}\cdot\frac{40}{\pi+4}=10-\frac{10(\pi+2)}{\pi+4}=10-\frac{10\pi+20}{\pi+4}=$$

$$=\frac{10\pi+40-10\pi-20}{\pi+4}=\boxed{\frac{20}{\pi+4}\text{ metres}}$$

Tornar a l'enunciat

90) PAU 2015 Sèrie 4 Qüestió 2:

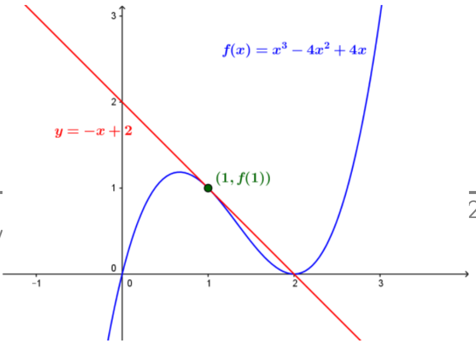
Sigui la funció $f(x)=x^3-4x^2+4x$.

a)Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=1$.

L'equació de la recta tangent a una corba $f(x)$ en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$$f(x)=x^3-4x^2+4x\to f'(x)=3x^2-8x+4$$

$$f(1)=1^3-4\cdot 1^2+4\cdot 1=1-4+4=1$$



$f'(1)=3\cdot 1^2-8\cdot 1+4=3-8+4=-1$

Per tant, la recta buscada serà $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ que en el nostre cas dóna:

$y-1=-1(x-1)\rightarrow y-1=-x+1\rightarrow \boxed{y=-x+2}$

En la figura de la part dreta s'han representat els elements del problema.

b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.

Per trobar els màxims i mínims relatius s'ha de igualar a zero la primera derivada. Per trobar els punts d'inflexió s'ha de igualar a zero la segona derivada. Així tenim:

- **Màxims i mínims relatius:**

$$f'(x)=0\rightarrow 3x^2-8x+4=0\rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ x=2 \end{cases}$$

Hem de considerar els intervals separats per aquest punts més els punts on la funció deixa de ser derivable però en aquest cas no hi ha cap perquè f és un polinomi i per tant derivable en tot $\mathbb{R}$. Per tant:

Interval	$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	↗	**M**	↘	**m**	↗

Així la funció té un màxim relatiu en $x=\dfrac{2}{3}$ i un mínim relatiu en $x=2$.

- **Punts d'inflexió:**

$f'(x)=3x^2-8x+4\rightarrow f''(x)=6x-8$

$$f''(x)=0\rightarrow 6x-8=0\rightarrow 6x=8\rightarrow x=\frac{8}{6}\rightarrow x=\frac{4}{3}$$

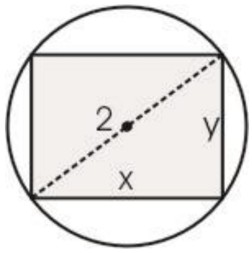
Interval	$\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
Curvatura de $f(x)$	∩	I	∪

Tornar a l'enunciat

91) PAU 2015 Sèrie 5 Qüestió 5:
Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.
a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió $S(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$.

$$x^2+y^2=2^2 \rightarrow x^2+y^2=4 \rightarrow y^2=4-x^2 \rightarrow y=+\sqrt{4-x^2}$$

$$S=Base\cdot Altura=x\cdot y=x\sqrt{4-x^2}=\boxed{\boxed{\sqrt{4x^2-x^4}}}$$



b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

Per calcular la superfície màxima hem de derivar i igualar la derivada a zero.
La funció a maximitzar és: $S(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ $x\in[0,2]$

$$S(x)=\sqrt{4x^2-x^4}\rightarrow S(x)=\left(4x^2-x^4\right)^{\frac{1}{2}}\rightarrow S'(x)=\frac{1}{2}\left(4x^2-x^4\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(8x-4x^3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(4x^2-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(8x-4x^3\right)=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=\frac{\cancel{2}\cdot\left(4x-2x^3\right)}{\cancel{2}\sqrt{4x^2-x^4}}=\frac{4x-2x^3}{\sqrt{4x^2-x^4}}$$

$$S'(x)=0\rightarrow\frac{4x-2x^3}{\sqrt{4x^2-x^4}}=0\rightarrow 4x-2x^3=0\rightarrow 2x\cdot\left(2-x^2\right)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}2x=0\rightarrow x=0\\ 2-x^2=0\rightarrow x^2=2\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\xrightarrow{x>0}x=+\sqrt{2}\end{cases}$$

Per tant les dues úniques solucions que tenen sentit físic són $x=0$ i $x=+\sqrt{2}$
$S(0)=0$, per tant $x=0$ correspondria a un mínim. De fet, quan la x és zero el que tenim no és un rectangle sinó un segment vertical de longitud 2.
Per saber si $x=\sqrt{2}$ és un màxim o un mínim relatiu podem o bé trobar el signe de la segona derivada en aquest punt que resultarà difícil perquè $S'(x)$ és una funció complicada o també podem estudiar el signe de la primera derivada en un entorn del punt $x=\sqrt{2}$. Ens inclinarem per aquesta segona opció.

Interval	$\left[0, \sqrt{2}\right)$	$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2}, 2\right]$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonia de $f(x)$	↗	**M**	↘

Obtenim que en el punt $x=\sqrt{2}$ la funció passa de creixent a decreixent i per tant en aquest punt hi ha un màxim relatiu.

$$y=\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$$

Per tant, el rectangle de superfície màxima és el quadrat de costat $x=y=\sqrt{2}$ i la superfície màxima serà:

$$S(x)=\sqrt{4x^2-x^4}\rightarrow S\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{4\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^4}=\sqrt{4\cdot 2-4}=\sqrt{8-4}=\sqrt{4}=\boxed{2}$$

Tornar a l'enunciat

92) PAU 2016 Sèrie 3 Qüestió 3:
Sigui la funció $f(x)=x\cdot e^{x-1}$.
a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x=1$.

L'equació de la recta tangent a una corba $f(x)$ en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

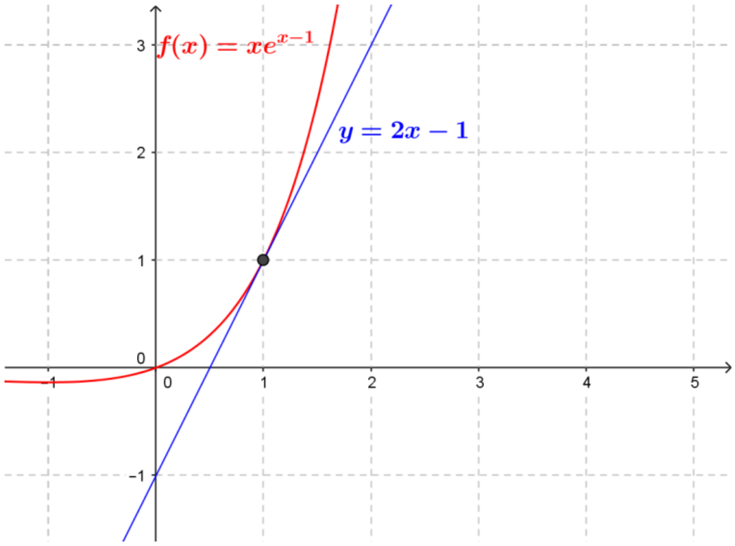
$$f(x)=x\cdot e^{x-1}\rightarrow f'(x)=1\cdot e^{x-1}+x\cdot e^{x-1}\cdot 1=e^{x-1}+x\cdot e^{x-1}=(1+x)e^{x-1}$$

$$f(x)=x\cdot e^{x-1}\rightarrow f(1)=1\cdot e^{1-1}=1\cdot e^{0}=1\cdot 1=1$$
$$f'(x)=(1+x)e^{x-1}\rightarrow f'(1)=(1+1)\cdot e^{1-1}=2\cdot e^{0}=2\cdot 1=2$$

Aleshores la recta tangent serà:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\rightarrow y-1=2(x-1)\rightarrow y-1=2x-2\rightarrow \boxed{y=2x-1}$$

En el següent dibuix hem representat la funció i la recta tangent en el punt $x=1$.



b) Determineu en quins intervals la funció f és creixent i en quins intervals és decreixent.

Per estudiar el creixement i el decreixement de la funció hem d'estudiar el signe de la seva derivada.

$$f'(x) = (1+x)e^{x-1}$$

$$f'(x) = 0 \to (1+x)e^{x-1} = 0 \to \begin{cases} 1+x=0 \to x=-1 \\ e^{x-1}=0 \to \ln e^{x-1} = \ln 0 \to x-1 = \ln 0 \to \# \end{cases}$$

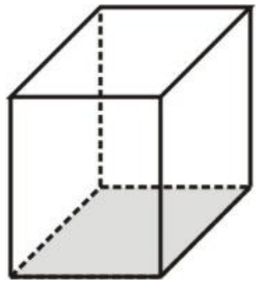
Per tant, l'únic punt on s'anul·la la derivada és el punt $x=-1$. Aleshores fem la taula de signe de la derivada notant que el domini de la funció és tot $\mathbb{R}$.

Interval	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\searrow$	**m**	$\nearrow$

Hem obtingut que la funció és decreixent en l'interval $(-\infty, -1)$, creixent en l'interval $(-1, +\infty)$ i en el punt $x=-1$ té un mínim relatiu que també és absolut.

Tornar a l'enunciat

93) PAU 2016 Sèrie 1 Qüestió 5:
Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3. Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2, però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.
a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2{,}5x^2 + \dfrac{320}{x}$.



Sigui x el costat de la base en cm tal i com diu el problema i sigui h l'altura en cm de l'embàs.
Aleshores el volum del prisma serà: $V = x^2 \cdot h$.
Com l'enunciat ens diu que aquest volum ha de ser igual a 80 cm^3 aleshores tenim:

$$V = 80 \rightarrow x^2 \cdot h = 80 \rightarrow h = \frac{80}{x^2}.$$

Finalment calculem el preu de construir l'embàs:

- Preu de la tapa: $1 \cdot x^2 = x^2$
- Preu de les quatre cares laterals: $1 \cdot 4 \cdot x \cdot h = 4xh = 4x \cdot \dfrac{80}{x^2} = \dfrac{320}{x}$
- Preu de la base: $1{,}5 \cdot x^2$

Preu total: $P(x) = x^2 + \dfrac{320}{x} + 1{,}5x^2 \rightarrow \boxed{P(x) = 2{,}5x^2 + \dfrac{320}{x}}$

b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

Per trobar el mínim de la funció $P(x)$ l'hem de derivar i igualar a zero.

$$P(x) = 2{,}5x^2 + \frac{320}{x} \rightarrow P'(x) = 5x + \frac{0 \cdot x - 320 \cdot 1}{x^2} = 5x - \frac{320}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{5x^3 - 320}{x^2} = 0 \rightarrow 5x^3 - 320 = 0 \rightarrow 5x^3 = 320 \rightarrow x^3 = \frac{320}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} \rightarrow x = 4$$

Per tant, l'embàs ha de ser un prisma regular de base $\boxed{x = 4cm}$ i altura $h = \dfrac{80}{x^2} = \dfrac{80}{4^2} = \dfrac{80}{16} = 5\ cm \rightarrow \boxed{h = 5\ cm}$

NOTEU que el problema no demana demostrar que realment es tracta d'un mínim per tant no ho fem.

Tornar a l'enunciat

94) PAU 2016 Sèrie 1 Qüestió 4: (Incompleta)
Sigui la funció $f(x)=\sin(x)$.
a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a la funció f en els punts d'abscissa $x=0$ i $x=\pi$, respectivament. Trobeu les coordenades del punt en què es tallen les dues rectes.

L'equació de la recta tangent a una corba $f(x)$ en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En el nostre cas $f(0)=\sin(0)=0$, $f(\pi)=\sin(\pi)=0$

$f(x)=\sin(x)\rightarrow f'(x)=\cos(x)\rightarrow f'(0)=\cos(0)=1$ i $f'(\pi)=\cos(\pi)=-1$

Per tant, les rectes seran:
- Recta tangent en $x=0$:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\rightarrow y-0=1(x-0)\rightarrow \boxed{\boxed{y=x}}$$

- Recta tangent en $x=\pi$:

$$y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)\rightarrow y-0=-1(x-\pi)\rightarrow \boxed{\boxed{y=-x+\pi}}$$

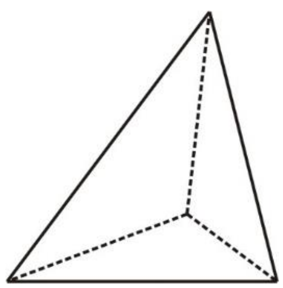
El punt on es tallen les dues rectes serà la solució del sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} y=x \\ y=-x+\pi \end{cases}\rightarrow x=-x+\pi\rightarrow 2x=\pi\rightarrow x=\tfrac{\pi}{2}\xrightarrow{y=x} y=\tfrac{\pi}{2}\rightarrow \boxed{\boxed{(x,y)=\left(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)}}$$

Tornar a l'enunciat

95) PAU 2016 Sèrie 3 Qüestió 5:
Considereu el tetraedre que té per vèrtexs els punts $A=(x,0,1)$, $B=(0,x,1)$, $C=(3,0,0)$ i $D=(0,x,0)$, amb $0<x<3$.
a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió $V(x)=\frac{1}{6}\left(-x^2+3x\right)$.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,x,1)-(x,0,1)=(-x,x,0)$$
$$\overrightarrow{AC}=C-A=(3,0,0)-(x,0,1)=(3-x,0,-1)$$
$$\overrightarrow{AD}=D-A=(0,x,0)-(x,0,1)=(-x,x,-1)$$



$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-x & 3-x & -x\\ x & 0 & x\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}-1 & 3-x & -x\\ 1 & 0 & x\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=$$
$$=x\cdot(x-x+3-x)=x\cdot(3-x)$$

Per tant:

$$V(x)=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|x\cdot(3-x)\right|=\frac{1}{6}\left|x\cdot(3-x)\right|\overset{0<x<3}{=}\frac{1}{6}x\cdot(3-x)=\boxed{\boxed{\frac{1}{6}\left(-x^2+3x\right)}}$$

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.
NOTA: Podeu calcular el volum del tetraedre de vèrtexs A, B, C i D amb l'expressió $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$.

Per poder trobar el màxim d'una funció hem de derivar-la i igualar a zero la seva funció derivada. En el nostre cas:

$$V(x)=\frac{1}{6}\left(-x^2+3x\right)\rightarrow V'(x)=\frac{1}{6}(-2x+3)$$

$$V'(x)=0\rightarrow\frac{1}{6}(-2x+3)=0\rightarrow -2x+3=0\rightarrow 2x=3\rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$V'(x)=\frac{1}{6}(-2x+3)\rightarrow V''(x)=\frac{1}{6}\cdot(-2)=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}<0\rightarrow V''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-1}{3}<0\rightarrow x=\frac{3}{2}$ és un màxim.

Donat que el volum màxim s'assoleix en el punt $x=\frac{3}{2}$ aquest volum serà:

$V\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6}\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{6}\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{6}\left(-\frac{9}{4}+\frac{18}{4}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{24}=\boxed{\boxed{\frac{3}{8}}}$ unitats cúbiques

Tornar a l'enunciat

96) PAU 2016 Sèrie 5 Qüestió 3:
Responeu a les qüestions següents:
a) Calculeu els màxims relatius, mínims relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x)=2x^3-9x^2+12x-4$.

Per a calcular els màxims i mínims relatius i els punts d'inflexió hem d'estudiar els punts on s'anul·len la 1a i la segona derivada de la funció. Podem observar que com que $f(x)$ és una funció polinòmica, és continua en tot $\mathbb{R}$ i infinitament derivable amb totes les seves derivades continues, per tant, podem descartar qualsevol tipus de problema amb la continuïtat de les derivades.

• Màxims i mínims relatius, monotonia de f:

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-4\rightarrow f'(x)=6x^2-18x+12$$

$$f'(x)=0\rightarrow 6x^2-18x+12=0\xrightarrow{\div 6}x^2-3x+2=0\rightarrow\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$$

Interval	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\nearrow$	**M**	$\searrow$	**m**	$\nearrow$

Per tant, f té un màxim relatiu en $x=1$ i un mínim relatiu en $x=2$.

● **Punts d'inflexió, curvatura de** f **:**

$$f'(x)=6x^2-18x+12 \to f''(x)=12x-18$$

$$f''(x)=0 \to 12x-18=0 \to 12x=18 \to x=\frac{18}{12} \to x=\frac{3}{2}$$

Interval	$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
Curvatura de $f(x)$		I	

De la taula deduïm que f té un únic punt d'inflexió en $x=\dfrac{3}{2}$.

b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb la derivada primera contínua en l'interval $[a,b]$ i satisfà que $f'(a)>0$ i $f'(b)<0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a,b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

El teorema de Bolzano diu que si una funció f és continua en un interval $[a,b]$ i té diferents signes en els extrems de l'interval, aleshores podem assegurar que f té una arrel en l'interval (a,b).

Fixem-nos que en el nostre cas és la funció $f'(x)$ la que compleix les hipòtesis del teorema de Bolzano perquè l'enunciat diu que $f'(x)$ és continua en $[a,b]$ i que $f'(a)>0$ i $f'(b)<0$. Per tant, aplicant el teorema de Bolzano a la funció $f'(x)$ tenim que existeix un punt de l'interval (a,b) on $f'(x)=0$. Però precisament els punts on s'anul·la la derivada d'una funció són els punts on la recta tangent a la funció és horitzontal, per tant, existeix un punt de l'interval (a,b) on la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

Tornar a l'enunciat

97) PAU 2017 Sèrie 1 Qüestió 3:

Sigui la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2-k}$, en què k és un paràmetre real diferent de 0. Per als diferents valors del paràmetre k:

a) Calculeu el domini i les asímptotes de la funció.

● **Domini:**

El domini d'una funció és el conjunt de tots els punts on es pot calcular. En el nostre cas, per tractar-se d'una fracció algèbrica, la funció es podrà calcular sempre excepte quan dividim per zero. Per tant:

Si $k>0$:

$$x^2-k=0 \to x^2=k \to x=\pm\sqrt{k} \to \boxed{D(f)=\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{k}\right\}}$$

Si $k<0$:

$x^2-k=0 \to x^2=k \to x=\pm\sqrt{k} \to$ No té solució $\to \boxed{D(f)=\mathbb{R}}$

● **Asímptotes horitzontals:**

$y=L$ asímptota horitzontal de la funció $f \leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=L$

En el nostre cas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{k}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{k}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0\to$$

La recta $\boxed{y=0}$ **és asímptota horitzontal de la funció** f **.**

● **Asímptotes verticals:**

La recta $x=a$ és asímptota vertical de la funció $f(x)$ si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$.

En el nostre cas això solament pot passar quan dividim entre zero. Per tant, en el cas en que $k<0$ ja hem vist que mai dividirem entre zero perquè l'equació $x^2-k=0$ no té solució per a valors de k ne gatius.

Per tant, si $k<0$ **la funció no té asímptotes verticals.**

En el cas en que $k>0$ tenim que:

$$\lim_{x\to\sqrt{k}} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{k}}\frac{1}{x^2-k}=\lim_{x\to\sqrt{k}}\frac{1}{\left(\sqrt{k}\right)^2-k}=\frac{2}{k-k}=\frac{2}{0}=\infty\to$$ **La recta** $y=\sqrt{k}$ **és asímptota vertical de la funció** f **.**

Anàlogament obtenim que **la recta** $y=-\sqrt{k}$ **també és asímptota vertical de** f .

● **Asímptotes obliqües:**

Si una funció té asímptotes horitzontals per un costat aleshores no en pot tenir d'obliqües pel mateix costat. Per tant, f **no té asímptotes obliqües**.

b) Calculeu els punts amb un màxim o un mínim relatiu.

Per poder calcular els màxims i mínims relatius hem de derivar i igualar a zero la derivada.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-k} \rightarrow f'(x)=\frac{0\cdot\left(x^2-k\right)-1\cdot 2x}{\left(x^2-k\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-k\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow \frac{-2x}{\left(x^2-k\right)^2}=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0 \text{ sempre i quan } k\neq 0$$

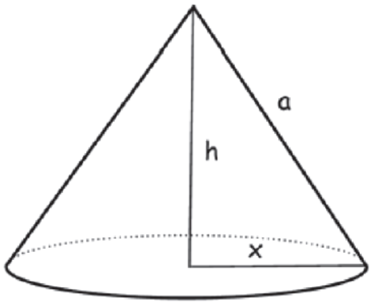
Per tant, si $k\neq 0$ existeix un únic candidat a màxim o mínim relatiu. En aquest cas obtenim que el punt $x=0$ és un màxim relatiu:

Interval	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
Signe de f'	$+$	0	$-$
Monotonia de f	$\nearrow$	**M**	$\searrow$

En el cas $k=0$ la funció quedaria $f(x)=\frac{1}{x^2}$ i en aquest cas la funció derivada seria $f'(x)=\frac{-2}{x^3}$ que no s'anul·la mai i per tant en aquest cas no hi ha màxims ni mínims relatius. Però cal notar que aquest cas el descarta l'enunciat del problema perquè suposa valors de $k\neq 0$.

Tornar a l'enunciat

98) PAU 2017 Sèrie 1 Qüestió 6:
Considereu un con de 120 cm³ de volum que té una altura **h**, un radi de la base **x** i una aresta **a**, com el de la figura següent:



a) Comproveu que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$

El volum del con és un terç de la superfície de la base per l'altura. És a dir:
$V = \frac{1}{3}\pi x^2 h$

Si el volum del con és de 120 cm³ tenim que: $V = 120 \rightarrow \frac{1}{3}\pi x^2 h = 120 \rightarrow \pi x^2 h = 360$

Aïllant x^2 de l'expressió anterior tenim que: $\pi x^2 h = 360 \rightarrow x^2 = \frac{360}{\pi h}$

Aplicant el teorema de Pitàgores tenim que: $a^2 = x^2 + h^2 = \frac{360}{\pi h} + h^2$ com demanava l'enunciat.

b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.
NOTA: Recordeu que el volum del con és un terç del volum del cilindre recte que té la mateixa base i la mateixa altura que el con.

Per minimitzar la longitud de l'aresta a hem de derivar la seva expressió i igualar-la a zero.
Podem observar que és equivalent minimitzar la longitud de l'aresta a que minimitzar el seu quadrat a^2 que té una expressió més fàcil perquè ens evitem l'arrel. Minimitzarem per tant la funció a^2 que com podem comprovar és una funció que depèn de la variable h.

És a dir, treballem amb la funció $f(h) = a^2(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$

Derivant tenim que $f'(h) = \frac{360}{\pi} \cdot \left(\frac{-1}{h^2}\right) + 2h$

Igualant a zero:

$$f'(h) = 0 \rightarrow \frac{360}{\pi} \cdot \left(\frac{-1}{h^2}\right) + 2h = 0 \rightarrow 2h = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2} \rightarrow 2h^3 = \frac{360}{\pi} \rightarrow h^3 = \frac{360}{2\pi} \rightarrow$$

$$\rightarrow h^3 = \frac{180}{\pi} \rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}}$$

Es pot comprovar que es tracta d'un mínim ja que $f'(x) < 0$ quan $x \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}\right)$ i $f'(x) > 0$ quan $x \in \left(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}, +\infty\right)$.

Tornar a l'enunciat

99) PAU 2017 Sèrie 2 Qüestió 4:
De les funcions $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ i $g'(x)$, en coneixem els valors següents:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	1
1	0	–6

x	$g(x)$	$g'(x)$
0	1	1
1	3	3

a) De la funció $f(x)$ sabem també que el pendent de la recta tangent a un punt d'abscissa x és $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Trobeu $f(x)$.

Sabem que la derivada d'una funció en un punt coincideix amb el pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt. Per tant, si el pendent de la recta tangent a la funció f en el punt d'abscissa x és $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$ podem assegurar que $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$.

Per tant, $f = \int (4x^3 - 9x^2 - 2x + 1) dx = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + C$

De la primera taula tenim que $f(0) = 2$, per tant:

$$f(0) = 2 \rightarrow 0^4 - 3 \cdot 0^3 - 0^2 + 0 + C = 2 \rightarrow C = 2 \rightarrow \boxed{f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 2}$$

b) Calculeu $(g \circ f)'(1)$.

Aplicant la regla de la cadena tenim que $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Que en el cas de l'abscissa $x = 1$ quedarà:

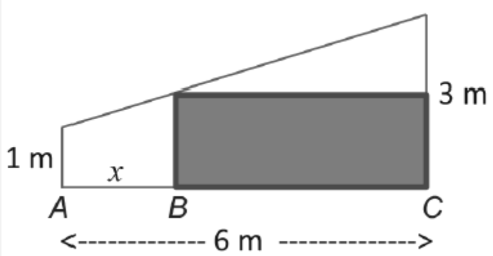
$$(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) =$$

Substituint pels valors corresponents que ens donen les taules de valors dels enunciats tenim:

$$= g'(0) \cdot (-6) = 1 \cdot (-6) = \boxed{-6}$$

Tornar a l'enunciat

100) PAU 2017 Sèrie 5 Qüestió 6:
El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la zona ombrejada.



a) Expresseu l'àrea del rectangle en funció de la longitud x del segment AB.

L'àrea del rectangle serà base per altura.

Si anomenem x a la distància **AB** és obvi que la base de l'armari **BC** mesura $6-x$.

Podem observar que l'habitació en un costat fa 1 metre d'alt mentre que en l'altre costat fa 3 metres. És a dir, la teulada puja 2 metres.

Pel teorema de Tales, si en 6 metres de base la teulada puja 2, en x metres de base en pujarà...

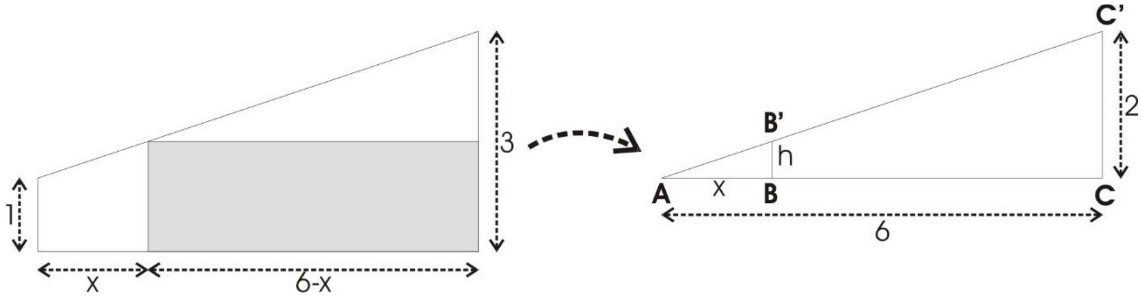
$$\begin{cases} 6m --- 2m \\ xm --- \; h \end{cases} \rightarrow 6h = 2x \rightarrow h = \frac{2}{6}x \rightarrow h = \frac{x}{3}.$$

Per tant l'altura de l'armari serà $1+\frac{x}{3}$.

Finalment l'àrea de l'armari resulta:

$$A = Base \ x \ Altura = (6-x)\cdot\left(1+\frac{x}{3}\right) = 6+2x-x-\frac{x^2}{3} = 6+x-\frac{x^2}{3} \rightarrow \boxed{A(x) = 6+x-\frac{x^2}{3}}$$

Per si no ha quedat clar el càlcul de l'altura de l'armari l'acompanyem del següent dibuix:



Si pugem el terra de l'habitació un metre, de manera que l'habitació tingui 0 metres d'alçada en un costat i 2 metres en l'altre obtenim el triangle ACC'.
Podem observar que els triangles ACC' i ABB' estan en posició de Tales i per tant són semblants.
Aleshores, pel teorema de tales tenim que $\frac{2}{6} = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{2x}{6} = h \rightarrow h = \frac{x}{3}$.

b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.

• Per trobar l'àrea màxima derivem i igualem a zero.

$$A(x)=6+x-\frac{x^2}{3}\rightarrow A'(x)=1-\frac{2x}{3}$$

$$A'(x)=0\rightarrow 1-\frac{2x}{3}=0\rightarrow 1=\frac{2x}{3}\rightarrow 3=2x\rightarrow x=\frac{3}{2}=1{,}5\ metres$$

• Comprovem que efectivament $x=\frac{3}{2}$ es tracta d'un màxim relatiu:

$A'(x)=1-\frac{2x}{3}\rightarrow A''(x)=-\frac{2}{3}\rightarrow A''\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{3}<0\rightarrow A(x)$ és còncava en $x=\frac{3}{2}$ i per tant es tracta d'un màxim relatiu.

• Les dimensions de l'armari seran:

Base: $6-\frac{3}{2}=\frac{12-3}{2}=\frac{9}{2}=\boxed{4{,}5m}$ Altura: $1+\frac{x}{3}=1+\frac{\frac{3}{2}}{3}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=\boxed{1{,}5m}$

• La superfície màxima serà:

Podem calcular l'àrea de l'armari multiplicant la base i l'altura anteriors, és a dir:

$$A=\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}=\boxed{\frac{27}{4}u^2}$$

O també substituint $x=\frac{3}{2}$ en l'expressió de $A(x)$:

$$A(x)=6+x-\frac{x^2}{3}\rightarrow A\left(\tfrac{3}{2}\right)=6+\tfrac{3}{2}-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3}=6+\tfrac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}}{3}=6+\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{4}=\frac{24+6-3}{4}=\boxed{\frac{27}{4}u^2}$$

Tornar a l'enunciat

101) PAU 2018 Sèrie 1 Qüestió 3:

Sigui la funció $f(x)=x^3-x^2$.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica i que és paral·lela a la recta d'equació $x+3y=0$.

Dues rectes en el pla són paral·leles si tenen la mateixa pendent.

$x+3y=0\rightarrow 3y=-x\rightarrow y=\frac{-x}{3}\rightarrow$ La recta $x+3y=0$ té pendent $\frac{-1}{3}$.

Per tant, si busquem una recta paral·lela a l'anterior, també haurà de tenir pendent igual a $\frac{-1}{3}$.

Però la pendent de la recta tangent a la gràfica d'una funció en un punt coincideix amb el valor de la derivada de la funció en el punt, per tant, hem de buscar els punts on la derivada val $\frac{-1}{3}$.

$$f(x)=x^3-x^2 \rightarrow f'(x)=3x^2-2x$$

$$f'(x)=\frac{-1}{3} \rightarrow 3x^2-2x=\frac{-1}{3} \xrightarrow{x3} 9x^2-6x=-1 \rightarrow 9x^2-6x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{3}$$

Per tant hem de calcular l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^3-x^2$ en el punt $x=\frac{1}{3}$.

Però l'equació de la recta tangent a una funció f en el punt $x=a$ és: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En el nostre cas com que $x=\frac{1}{3}$ obtindrem: $y-f\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

$$f(x)=x^3-x^2 \rightarrow f\left(\tfrac{1}{3}\right)=\left(\tfrac{1}{3}\right)^3-\left(\tfrac{1}{3}\right)^2=\tfrac{1}{27}-\tfrac{1}{9}=\tfrac{1}{27}-\tfrac{3}{27}=\tfrac{-2}{27}$$

$$f'(x)=3x^2-2x \rightarrow f'\left(\tfrac{1}{3}\right)=3\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^2-2\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)=3\cdot\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}=\tfrac{-1}{3}$$

$$y-f\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) \rightarrow y-\left(\frac{-2}{27}\right)=\frac{-1}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right) \rightarrow y+\frac{2}{27}=\frac{-x}{3}+\frac{1}{9} \rightarrow$$

$$\rightarrow y=\frac{-x}{3}+\frac{1}{9}-\frac{2}{27} \rightarrow \boxed{y=\frac{-x}{3}+\frac{1}{27}}$$

b) Calculeu, si n'hi ha, els punts de la gràfica en què la funció presenta un màxim o mínim relatiu o un punt d'inflexió.

Estudiarem els màxims i mínims relatius amb el signe de la primera derivada i els punts d'inflexió amb el signe de la segona. Obtenim els següents resultats:

- **Màxims i mínims relatius:**

$$f(x)=x^3-x^2 \rightarrow f'(x)=3x^2-2x$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 3x^2-2x=0 \rightarrow x\cdot(3x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x-2=0 \rightarrow 3x=2 \rightarrow x=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Interval	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	↗	**M**	↘	**m**	↗

Per tant f té un màxim relatiu en el punt $\left(0,\ f\left(0\right)\right)$ perquè passa de creixent a decreixent i un mínim relatiu en el punt $\left(\frac{2}{3},\ f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ perquè en aquest punt passa de decreixent a creixent.

● **Punts d'inflexió:**

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \rightarrow f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow 6x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{6} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Interval	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
Curvatura de $f(x)$		I	

Tornar a l'enunciat

102) PAU 2018 Sèrie 1 Qüestió 5: (Incompleta)
Sigui la funció $f(x)=\sqrt{x}+x-2$.
a) Comproveu que la funció $f(x)$ compleix l'enunciat del teorema de Bolzano a l'interval $[0,\,2]$ i que, per tant, l'equació $f(x)=0$ té alguna solució a l'interval $(0,2)$. Comproveu que $x=1$ és una solució de l'equació $f(x)=0$ i raoneu, tenint en compte el signe de $f'(x)$, que la solució és única.

● Noteu que el domini de $f(x)$ és $[0,+\infty)$ perquè solament podem calcular arrels quadrades de nombres positius. Aleshores f és continua en tot el seu domini, per tant és continua en l'interval $[0,2]$. $f(0)=-2<0$ i $f(2)=\sqrt{2}>0$, per tant, f compleix les hipòtesis del teorema de Bolzano en l'interval $[0,\,2]$ i podem assegurar que té una arrel en l'interval $(0,2)$, és a dir, l'equació $f(x)=0$ té una solució en l'interval $(0,2)$.

● Comprovem que $x=1$ és solució de l'equació $f(x)=0$:
$f(x)=\sqrt{x}+x-2 \rightarrow f(1)=\sqrt{1}+1-2=1+1-2=0 \rightarrow x=1$ és solució de $f(x)=0$.

● Demostrem la unicitat de la solució mitjançant el signe de la derivada:
$f(x)=\sqrt{x}+x-2 \rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x-2 \rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+1=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1>0$ per a tot x de l'interval $[0,2]$.
Per tant, com que la derivada és estrictament positiva en tot l'interval, la funció f és estrictament creixent en aquest interval i per tant no pot tenir dues arrels en l'interval i la solució $x=1$ és única.

[Tornar a l'enunciat]

103) PAU 2018 Sèrie 3 Qüestió 1:
Considereu la funció polinòmica $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$.
a) Calculeu els valors dels paràmetres a, b i c, sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x=0$ és la recta $y=x+3$.

Si f té un extrem relatiu en el punt $x=1$ aleshores la derivada en aquest punt serà nul·la. És a dir, $f'(1)=0$.

En el nostre cas, $f(x)=x^3-ax^2+bx+c \rightarrow f'(x)=3x^2-2ax+b$
$f'(1)=0 \rightarrow 3\cdot 1^2-2a\cdot 1+b=0 \rightarrow 3-2a+b=0 \rightarrow \boxed{-2a+b=-3}$

Com que la recta $y=x+3$ és tangent a la funció f en el punt $x=0$, en aquest punt la recta i la funció han de coincidir en "alçada", passant pel mateix punt i en derivada. És a dir: $\begin{cases} f(0)=y(0) \\ f'(0)=y'(0) \end{cases}$

$$f(0)=y(0)\rightarrow 0^3-a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0+3\rightarrow \boxed{c=3}$$

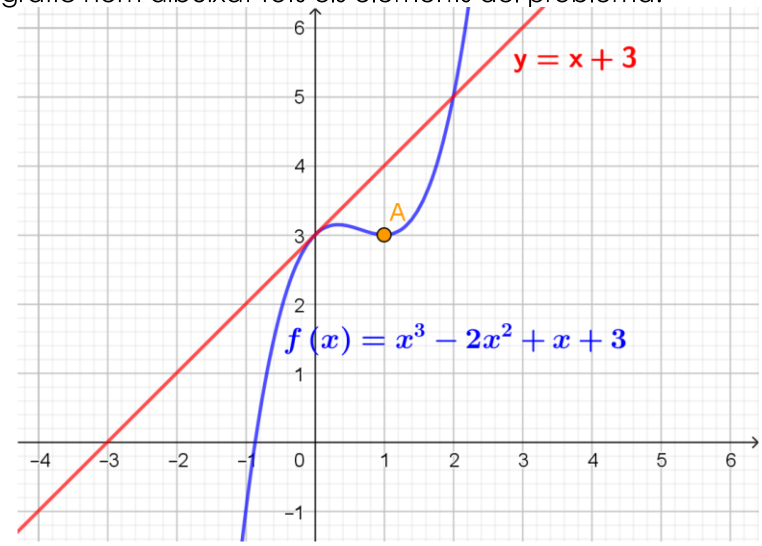
$$y(x)=x+3\rightarrow y'(x)=1$$

$$f'(x)=3x^2-2ax+b \text{ i } y'(x)=1.\ f'(0)=y'(0)\rightarrow 3\cdot 0^2-2a\cdot 0+b=1\rightarrow \boxed{b=1}$$

Per tant les 3 condicions ens porten a que $c=3$, $b=1$ i $-2a+b=-3$. Substituint en esta última expressió obtenim que: $-2a+b=-3\xrightarrow{b=1}-2a+1=-3\rightarrow -2a=-4\rightarrow a=2$

Per tant la solució és: $\boxed{a=2,\ b=1 \text{ i } c=3}$.

En el següent gràfic hem dibuixat tots els elements del problema:



b) Per als valors $a=2$, $b=1$ i $c=3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los.

Pels valors $a=2$, $b=1$ i $c=3$ que casualment coincideixen amb la solució de l'apartat anterior, la funció queda: $f(x)=x^3-2x^2+x+3$.

Per classificar els extrems de la funció hem de derivar i igualar a zero la derivada.

$$f(x)=x^3-2x^2+x+3\rightarrow f'(x)=3x^2-4x+1$$

$$f'(x)=0\rightarrow 3x^2-4x+1=0\rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Per tant els candidats a extrems relatius són $x=1$ i $x=\frac{1}{3}$. Estudiant el signe de $f'(x)$ sabrem si són màxims o mínims relatius.

Interval	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$

Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de $f(x)$	$\nearrow$	**M**	$\searrow$	**m**	$\nearrow$

Per tant la funció té un màxim relatiu en $x=\frac{1}{3}$ i un mínim relatiu en $x=1$.

Com que els valors de a, b i c són els de l'apartat anterior, ja la tenim representada gràficament.

NOTA: També podríem saber la naturalesa dels punts $x=\frac{1}{3}$ i $x=1$ avaluant la segona derivada. En aquest cas obtindríem que: $f'(x)=3x^2-4x+1 \to f''(x)=6x-4 \to$

$$\to \begin{cases} f''\left(\frac{1}{3}\right)=6\cdot\frac{1}{3}-4=2-4=-2<0 \to \text{Màxim relatiu} \\ f''(1)=6\cdot 1-4=6-4=2>0 \to \text{Mínim relatiu} \end{cases}$$

Tornar a l'enunciat

104) PAU 2018 Sèrie 5 Qüestió 3:

Sigui la funció $f(x)=a\cdot e^{-x^2+bx}$, amb $a\neq 0$ i $b\neq 0$.

a) Calculeu els valors de a i de b que fan que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(1,e)$.

Si f té un extrem relatiu en $(1,e)$ sabem que la derivada s'anul·larà en $x=1$ i que la funció passa pel punt $(1,e)$, és a dir, que $f(1)=e$.

$$f(x)=a\cdot e^{-x^2+bx} \to f'(x)=a\cdot\left(e^{-x^2+bx}\right)\cdot(-2x+b)$$

$$f'(1)=0 \to a\cdot\left(e^{-1^2+b\cdot 1}\right)\cdot(-2\cdot 1+b)=0 \xrightarrow[a\neq 0]{e^x\neq 0} -2+b=0 \to \boxed{b=2}$$

Per tant ja sabem que $f(x)=a\cdot e^{-x^2+2x}$ perquè $b=2$.

f passa pel punt $(1,e) \to f(1)=e \to a\cdot e^{-1^2+2\cdot 1}=e \to a\cdot e^{-1+2}=e \to a\cdot e^1=e \to$

$$\to a\cdot e=e \to \boxed{a=1}$$

b) Per al cas $a=3$ i $b=5$, calculeu l'asímptota horitzontal de la funció f quan x tendeix a $+\infty$.

En aquest cas la funció és $f(x)=3\cdot e^{-x^2+5x}$

Per saber l'asímptota horitzontal de f quan x tendeix a $+\infty$ hem de calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3e^{-x^2+5x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3e^{x^2\cdot\left(-1+\frac{5}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3e^{x^2\cdot(-1+0)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(3e^{x^2\cdot(-1)}\right)=$$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(3e^{-x^2}\right) \overset{e^{-x}=\frac{1}{e^x}}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(3\cdot\frac{1}{e^{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{e^{x^2}}\right) = \frac{3}{e^{\infty}} = \frac{3}{\infty} = 0 \rightarrow$ La recta $\boxed{y=0}$ és asímptota horitzontal de la funció.

Tornar a l'enunciat

105) PAU 2018 Sèrie 5 Qüestió 4:
Sabem que una funció $f(x)$ està definida per a tots els nombres reals i que és derivable dues vegades. Sabem que té un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x=2$, que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en aquest punt és $y=-124x+249$ i que $f(-3)=-4$.
a) Calculeu $f''(2)$ $f'(2)$ i $f(2)$.

Si f té un punt d'inflexió en $x=2$ aleshores la segona derivada s'anul·la en aquest punt, per tant, $f''(2)=0$.
En el punt on dues funcions o una funció i una recta són tangents han de coincidir en "alçada" i també amb pendent. Per tant si l'equació de la recta tangent a f en el punt $x=2$ és $y=-124x+249$, en $x=2$ es donarà que $f(2)=y(2)$ i que $f'(2)=y'(2)$.
Noteu que si $y(x)=-124x+249$ aleshores $y'(x)=-124$ i $y'(2)=-124$

$$\begin{cases} f(2)=y(2) \\ f'(2)=y'(2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2)=-124\cdot 2+249 \\ f'(2)=-124 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2)=1 \\ f'(2)=-124 \end{cases}$$

Per tant, $\boxed{f(2)=1}$, $\boxed{f'(2)=-124}$ i $\boxed{f''(2)=0}$.

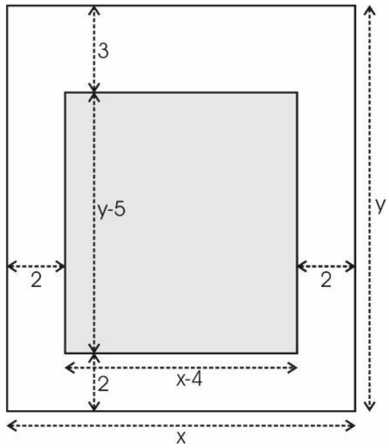
b) Calculeu $\int_{-3}^{2} f'(x)\,dx$.

Aplicant la regla de Barrow :

$$\int_{-3}^{2} f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_{-3}^{2} = f(2)-f(-3) = 1-(-4) = 1+4 = \boxed{5}$$

Tornar a l'enunciat

106) PAU 2019 Sèrie 1 Qüestió 1:
Les pàgines d'un llibre han de tenir cada una 600 cm² de superfície, amb uns marges al voltant del text de 2 cm a la part inferior, 3 cm a la part superior i 2 cm a cada costat. Calculeu les dimensions de la pàgina que permeten la superfície impresa més gran possible.



Suposem que la pàgina fa x centímetres d'amplada per y d'alçada. En aquest cas la superfície de la pàgina seria $x \cdot y = 600$.

Calculem ara les dimensions i la superfície de l'àrea impresa.

Amb l'ajuda del dibuix podem observar que l'àrea impresa tindrà $x-2-2$ és a dir, $x-4$ centímetres d'amplada i $y-3-2$, és a dir. $y-5$ centímetres d'alçada amb una àrea de $(x-4)\cdot(y-5)$.

Per tant hem de maximitzar la funció àrea de la part impresa $f=(x-4)\cdot(y-5)$ subjecta a la restricció de que l'àrea de la pàgina és $x \cdot y = 600$.

Com ens hem de quedar amb una funció d'una variable, aïllem y de l'expressió $x\cdot y = 600 \rightarrow y = \dfrac{600}{x}$ i substituïm en l'expressió de f obtenint:

$$f=(x-4)\cdot(y-5) \xrightarrow{y=\frac{600}{x}} f(x)=(x-4)\cdot\left(\tfrac{600}{x}-5\right)=600-5x-\tfrac{2400}{x}+20 \rightarrow$$
$$\rightarrow f(x)=620-5x-\tfrac{2400}{x}$$

Una vegada trobada la funció, per maximitzar-la derivem i igualem la derivada a zero.

$$f(x)=620-5x-\tfrac{2400}{x} \rightarrow f'(x)=-5+\tfrac{2400}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -5+\tfrac{2400}{x^2}=0 \rightarrow \tfrac{2400}{x^2}=5 \rightarrow 2400=5x^2 \rightarrow x^2=\tfrac{2400}{5} \rightarrow x^2=480 \rightarrow$$
$$\rightarrow x=\sqrt{480} \rightarrow x=4\sqrt{30}$$
$$y=\frac{600}{x}=\frac{600}{4\sqrt{30}}=\frac{150}{\sqrt{30}}=\frac{150\sqrt{30}}{30}=5\sqrt{30}$$

Per tant les dimensions de la pàgina que maximitzen l'àrea impresa són $x=4\sqrt{30}$ cm d'ample i $y=5\sqrt{30}$ cm d'alt.

Per comprovar que $x=4\sqrt{30}$ realment es un màxim de la funció $f(x)=620-5x-\tfrac{2400}{x}$ tenim dues opcions: Comprovar que la segona derivada en $x=4\sqrt{30}$ és negativa o estudiar el signe de $f'(x)$ al voltant del punt $x=4\sqrt{30}$ i comprovar que $f'(x)$ passa de positiva a negativa.

• Si ens inclinem pel primer mètode tindríem:

$$f'(x)=-5+\tfrac{2400}{x^2}\rightarrow f'(x)=-5+2400x^{-2}\rightarrow f''(x)=0-4800x^{-3}=\frac{-4800}{x^3}\rightarrow$$

$$\rightarrow f''\left(4\sqrt{30}\right)=\frac{-4800}{\left(4\sqrt{30}\right)^3}<0\rightarrow x=4\sqrt{30}$$ és un màxim relatiu.

• Si ens inclinem pel segon mètode tindríem:

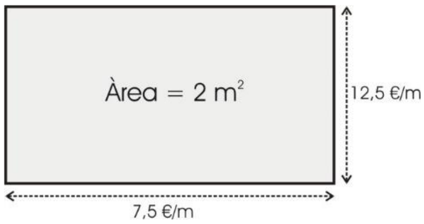
$f'(x)=-5+\tfrac{2400}{x^2}$ i l'equació $f'(x)=0$ solament té la solució $x=4\sqrt{30}\simeq 21{,}9$

Agafem un punt a l'esquerra i un a la dreta de $x=4\sqrt{30}$ i estudiem el signe de $f'(x)$.
En aquest cas obtindríem:

Interval	$\left(0,\ 4\sqrt{30}\right)$	$4\sqrt{30}$	$\left(4\sqrt{30},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Monotonia de $f(x)$	↗	**M**	↘

Tornar a l'enunciat

107) PAU 2019 Sèrie 4 Qüestió 1:
Volem construir un marc rectangular de fusta que delimiti una àrea de 2 m². Sabem que el preu de la fusta és de 7,5 €/m per als costats horitzontals i de 12,5€/m per als costats verticals. Determineu les dimensions que ha de tenir el rectangle perquè el cost total del marc sigui el mínim possible. Quin és aquest cost mínim?



En la figura de la part dreta tenim representada la situació.
Sigui **x** la llargada del marc i **y** l'altura.
Resulta evident que la funció cost del marc serà:

$$f(x,y)=7{,}5x+12{,}5y+7{,}5x+12{,}5y=15x+25y$$

que haurem de minimitzar sotmesa a que l'àrea del marc és 2, és a dir $x\cdot y=2\rightarrow y=\tfrac{2}{x}$

$$f(x,y)=15x+25y\xrightarrow{y=\frac{2}{x}}f(x)=15x+25\cdot\tfrac{2}{x}\rightarrow f(x)=15x+\frac{50}{x}$$

Per minimitzar la funció hem de derivar i igualar la derivada a zero.

$$f(x)=15x+\frac{50}{x}\rightarrow f(x)=15x+50x^{-1}\rightarrow f'(x)=15+50\cdot(-1)x^{-2}=15-\frac{50}{x^2}$$

$$f'(x)=0\rightarrow 15-\frac{50}{x^2}=0\rightarrow 15=\frac{50}{x^2}\rightarrow 15x^2=50\rightarrow x^2=\frac{50}{15}\rightarrow x^2=\frac{10}{3}\rightarrow$$

$$\rightarrow x=\sqrt{\frac{10}{3}}\rightarrow x=\frac{\sqrt{30}}{3}$$

$$y=\frac{2}{x}\xrightarrow{y=\frac{\sqrt{30}}{3}}y=\frac{2}{\frac{\sqrt{30}}{3}}=2\div\frac{\sqrt{30}}{3}=\frac{6}{\sqrt{30}}=\frac{6\sqrt{30}}{30}=\frac{\sqrt{30}}{5}$$

Per tant les dimensions del marc són $x=\frac{\sqrt{30}}{3}$ cm d'ample i $y=\frac{\sqrt{30}}{5}$ cm d'alt.

El cost del marc serà:

$$f\left(\tfrac{\sqrt{30}}{3}\right)=15\cdot\tfrac{\sqrt{30}}{3}+\frac{50}{\frac{\sqrt{30}}{3}}=5\sqrt{30}+50\div\frac{\sqrt{30}}{3}=5\sqrt{30}+\frac{150}{\sqrt{30}}=5\sqrt{30}+\frac{150\sqrt{30}}{30}=$$

$$=5\sqrt{30}+5\sqrt{30}=\boxed{10\sqrt{30}€}$$

Finalment quedaria per provar que el punt $x=\frac{\sqrt{30}}{3}$ és un mínim de la funció $f(x)=15x+\frac{50}{x}$.

Això es pot fer de dues maneres: estudiar el signe de $f'(x)$ als dos costats del punt $x=\frac{\sqrt{30}}{3}$ i veure que $f'(x)$ passa de negativa a positiva o demostrant que $f''\left(\tfrac{\sqrt{30}}{3}\right)>0$.

Utilitzant la primera tècnica, és a dir, estudiant el signe de la derivada al voltant del punt $x=\frac{\sqrt{30}}{3}$ obtindríem la taula següent:

Interval	$\left(0,\frac{\sqrt{30}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{30}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{30}}{3},+\infty\right)$
Signe de $f'(x)$	–	0	+
Monotonia de $f(x)$	$\searrow$	**m**	$\nearrow$

$\frac{\sqrt{30}}{3}\simeq 1{,}83$

Agafem un punt a l'esquerra i un a la dreta de 1,83:

$1<\frac{\sqrt{30}}{3}$ i $f'(1)=15-\frac{50}{1^2}=15-\frac{50}{1}=15-50=-35<0$

$2>\frac{\sqrt{30}}{3}$ i $f'(2)=15-\frac{50}{2^2}=15-\frac{50}{4}=\frac{60-50}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}>0$

En el cas de voler-ho fer amb el signe de la segona derivada el raonament seria el següent:

$$f'(x)=15-\frac{50}{x^2}\rightarrow f'(x)=15-50x^{-2}\rightarrow f''(x)=\rightarrow -50\cdot(-2)x^{-3}=100x^{-3}=\frac{100}{x^3}\rightarrow$$

$$f''\left(\tfrac{\sqrt{30}}{3}\right)=\frac{100}{\left(\frac{\sqrt{30}}{3}\right)^3}>0\rightarrow x=\frac{\sqrt{30}}{3}$$ és un mínim relatiu.

Tornar a l'enunciat

108) PAU 2019 Sèrie 4 Qüestió 6:
Sabem que una funció $f(x)$ és continua i derivable a tots els nombres reals, que té com a segona derivada $f''(x)=6x$ i que la recta tangent en el punt d'abscissa $x=1$ és horitzontal.
a) Determineu l'abscissa dels punts d'inflexió de la funció f i els intervals de concavitat i convexitat. Justifiqueu que la funció té un mínim relatiu en $x=1$.

Per estudiar els punts d'inflexió hem d'estudiar el signe de la segona derivada. Per fer la taula necessitem igualar la segona derivada a zero. Com que $f''(x)=6x$ tenim

$f''(x)=0 \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$

Interval	$(-\infty, 0)$	0	$(0,+\infty)$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Curvatura de $f(x)$		**P.I.**	

Per tant, f còncava en $(-\infty, 0)$ i convexa en $(0,+\infty)$ i té un punt d'inflexió en $x=0$

Justifiquem ara que $x=1$ és un mínim relatiu de la funció f.
Ens diuen que la recta tangent en el punt d'abscissa $x=1$ és horitzontal, això vol dir que en $x=1$ la derivada val zero, per tant $x=1$ és un candidat a mínim relatiu. Com que la segona derivada en $x=1$ és $f''(1)=6\cdot 1=6<0$ aleshores $x=1$ és un mínim relatiu de f. (O també, com en $x=1$, f és convexa aleshores és un mínim relatiu.

b) Sabent, a més, que la recta tangent en el punt d'abscissa $x=1$ és $y=5$, calculeu l'expressió de la funció f.

$f''(x)=6x \rightarrow f'(x)=\int 6x dx \rightarrow f'(x)=3x^2+C$ on C és la constant d'integració.
Com que $f'(1)=0$ aleshores $f'(1)=0 \rightarrow 3\cdot 1^2+C=0 \rightarrow 3+C=0 \rightarrow C=-3 \rightarrow$
$\rightarrow f'(x)=3x^2-3$
Finalment, com que $f'(x)=3x^2-3$ aleshores $f(x)=\int 3x^2-3dx=x^3-3x+K$ on K és la constant d'integració.
Com que la recta tangent a $f(x)$ en $x=1$ és $y=5$, en el punt $x=1$ la recta i la funció també han de coincidir en altura, és a dir, $f(1)=5$ i aleshores:
$f(1)=5 \rightarrow 1^3-3\cdot 1+K=5 \rightarrow 1-3+K=5 \rightarrow K=5-1+3 \rightarrow K=7 \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{f(x)=x^3-3x+7}$$

Tornar a l'enunciat

109) PAU 2019 Sèrie 5 Qüestió 4:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquells punts en què la recta tangent és horitzontal.

La recta tangent serà horitzontal si té pendent zero.
Recordem que la pendent de la recta tangent en un punt coincideix amb el valor de la derivada en aquest punt.
Per tant, els punts on la recta tangent serà horitzontal seran aquells on la derivada de la funció val zero.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow f'(x)=\frac{0\cdot(1+x^2)-1\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0\rightarrow -2x=0\rightarrow x=0$$

Per tant, solament hi ha un punt on la recta tangent és horitzontal i aquest punt és $x=0$.
Calculem l'equació de la recta tangent a la funció f en el punt $x=0$.
Recordem que:

L'equació de la recta tangent a una funció $f(x)$ en el punt $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$.

En el nostre cas, per a $a=0$ obtindrem: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\rightarrow f(0)=\frac{1}{1+0^2}=\frac{1}{1}=1$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\rightarrow f'(0)=0$$

I per tant, $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\rightarrow y-1=0\cdot(x-0)\rightarrow y-1=0\rightarrow \boxed{y=1}$

b) Calculeu les coordenades del punt de la gràfica de la funció $f(x)$ en què el pendent de la recta tangent és màxim.

Com el pendent de la recta tangent coincideix amb la derivada de la funció, maximitzar el pendent de la recta tangent equival a buscar els màxims de $f'(x)$.

Recordem que per trobar els màxims i mínims relatius d'una funció hem de derivar i igualar a zero. En aquest cas, haurem de derivar i igualar a zero la funció $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\rightarrow f''(x)=\frac{-2\cdot(1+x^2)^2+2x\cdot 2\cdot(1+x^2)^1\cdot 2x}{\left((1+x^2)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)^2+8x^2\cdot\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)+8x^2\cdot\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\cancel{\left(1+x^2\right)}\cdot\left[-2\cdot\left(1+x^2\right)+8x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^{\cancel{4}}}=\frac{-2\cdot\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-2-2x^2+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$f''(x)=0\rightarrow\frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=0\rightarrow-2+6x^2=0\rightarrow6x^2=2\rightarrow x^2=\frac{2}{6}\rightarrow x^2=\frac{1}{3}\rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Finalment fem la taula de creixement i decreixement de la funció $f'(x)$.

Recordem que per calcular els intervals de creixement i decreixement s'han de considerar els punts on s'anul·la la derivada i els punts on deixa d'exisistir.

En el nostre cas, el denominador no s'anul·la mai i per tant no hi ha problemes d'existència de la derivada i solament considerarem els punts on aquesta s'anul·la, és a dir $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ i $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Interval	$\left(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$
Signe de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de f'	↗	**M**	↘	**m**	↗

Per tant, el pendent de la recta tangent assoleix un màxim en l'abscissa $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ i les coordenades d'aquest punt seran $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\boxed{\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{3}{4}\right)}$

Tornar a l'enunciat

110) PAU 2019 Sèrie 5 Qüestió 6: (Incomplet)

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Calculeu el domini de la funció f, els punts de tall de la gràfica de f amb els eixos de coordenades, i els intervals de creixement i decreixement de f.

• Domini:

Podem calcular $\ln(x)$ sempre que x sigui major que zero. Com que el denominador solament donarà problemes en el punt $x=0$ el domini de la funció serà tots els nombres reals positius. És a dir, $\boxed{D(f)=(0,+\infty)}$.

• Punts de tall amb els eixos de coordenades:

Talls amb l'eix X $\rightarrow y=0\rightarrow f(x)=0\rightarrow \dfrac{\ln(x)}{x}=0\rightarrow \ln(x)=0\rightarrow e^{\ln(x)}=e^0\rightarrow x=1$

Per tant la funció talla l'eix X en el punt $(1,0)$

Tall amb l'eix Y $\rightarrow x=0\rightarrow (0,f(0))$

Però com $x=0$ no pertany al domini de f no existeix el punt $(0,f(0))$ i per tant la funció no talla l'eix Y.

• Creixement i decreixement de la funció:

Per estudiar la monotonia de la funció hem de fer la taula de signes de la seva derivada:

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0\rightarrow 1-\ln x=0\rightarrow 1=\ln x\rightarrow e^1=e^{\ln x}\rightarrow e=x$$

Tenint en compte el domini de la funció i els punts on s'anul·la el numerador i el denominador obtenim la següent taula:

Interval	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
Signe de f'	$+$	0	$-$
Monotonia de f	↗	**M**	↘

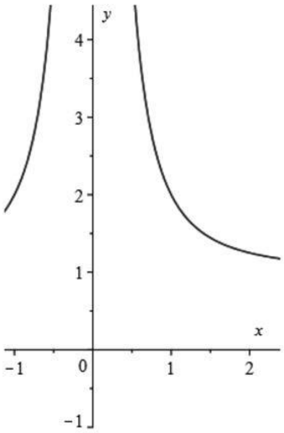
Per tant f és estrictament creixent en $(0,e)$ i estrictament decreixent en $(e,+\infty)$ presentant un màxim relatiu en $x=e$.

Tornar a l'enunciat

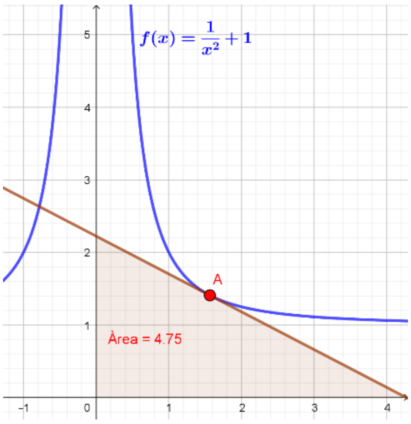
111) PAU 2020 Sèrie 1 Qüestió 1:

Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=(a,f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.

a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció $g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}$.



En el següent gràfic tenim una representació dels elements del problema.



Recordem que l'equació de la recta tangent d'una funció f en un punt $x=a$ és:

$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$.

En el nostre cas:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+1=x^{-2}+1\to$$

$$\to f'(x)=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$$

Per tant, $f(a)=\frac{1}{a^2}+1=\frac{1+a^2}{a^2}=\frac{a^2+1}{a^2}$ i $f'(a)=\frac{-2}{a^3}$.

Substituint en l'equació de la recta tangent obtenim:

$$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)\to y-\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)=\frac{-2}{a^3}(x-a)\to y=\frac{a^2+1}{a^2}-\frac{2x}{a^3}+\frac{2a}{a^3}\to$$

$$\to y=\frac{a^3+a}{a^3}-\frac{2x}{a^3}+\frac{2a}{a^3}\to y=\frac{-2x+a^3+3a}{a^3}.$$

Una vegada troba l'equació de la recta tangent hem de calcular els punts de tall d'aquesta recta amb els eixos de coordenades per dibuixar el triangle:

• **Tall amb l'eix X** $\to y=0\to\frac{-2x+a^3+3a}{a^3}=0\to -2x+a^3+3a=0\to$

$$\to a^3+3a=2x\to x=\frac{a^3+3a}{2}$$

• **Tall amb l'eix Y** $\to x=0\to y(x)=\frac{-2x+a^3+3a}{a^3}\to$

$$\rightarrow y(0)=\frac{-2\cdot 0+a^3+3a}{a^3}=\frac{a^3+3a}{a^3}=\frac{a^2+3}{a^2}$$

Finalment calculem l'àrea del triangle com (base x altura) dividit 2.

$$A(a)=\frac{Base\ x\ Altura}{2}=\frac{\frac{a^3+3a}{2}\cdot\frac{a^2+3}{a^2}}{2}=\frac{\frac{(a^3+3a)\cdot(a^2+3)}{2a^2}}{2}=\frac{\frac{\cancel{a}\cdot(a^2+3)\cdot(a^2+3)}{2a^{\cancel{2}}}}{2}=$$

$$=\frac{\frac{(a^2+3)\cdot(a^2+3)}{2a}}{2}=\frac{(a^2+3)\cdot(a^2+3)}{4a}=\boxed{\frac{(a^2+3)^2}{4a}}$$

b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.

Hem de minimitzar la funció $g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}$.

Per fer-ho hem de derivar i igualar a zero.

$$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}\rightarrow g'(a)=\frac{2\cdot(a^2+3)\cdot 2a\cdot 4a-(a^2+3)^2\cdot 4}{(4a)^2}=$$

$$=\frac{16a^2\cdot(a^2+3)-4\cdot(a^2+3)^2}{16a^2}\overset{(\div 4)}{=}\frac{4a^2\cdot(a^2+3)-(a^2+3)^2}{4a^2}=$$

$$=\frac{4a^2\cdot(a^2+3)-(a^2+3)\cdot(a^2+3)}{4a^2}=\frac{(a^2+3)\cdot\left[4a^2-a^2-3\right]}{4a^2}=\frac{(a^2+3)\cdot(3a^2-3)}{4a^2}$$

$$g'(a)=0\rightarrow\frac{(a^2+3)\cdot(3a^2-3)}{4a^2}=0\rightarrow(a^2+3)\cdot(3a^2-3)=0\rightarrow\begin{cases}a^2+3=0\\3a^2-3=0\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}a^2=-3\\3a^2=3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{-3}\\a^2=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\nexists\\a=\pm 1\end{cases}$$

Per tant, les solucions de l'equació $g'(a)=0$ són $a=-1$ i $a=1$. Com estem buscant solucions en l'eix positiu de les X, la nostra solució és $a=1$, sent el punt $P=(1,f(1))=\left(1,\frac{1}{1^2}+1\right)=\boxed{(1,2)}$.

En aquest cas el triangle tindrà una àrea de:

$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}\rightarrow g(1)=\frac{(1^2+3)^2}{4\cdot 1}=\frac{(1+3)^2}{4}=\frac{4^2}{4}=\frac{16}{4}=\boxed{4}$ que correspondrà a l'àrea mínima.

Quedaria per demostrar que en el punt P veritablement s'assoleix un mínim perquè recordem que els punts on s'anul·la la derivada són candidats a màxims i mínims relatius. Per tant, P podria ser un mínim, però també un màxim o no ser cap de les dues coses. Això ho podem saber o bé demostrant que la segona derivada en $x=1$ és positiva, és a dir, que $g''(1)>0$ o estudiant el comportament de la funció al voltant d'1 mitjançant una taula de valors de g'. Si obtem per aquesta segona opció tindrem:

Interval	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signe de g'	$-$	0	$+$
Monotonia de g	$\searrow$	**m**	$\nearrow$

I per tant es tracta d'un mínim relatiu com volíem demostrar.

Tornar a l'enunciat

112) PAU 2020 Sèrie 1 Qüestió 4:

Considereu la funció $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x=2$.

Recordem que la recta $y=mx+n$ és asímptota obliqua de la funció $f(x)$ si $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ i $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

Evidentment la pendent de la recta $y=mx+n$ és m.
Per tant, en el nostre cas, si l'asímptota obliqua ha de tenir pendent 1 tenim:

$$1=m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\cdot\left(a+\frac{b}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x^2}\right)=a+0=a$$

Per tant, de la primera condició obtenim que $a=1$.

Per altra banda, si la funció té un mínim en $x=2$, en aquest punt s'ha d'anul·lar la derivada. Aleshores:

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x}\xrightarrow{a=1}f(x)=\frac{x^2+b}{x}\to f'(x)=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+b\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-b}{x^2}=\frac{x^2-b}{x^2}$$

$$f'(2)=0\to\frac{2^2-b}{2^2}=0\to 2^2-b=0\to 4-b=0\to b=4.$$

Per tant la solució del problema és $\boxed{a=1 \text{ i } b=4}$.

No ho demana de manera explícita però si volem demostrar que efectivament en el punt $x=2$ la funció té un mínim, possiblement el camí més ràpid sigui estudiar el signe de la derivada que ja tenim calculada:

Noteu que $f'(x)=\dfrac{x^2-b}{x^2}\xrightarrow{b=4} f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$ i

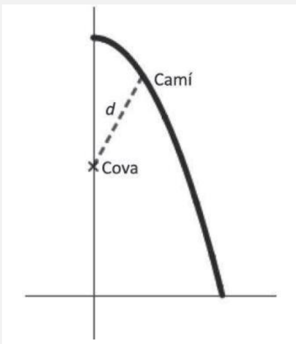
Interval	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
Signe de f'	$-$	0	$+$
Monotonia de f	$\searrow$	**m**	$\nearrow$

Per tant, en el punt $x=2$ la funció passa de estrictament decreixent a estrictament creixent assolint un mínim relatiu en aquest punt.

Tornar a l'enunciat

113) PAU 2020 Sèrie 3 Qüestió 2:

S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y=4-x^2$ d'extrems $(0,4)$ i $(2,0)$. La cova està situada en el punt de coordenades $(0,2)$, tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini d des del camí a la cova que sigui el més curt possible.



a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés.

Comproveu que la funció $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.

- Tal i com diu l'enunciat les coordenades del punt on es troba la cova són $(0,2)$, per aquest motiu la cova està situada sobre l'eix Y.
- Pel fet de que el camí es situa en l'arc $y=4-x^2$ les coordenades dels seus punts (x,y) tindran la forma $(x,\,4-x^2)$.
- La distància entre dos punts $A=(a_1,a_2)$ i $B=(b_1,b_2)$ es calcula mitjançant el teorema de Pitàgores amb la fórmula $d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$.

En el nostre cas, la distància entre la cova $A=(0,2)$ i un punt genèric de la corba $B=(x,\,4-x^2)$ serà:

$$d(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(4-x^2-2)^2}=\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}=$$

$=\sqrt{x^2+4-4x^2+x^4}=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ tal i com demanava l'enunciat.

b) Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés d .

Per calcular les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova hem de minimitzar la funció $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ en el primer quadrant, és a dir, de $x=0$ fins $x=2$.

Per trobar el mínim podem derivar i igualar la derivada a zero.
Noteu que com la funció $g(x)=\sqrt{x}$ és una funció monòtona creixent en tot el seu domini podem minimitzar la funció original $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$ o directament el polinomi $P(x)=x^4-3x^2+4$ obtenint el mateix resultat.
Nosaltres minimitzarem la funció original perquè entenem que aquest últim raonament rarament el pensarà un alumne de 2n de batxillerat.

● **Càlcul de la funció derivada:**

$$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}=\left(x^4-3x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^4-3x^2+4\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(4x^3-6x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^4-3x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(4x^3-6x\right)=\frac{4x^3-6x}{2\cdot\left(x^4-3x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}$$

● **Resolem l'equació** $f'(x)=0$:

$$f'(x)=0\rightarrow\frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}=0\rightarrow 4x^3-6x=0\rightarrow 2x\cdot\left(2x^2-3\right)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}2x=0\rightarrow x=0\\ 2x^2-3=0\rightarrow 2x^2=3\rightarrow x^2=\dfrac{3}{2}\rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\end{cases}$$

Noteu que tenim 3 valors candidats a ser el mínim que busquem: $x=0$, $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ i $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$. Però evidentment, solament el valor $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ està en l'interval $(0,2)$ on estem buscant.

● **Comprovem que el nostre candidat efectivament és un mínim relatiu:**

Finalment ens quedaria per comprovar que efectivament el punt $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ és un mínim relatiu. Tenim dos mètodes, estudiar el valor de la funció derivada a l'esquerra i a la dreta o calcular el valor de la segona derivada en el punt.

Amb el primer mètode el raonament seria el següent:

Interval	$\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},2\right)$
Signe de f'	$-$	0	+
Monotonia de f	↘	**m**	↗

Noteu que si utilitzem la funció original del problema $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$, la seva funció derivada és $f'(x)=\dfrac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}$ i per tant el càlcul de la segona derivada resulta molt complicat.
En aquest cas sí que resultaria molt útil no minimitzar la funció original sinó la funció $g(x)=x^4-3x^2+4$ on la primera derivada és $g'(x)=4x^3-6x$ i la segona derivada $g''(x)=12x^2-6$.

Aleshores $g''\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=12\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2-6=12\cdot\dfrac{3}{2}-6=18-6=12>0\rightarrow x=\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ és un mínim relatiu.

• Càlcul de les coordenades del punt del camí que queda més aprop de la cova i la longitud del camí mínim:

Els punts del camí tenien la forma $B=\left(x,\ 4-x^2\right)$.

El valor de x que minimitza la distància és $x=\sqrt{\tfrac{3}{2}}$.
Substituint obtenim:
$$B=\left(x,\ 4-x^2\right)=\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ 4-\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2\right)=\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ 4-\tfrac{3}{2}\right)=\boxed{\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ \tfrac{5}{2}\right)}$$

La funció que calcula la distància entre un punt del camí i la cova és $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}$.

Per a $x=\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ la distància serà: $f\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^4-3\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2+4}=\sqrt{\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-3\cdot\tfrac{3}{2}+4}=$
$$=\sqrt{\tfrac{9}{4}-\tfrac{9}{2}+4}=\sqrt{\tfrac{9}{4}-\tfrac{18}{4}+\tfrac{16}{4}}=\sqrt{\tfrac{7}{4}}=\tfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}=\boxed{\tfrac{\sqrt{7}}{2}}$$

Tornar a l'enunciat

114) PAU 2020 Sèrie 3 Qüestió 4: (Incomplet)

Sigui la funció $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln(x)$, en què $\ln$ indica el logaritme neperià, definida per a $x>0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y=f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.

La recta tangent a la corba serà horitzontal sii la seva pendent és zero, és a dir, si la derivada és nul·la. Per tant, ens estan demanant els punts del semieix positiu de les x on la derivada és nul·la.

$$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\rightarrow f(x)=x^{-1}\cdot\ln(x)\rightarrow f'(x)=-1x^{-2}\cdot\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=$$

$$= \frac{-\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \rightarrow 1-\ln(x) = 0 \rightarrow \ln(x) = 1 \rightarrow e^{\ln(x)} = e^1 \rightarrow x = e^1 \rightarrow x = e$$

Per tant, les coordenades del punt de la corba $y = f(x)$ on la tangent serà horitzontal seran $(e, f(e)) = \left(e, \frac{1}{e} \cdot \ln(e)\right) = \left(e, \frac{1}{e} \cdot 1\right) = \boxed{\left(e, \frac{1}{e}\right)}$

Ens queda respondre si aquest punt és un extrem relatiu i classificar-lo. Per fer-ho estudiem el signe de la derivada al seu voltant. Plantegem la següent taula:

Interval	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
Signe de f'	$+$	0	$-$
Monotonia de f	↗	**M**	↘

Com la derivada és positiva a l'esquerra del punt $x = e$ i negativa a la dreta aleshores la funció serà creixent a l'esquerra del punt i decreixent a la dreta. Per tant en el punt $x = e$ tindrem un màxim relatiu.

[Tornar a l'enunciat](#)

115) PAU 2020 Sèrie 3 Qüestió 6: (Incomplet)

Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).


Figura 1


Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ i $(2,2)$, tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.

Per a que les rajoles es puguin "*empalmar*" una al costat de l'altra tal com es veu en la figura cal que coincideixin en alçada. És a dir, s'ha de complir que $f(0) = f(2)$.

Per altra banda, la condició anterior no seria suficient perquè podria fer que en el punt on "*empalmem*" les rajoles el dibuix pergués la suavitat, és a dir, aparegués com un pic. Això es soluciona si la funció és derivable en aquest punt. Per tant, necessitarem que la derivada per l'esquerra i per la dreta coincideixin. Per l'esquerra de 2 serà $\lim_{x\to 2^-} f'(x)$ i per la dreta utilitzarem $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$.

Resumint, hem de comprovar: $\begin{cases} \text{Continuïtat:} \quad f(0)=f(2) \\ \text{Derivabilitat:} \ \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \end{cases}$

● **Continuïtat:**

$$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$$

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=2^3-3\cdot 2^2+2\cdot 2+1=8-12+4+1=1 \end{cases} \rightarrow f(0)=f(2)$$

● **Derivabilitat:**

$$f(x)=x^3-3x^2+2x+1 \rightarrow f'(x)=3x^2-6x+2$$

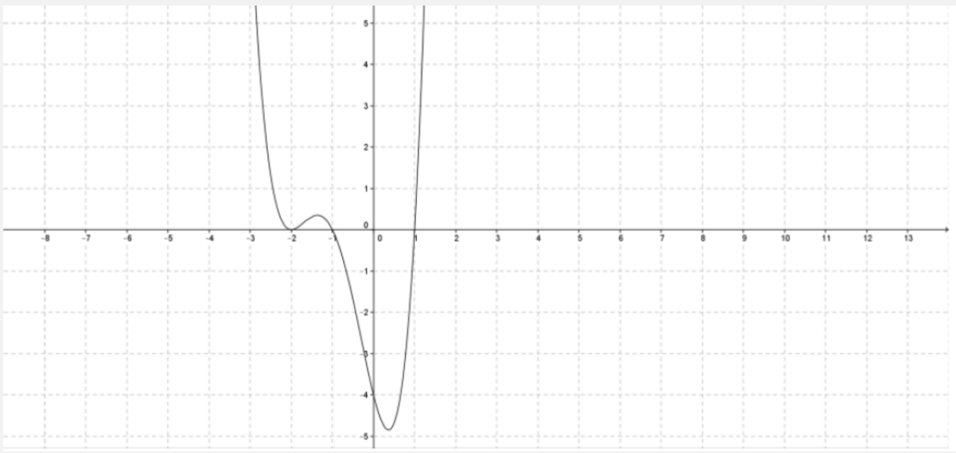
$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(3x^2-6x+2\right)=3\cdot 2^2-6\cdot 2+2=12-12+2=2 \\ \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(3x^2-6x+2\right)=3\cdot 0^2-6\cdot 0+2=2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

Per tant la funció compleix les condicions de continuïtat i derivabilitat que permeten juntar les rajoles.

Tornar a l'enunciat

116) PAU 2020 Sèrie 4 Qüestió 3:

Sigui $f(x)$ una funció derivable la gràfica de la qual passa pel punt $(0,1)$. La gràfica de la seva derivada, $f'(x)$, és la que es mostra en la figura.



a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt de la gràfica d'abscissa $x=0$.

L'equació de la recta tangent a una funció f en el punt d'abscissa $x=a$ és $y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$.

En el cas en que l'abscissa és zero l'equació anterior quedaría: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$.

L'enunciat ens diu que la gràfica de $f(x)$ passa pel punt $(0,1)$, per tant, $f(0)=1$ i com el dibuix que ens donen representa la derivada f' del dibuix podem veure que quan $x=0$ f' val -4, és a dir, $f'(0)=-4$.

Amb tota aquesta informació ja tenim la recta tangent totalment determinada:

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\rightarrow y-1=-4\cdot(x-0)\rightarrow y-1=-4x\rightarrow \boxed{y=-4x+1}$$

b) Trobeu les abscisses dels punts singulars de la funció $f(x)$ i classifiqueu-los.

Els punts singulars d'una funció són aquells on s'anul·la la seva derivada.
En el dibuix de l'enunciat podem observar que la derivada s'anul·la en $x=-2$, $x=-1$ i $x=1$.

Per poder classificar aquests punts en màxims i mínims relatius cal estudiar el signe de la funció derivada a l'esquerra i a la dreta de cadascun d'ells.
Aquest signe és molt fàcil de deduir a partir de la gràfica de l'enunciat simplement mirant si la funció representada f' apareix per sobre o per sota de l'eix x.

Per tant, a partir del gràfic de l'enunciat podem saber les dues primeres files de la següent taula.

La tercera fila es dedueix simplement d'afegir que si la derivada és positiva la funció és estrictament creixement mentre que si la derivada és negativa la funció és estrictament decreixent.

Interval	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signe de f'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de f	↗		↗	**M**	↘	**m**	↗

Per tant en el punt $x=-2$ s'anul·la la derivada però no hi ha cap màxim ni mínim relatiu. En $x=-1$ hi ha un màxim relatiu mentre que $x=1$ és un mínim relatiu.

Ens quedaria per comprovar si el punt $x=-2$ que és un punt on s'anul·la la derivada però no és un extrem relatiu és un punt de inflexió. Té pinta de que sí, però ho hem de provar.

Noteu que en $x=-2$, la recta tangent a la funció derivada és horitzontal, és a dir, que $f''(2)=0$, per tant, $x=-2$ és una abscissa candidata a ser punt d'inflexió.

Per saber si aquest candidat és punt d'inflexió de la funció f comprovarem que en aquest punt canvia la curvatura de f.

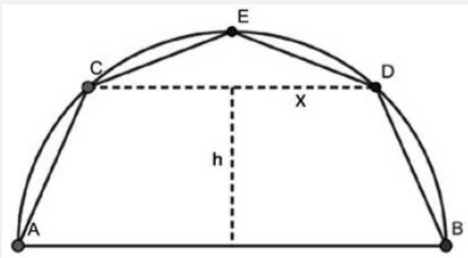
Podem observar en el gràfic de l'enunciat que f' és decreixent a l'esquerra de $x=-2$, per tant la seva derivada f'' serà negativa implicant que la funció f sigui còncava en $(-\infty,-2)$.

També observem en el gràfic que f' és creixent a la dreta de -2, per tant, la seva derivada f'' serà positiva a la dreta de $x=-2$.
Finalment hem vist que f'' és negativa a l'esquerra de -2 i positiva a la dreta, per tant, f és còncava a l'esquerra de -2 i convexa a la dreta.

Aleshores en el punt -2 la funció f canvia la curvatura i per tant $x=-2$ és un punt d'inflexió.

Tornar a l'enunciat

117) PAU 2020 Sèrie 4 Qüestió 5:
Una empresa està treballant en el disseny d'unes càpsules de cafè. L'empresa ha construït la secció transversal de les càpsules inscrivint-la en una semicircumferència de radi 1, traçant a continuació una corda CD paral·lela al diàmetre AB i incorporant el punt E en el punt mitjà de l'arc CD. D'aquesta manera queda traçat el pentàgon ACEDB, tal com es mostra en la figura.



a) Expresseu en funció de x i h l'àrea del pentàgon ACEDB.

Podem calcular l'àrea del pentàgon ACEDB com la suma de l'àrea del trapezi ACDB més l'àrea del triangle CED.

- L'àrea d'un trapezi és $A=\dfrac{(Base\ Major+Base\ menor)\cdot Altura}{2}$.

En el nostre cas, l'àrea del trapezi $ACDE$ serà:

$$A_1=\frac{\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot h}{2}=\frac{(2+2x)\cdot h}{2}=\frac{2\cdot(1+x)\cdot h}{2}=(1+x)\cdot h$$

- L'àrea d'un triangle és $A=\dfrac{Base\ x\ Altura}{2}$.

En el nostre cas, l'àrea del triangle CED de base $2x$ i altura $1-h$ serà:

$$A_2=\frac{\overline{CD}\cdot(1-h)}{2}=\frac{2x\cdot(1-h)}{2}=x\cdot(1-h)$$

La suma de les dues àrees serà:

$$A = A_1 + A_2 = (1+x)\cdot h + x\cdot(1-h) = h + xh + x - xh = h + x$$

Per tant, l'àrea del pentàgon ACEDB expressada en funció de x i h és: $\boxed{A = x + h}$

b) Quina ha de ser la distància (indicada en la figura per h) a què s'ha de situar la corda CD de AB per tal que l'àrea del pentàgon ACEDB sigui màxima?

En aquest apartat hem d'optimitzar la funció $A = h + x$.

Com aquesta funció depèn de dues variables, hem d'expressar una variable en funció de l'altra. Com l'enunciat ens pregunta pler la distància h ens quedarem amb la variable h i per tant intentarem expressar la variable x en funció de h i no a l'inrevès.

Aplicant el teorema de Pitàgores en el triangle rectangle que formen el centre de la semicircumferència, el centre de la corda CD i el punt D obtenim:

$$x^2 + h^2 = 1 \to x^2 = 1 - h^2 \to x = \pm\sqrt{1-h^2} \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{1-h^2}$$

Substituint en l'expressió de l'àrea:

$$A = h + x \xrightarrow{x=\sqrt{1-h^2}} A(h) = h + \sqrt{1-h^2}$$

Una vegada obtinguda l'expressió de l'àrea en funció de la variable h procedim a optimitzar-la. Per fer-ho hem de derivar-la i igualar la derivada a zero.

$$A(h) = h + \sqrt{1-h^2} \to A'(h) = 1 + \frac{1}{2}(1-h^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot(-2h) = 1 + \frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}} = 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$A'(h) = 0 \to 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = 0 \to \frac{\sqrt{1-h^2}}{\sqrt{1-h^2}} - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = 0 \to \sqrt{1-h^2} - h = 0 \to$$

$$\to \sqrt{1-h^2} = h \xrightarrow{x^2} \left(\sqrt{1-h^2}\right)^2 = h^2 \to 1 - h^2 = h^2 \to 1 = 2h^2 \to \frac{1}{2} = h^2 \to h = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \to$$

$$\to h = \frac{\pm\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{h>0} h = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalment ens quedaria per demostrar que el nostre valor candidat a màxim relatiu efectivament es tracta d'un màxim. Per fer-ho podem demostrar que la segona derivada avaluada en el punt és negativa o estudiar el signe de la primera derivada al voltant de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Noteu que pel context del problema la variable h solamente està definida en l'interval $(0,1)$.

Aleshores plantegem la següent taula:

Interval	$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$
Signe de f'	$+$	0	$-$
Monotonia de f	$\nearrow$	**M**	$\searrow$

Per tant podem afirmar de que en el punt $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ l'àrea de la secció és màxima.

Tornar a l'enunciat