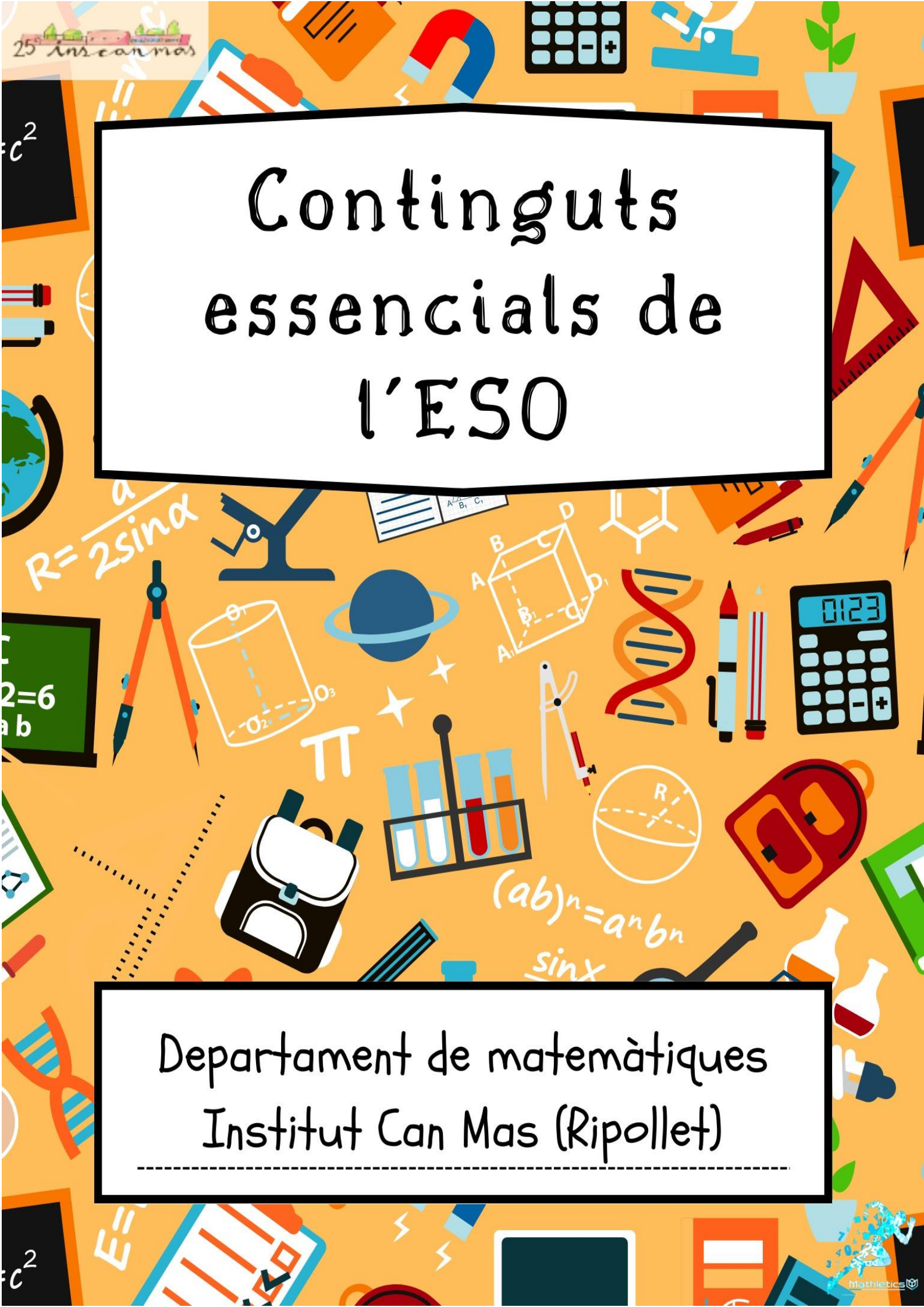




Continguts essencials de l'ESO

Departament de matemàtiques
Institut Can Mas (Ripollet)

SUMARI

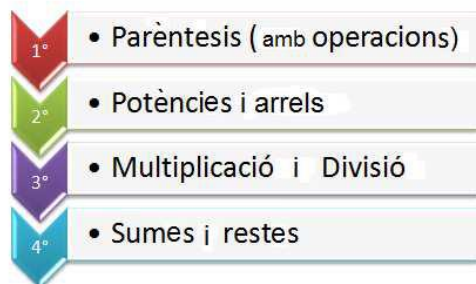
U1. NOMBRES REALS	2
ORDRE DE LES OPERACIONS	2
OPERACIONS AMB FRACCIONS.....	2
PROPIETATS DE LES POTÈNCIES.....	3
PROBLEMES AMB NOMBRES REALS	3
U2. ÀLGEBRA	4
VALOR NUMÈRIC.....	4
OPERACIONS AMB EXPRESSIONS ALGEBRÀIQUES.....	4
IDENTITATS NOTABLES.....	5
EQUACIONS DE 1R GRAU.....	5
U3. SISTEMES D'EQUACIONS.....	7
MÈTODE D'IGUALACIÓ	7
MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ	7
MÈTODE DE REDUCCIÓ	8
U4. FUNCIONS I GRÀFIQUES.....	9
EIXOS CARTESIANS.....	9
FUNCIONS LINEALS.....	10
PROBLEMES AMB FUNCIONS.....	11
U5. GEOMETRIA.....	12
ÀREES I VOLUMS.....	12
TEOREMA DE PITÀGORES.....	14
TRIGONOMETRIA.....	15

U1. NOMBRES REALS

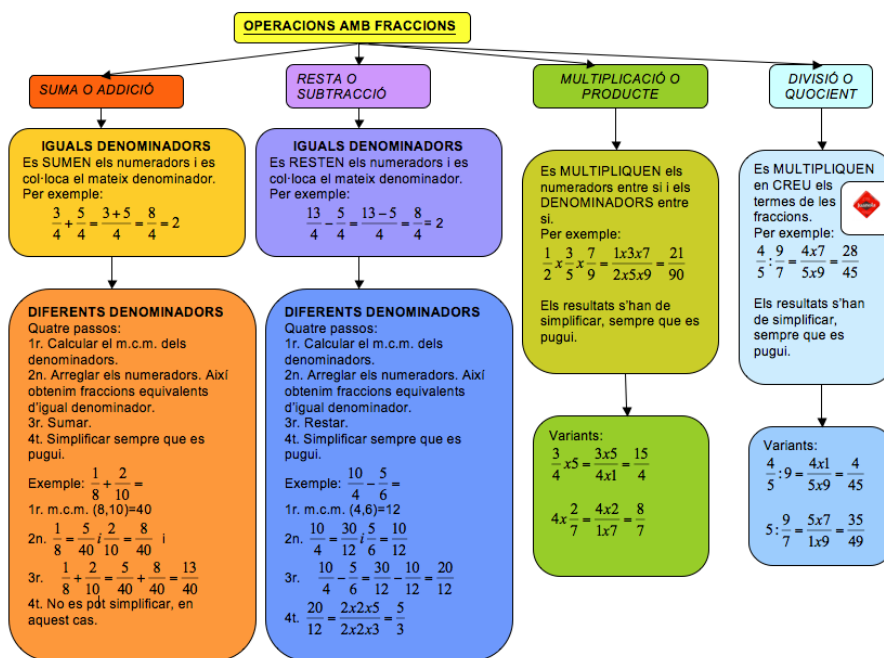
ORDRE DE LES OPERACIONS

1. Calcula:

- $3 - (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5)^2 - (3 - 5)^2 =$
- $5 - 3^2 - 2 \cdot (-5) - (7 - 9)^2 =$
- $7 - 2 \cdot \sqrt{9 - 5} + 2 \cdot (-3) + 8 - (-2)^2$



OPERACIONS AMB FRACCIONS



2. Realitza les operacions següents. Simplifica sempre que sigui possible fins a la fracció irreductible:

- $\left(3 - \frac{4}{10}\right) \cdot 5 - 1 + 7 \cdot \frac{2}{30} =$
- $\frac{5}{3} : \frac{3}{7} + \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} =$
- $2 + \frac{2}{3} : \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$

PROPIETATS DE LES POTÈNCIES

3. Fes les següents operacions amb potències:

- $(3^2)^3 =$
- $5^3 \cdot 5^2 \cdot 5 =$
- $7^0 =$
- $3^5 : 3^2 =$
- $2^{-5} =$
- $[(5 - 7 + \sqrt{64}) \cdot (-128)^4]^0 =$

$1^n = 1$	$a^1 = a$	$a^0 = 1, (a \neq 0)$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$		$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^{-1} = \frac{1}{a}, (a \neq 0)$		$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0)$		$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

PROBLEMES AMB NOMBRES REALS

- A un treballador li obaixen el sou la sisena part, del que li queda el 25% se'n va destinat a impostos i finalment de la resta que li queda les dos cinquenes parts se les gasta a pagar la hipoteca del pis. Si encara té disponibles 450 €, quant cobrava abans de la baixada de sou?, quant paga d'impostos i d'hipoteca?
- Un ordinador duu a l'etiqueta el seu preu sense IVA. L'IVA suposa un increment del 21%. A més, a la tenda fan una oferta i tots els ordinadors tenen un 25% de descompte. Contesta ara, raonant la resposta i realitza els càlculs:
 - És el mateix que primer m'apliquin l'IVA i després el descompte que si primer em fan el descompte i després m'apliquin l'IVA?
 - Seria el mateix que al final simplement em fessin un 4% de descompte sobre el preu que marca l'etiqueta?

U2. ÀLGEBRA

VALOR NUMÈRIC

El valor numèric d'una expressió algebraica és el nombre obtingut en substituir les lletres que hi apareixen per nombres determinats.

$3x + 1$

Si $x = 2$ $3 \cdot 2 + 1 = 7$
 Si $x = 0$ $3 \cdot 0 + 1 = 1$
 Si $x = -1$ $3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$
 Si $x = \frac{1}{2}$ $3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$

6. Calcula el valor numèric de les següents expressions algebraiques per al valor o valors que s'indiquen:
- $-3x^2 + \frac{4}{x} - 5$ per a $x = -2$
 - $(a+b)^2 - (a^2 + b^2)$ per a $a = 3$ i $b = -2$

OPERACIONS AMB EXPRESSIONS ALGEBRAÏQUES

De vegades SÍ es poden sumar	De vegades NO es poden sumar	SEMPRE es poden multiplicar
$x + x = 2x$	$x + y$ NO	$x \cdot x = x^2$
$x + 3x = 4x$	$x + 3y$ NO	$x \cdot x^2 = x^3$
$5a - 2a = 3a$	$x + 3x^2$ NO	$x \cdot 3x = x3x = 3xx = 3x^2$
$3y^2 + 5y^2 = 8y^2$	$3y^2 + 5z^2$ NO	$x \cdot 3x^2 = x3xx = 3xxx = 3x^3$
$7x^3 - 4x^3 = 3x^3$	$7x^3 - 4x$ NO	$x \cdot y = xy$
$2x^7 + 6x^7 = 8x^7$	$2x^7 + 6y^7$ NO	$3x^2 \cdot 5y^3 =$

7. Opera amb els següents monomis:
- $3x + y - 5x =$
 - $\frac{1}{3}x^2y + 4x^2y =$
 - $3x \cdot 4x =$
 - $\frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{1}{5}x^3 =$

8. Calcula, simplificant al màxim, les expressions algebraiques següents:

- $4(x^2 + 3x - 6) - 8(2x^3 - 6x^2 + x) =$
- $3x - (x + 3x^2) + 6x^2 - 8x =$
- $5x^2 + 23 + 4x - 3 - 3x^2 + 2x =$
- $\frac{3}{4}x^6 - 2x^2 + 2x^6 + x^2 + \frac{1}{4} =$

IDENTITATS NOTABLES

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$1. (x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$2. (x - 6)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$3. (x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

9. Desenvolupa les expressions següents aplicant identitats notables:

- $(x + 8)^2 =$
- $(5x - 8)^2 =$
- $(3x - 7) \cdot (3x + 7) =$

EQUACIONS DE 1R GRAU

Metodologia a seguir:

1r) Calculem el m.c.m de tots els denominadors.

2n) Multipliquem tots els termes de l'equació per aquest m.c.m (amb això desapareixen els denominadors).

3r) Eliminem parèntesi (si n'hi ha) aplicant la propietat distributiva.

4r) Agrupem les x a un membre de l'equació i els nombres a l'altre membre.

5é) Aïllem la x dividint tota l'equació pel valor que acompanya a la x.

$$\frac{x+6}{3} + \frac{4(2x-4)}{15} = \frac{6-4x}{5}$$

$$\text{m.c.m}(3,15,5) = 15$$

$$15 \cdot \frac{x+6}{3} + 15 \cdot \frac{4(2x-4)}{15} = 15 \cdot \frac{6-4x}{5}$$

$$5 \cdot (x + 6) + 4(2x - 4) = 3(6 - 4x)$$

$$5x + 30 + 8x - 16 = 18 - 12x$$

$$5x + 8x + 12x = 18 - 30 + 16$$

$$25x = 4$$

$$x = \frac{4}{25}$$

10. Resol les següents equacions de primer grau:

- $3 \cdot (2 + x) - 21 = 2 - \frac{x+3}{4}$
- $\frac{2-3x}{2} - \frac{2+5x}{4} = \frac{5x-4}{6} - \frac{7x+11}{3}$

11. Resol mentalment les equacions següents:

- $(x - 2) \cdot (x + 6) = 0$
- $(2x - 4) \cdot (3x + 9) = 0$
- $\frac{4}{x} = \frac{3}{6}$

EQUACIONS DE SEGON GRAU COMPLETES:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \\
 &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \\
 &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} =
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \\
 &= \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-3 + 1}{2} = -1 \\ \frac{-3 - 1}{2} = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

12. Resol aquestes equacions de segon grau completes (tingues en compte que algunes poden no tenir solució):

- a. $x^2 + 3x - 4 = 0$
- b. $3x^2 + 7x + 10 = 0$
- c. $9x^2 + 12x + 4 = 0$

U3. SISTEMES D'EQUACIONS

MÈTODE D'IGUALACIÓ

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 5x - y = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 5x = 14 + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ x = \frac{14 + y}{5} \end{cases}$$

- Igualem les dues expressions:

$$5 - 2y = \frac{14 + y}{5} \rightarrow \frac{5 - 2y}{1} = \frac{14 + y}{5}$$

- Busquem el denominador comú o multipliquem en creu:

$$\frac{5 \cdot (5 - 2y)}{5} = \frac{1 \cdot (14 + y)}{5}$$

$$5 \cdot (5 - 2y) = 14 + y$$

$$25 - 10y = 14 + y$$

$$-10y - y = 14 - 25$$

$$-11y = -11$$

$$y = \frac{-11}{-11} \rightarrow \boxed{y = 1}$$

- Substituïm el valor $y = 1$ a l'expressió aïllada $x = 5 - 2y$:

$$x = 5 - 2 \cdot 1 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

Per tant, la solució del sistema serà:

$$x = 3 \text{ i } y = 1$$

13. Resol els sistemes següents per igualació:

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$

MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ

14. Resol els sistemes següents per substitució:

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

S'alta una de les incògnites a una de les equacions (pas 1)

$$x = 5 - 2y$$

Se substitueix l'expressió obtinguda a l'altra equació (pas 2)

$$3(5 - 2y) + 4y = 13$$

Es resol l'equació obtinguda (pas 3)

$$15 - 6y + 4y = 13$$

$$-6y + 4y = 13 - 15$$

$$-2y = -2$$

$$y = \frac{-2}{-2} = \boxed{1}$$

Es substitueix la incògnita trobada a l'expressió aïllada abans (pas 4)

$$x = 5 - 2 \cdot 1 = \boxed{3}$$

MÈTODE DE REDUCCIÓ

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

S'igualen els coeficients d'una incògnita però han de ser oposats. Per això es multipliquen les equacions pel nombre adequat (en aquest cas -3)

$$\begin{cases} -3(x + 2y = 5) \Rightarrow -3x - 6y = -15 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

Se sumen les dues equacions per a eliminar la incògnita de coeficients iguals: (exemple)

$$\begin{array}{r} -3x - 6y = -15 \\ + \\ 3x + 4y = 13 \\ \hline -2y = -2 \end{array}$$

Es resol l'equació que en resulta: (exemple)

$$y = \frac{-2}{-2} = 1$$

Se substitueix el valor obtingut a una de les equacions inicials: (exemple)

$$x = 5 - 2 \cdot 1 = 3$$

15. Resol els sistemes següents per reducció:

- $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + y = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

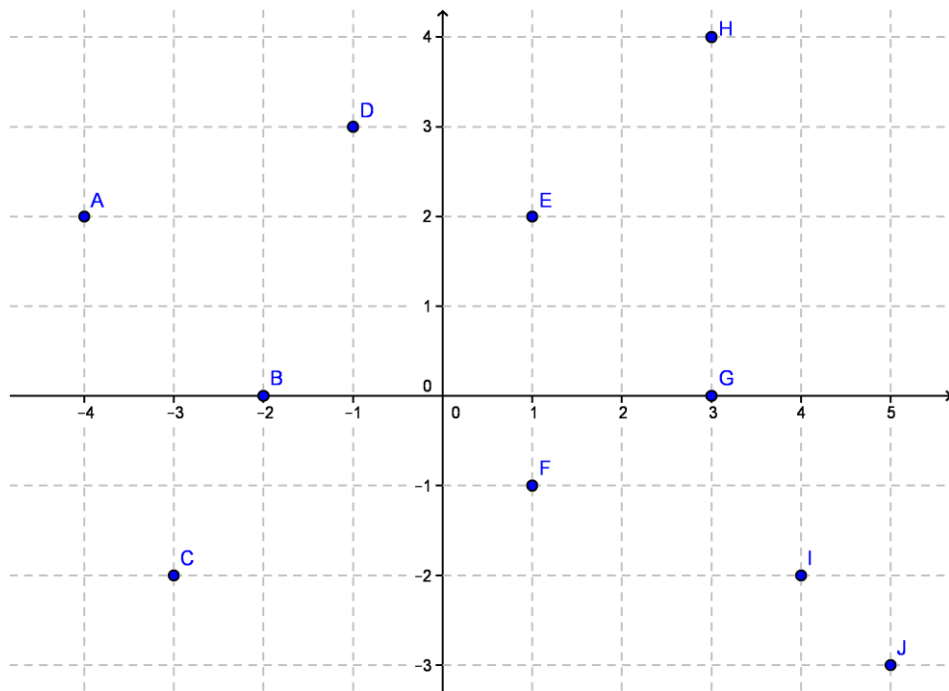
PROBLEMES

- Uns amics van al bar on es reuneixen habitualment i compren 5 entrepans i 4 begudes per 18,5€. Un altre dia es reuneixen al mateix bar, compren 3 entrepans i 5 begudes i paguen 15€. Quant costa cada entrepà i cada beguda en aquest local?
- Si l'Esteve regala a la Irene 4 dels seus CD, ella en tindrà el doble que ell. Si la Irene dona 6 dels seus CD a l'Esteve, llavors serà ell qui tingui el doble que ella. Quants CD té cadascun d'ells?

U4. FUNCIONS I GRÀFIQUES

EIXOS CARTESIANS

18. Copia al teu quadern i indica les coordenades assenyalats al pla:



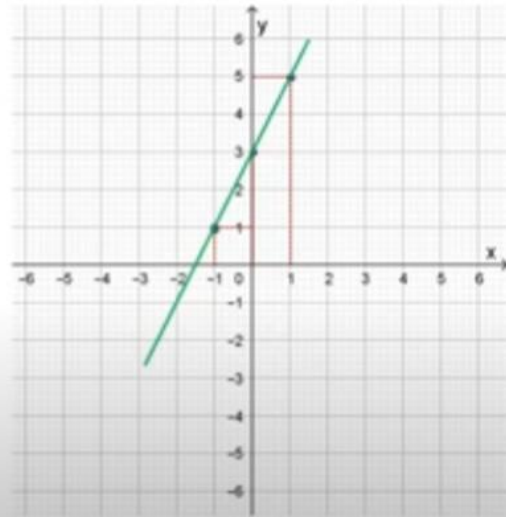
FUNCIONS LINEALS

Taula de valors-representació gràfica

$$f(x)=2x+3$$

x	f(x)
-1	$f(-1)=2 \cdot (-1)+3=-2+3=1$
0	$f(0)=2 \cdot 0+3=0+3=3$
1	$f(1)=2 \cdot 1+3=2+3=5$

x	y
-1	1
0	3
1	5



19. Representa les següents funcions lineals:

- a. $y = x + 1$
- b. $y = 3x$

20. Completa la taula al teu quadern.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y		-4			2	

- a. Escriu la fórmula que relaciona les dues magnituds.
- b. Representa gràficament als eixos cartesianes la funció.

PROBLEMES AMB FUNCIONS

21. En la companyia de telefonia mòbil Telefònica cal pagar 10€ fixos al mes i 1€ per cada minut que parlis. A la companyia Terratel cal pagar 2€ per minut però no té quota fixa.
- Escriu les funcions que descriuen el cost que pagaríem a cada companyia en relació amb els minuts parlats (x).
 - Dibuixa els dos gràfics en uns mateixos eixos de coordenades.
 - A partir de quants minuts és més barata la companyia Telefònica?
22. Escriu les fórmules de les funcions associades a les situacions següents:
- El sou fix d'un treballador és de 980 euros al mes i cada hora extra es paga a 6 euros. El sou final d'un treballador en funció de les hores extres que faci.
 - Una classe de 3r d'ESO ha guanyat un premi de 1500 euros. Els diners que corresponen a cadascun segons el nombre d'alumnes.
 - Joan llegeix cada dia 4 pàgines. El temps que triga a llegir un llibre en funció del nombre de pàgines que tingui.

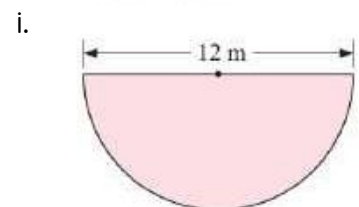
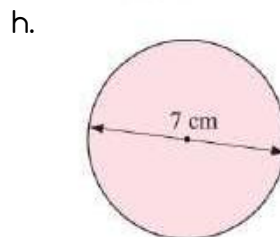
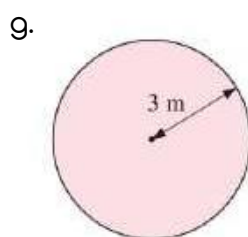
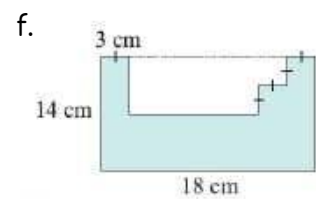
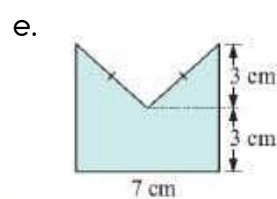
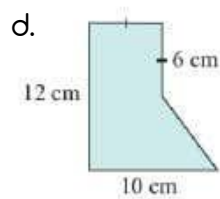
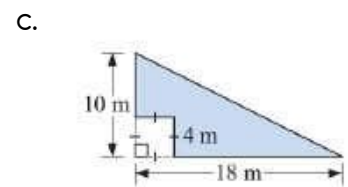
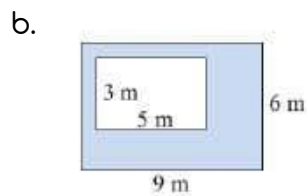
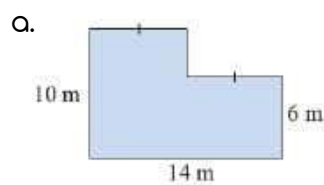
U5. GEOMETRIA

ÀREES I VOLUMS

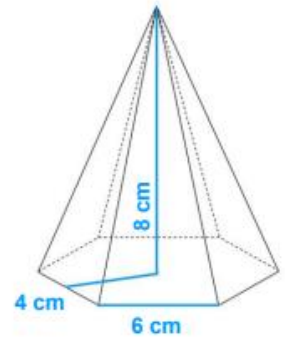
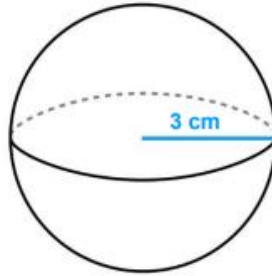
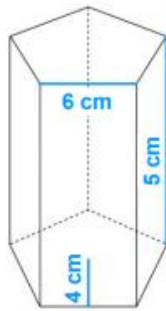
Triangle $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$	Quadrat $A = \text{costat} \cdot \text{costat} = \text{costat}^2$	Rectangle $A = \text{base} \cdot \text{altura}$
Rombe $A = \frac{\text{diagonal major} \cdot \text{diagonal menor}}{2}$	Romboide $A = \text{base} \cdot \text{altura}$	Trapezi $A = \frac{(\text{base major} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2}$
Poligon regular $A = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2}$	Cercle $A = \pi \cdot \text{radi}^2$	Sector circular $A = \pi \cdot \text{radi}^2 \cdot \frac{\text{nombre graus}}{360}$

 Cubo $A = 6 l^2$ $V = l^3$	 Cilindro $A = 2\pi R (h + R)$ $V = \pi R^2 \cdot h$
 Ortoedro $A = 2(ab + ac + bc)$ $V = abc$	 Cono $A = \pi R \cdot (g + R)$ $V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$
 Prisma recto $A = P(h + a)$ $V = A_0 \cdot h$	 Tronco de cono $A = \pi [g(R + r) + R^2 + r^2]$ $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$
 Tetraedro regular $A = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ $V = \frac{l^3 \sqrt{2}}{12}$	 Esfera $A = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

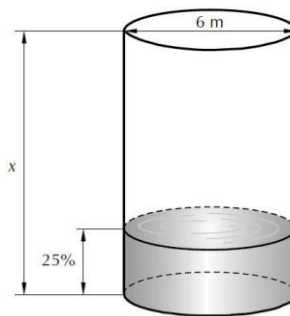
23. Calcula l'àrea pintada de les següents figures:



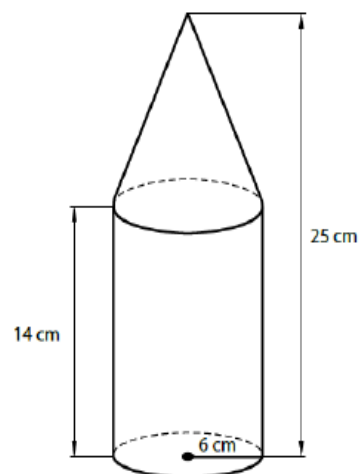
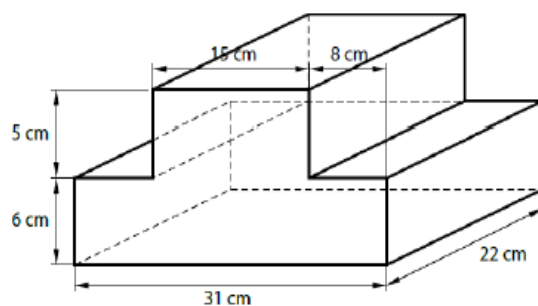
24. Ordena aquests cossos segons el volum, de més gran a menut:



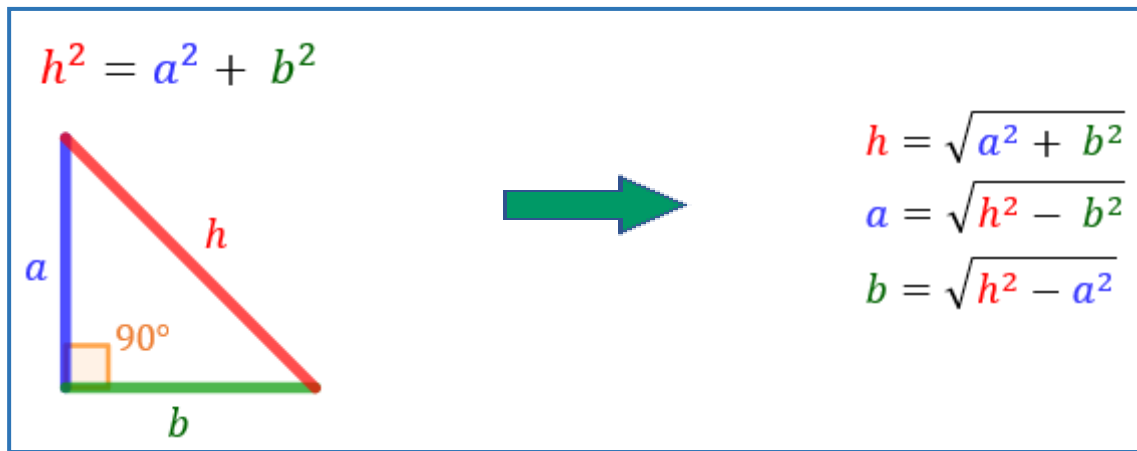
25. En aquest dipòsit cilíndric s'hi han abocat 84.823 litres d'aigua, i ha quedat ple en un 25%. Quina és l'alçada del dipòsit? Pensa de fer els canvis d'unitat necessaris.



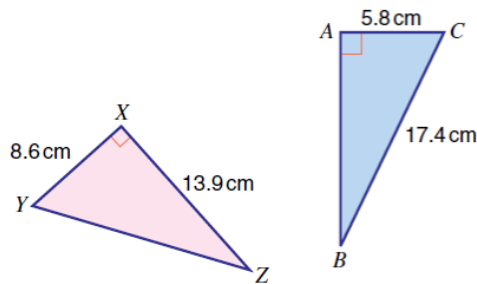
26. Calcula el volum total que ocupen aquestes dues figures:



TEOREMA DE PITÀGORES

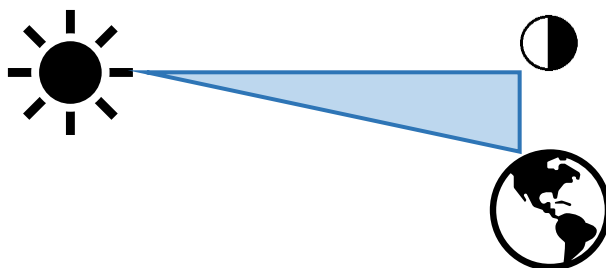


27. Calculeu el costat desconegut dels següents triangles rectangles:

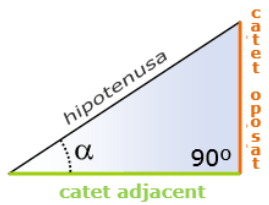


28. Calcula l'altura a la que podem arribar amb una escala de 3 metres d'altura recolzada sobre la paret si la part inferior la situem a 70 centímetres de la paret.

29. Suposem que la Lluna està en la fase del seu primer quart, la qual cosa significa que des de la Terra la veiem de la següent manera, sent la meitat clara la que veiem, és a dir, la il·luminada pel Sol.
Sabem que la distància de la Terra a la Lluna és de 384100km i de la Terra al Sol és d'uns 150 milions de quilòmetres. Calcula la distància de la Lluna al Sol en aquesta fase (considerar les distàncies des dels centres).



TRIGONOMETRIA



- ✓ El **sinus** és el quocient entre el catet oposat i la hipotenusa.
- ✓ El **cosinus** és el quocient entre el catet adjacent i la hipotenusa.
- ✓ La **tangent** és el quocient entre el catet oposat i el catet adjacent.

Raons trigonomètriques

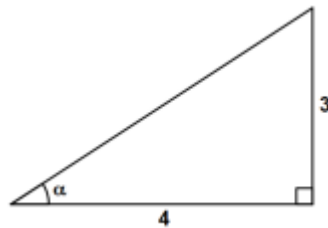
$$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}$$

Recordatori: els tres angles d'un triangle sumen sempre 180°

30. Determina les raons trigonomètriques associades al següent angle α

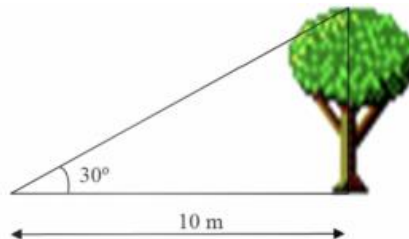


$$\sin(\alpha) =$$

$$\cos(\alpha) =$$

$$\tan(\alpha) =$$

31. Calcula l'altura de l'arbre:



32. Calcula la mesura de l'angle C i dels costats b i c, coneixent que l'angle A mesura 90° , l'angle B mesura 73° i la longitud del costat a = 15 cm

33. Un home recorre 500m. al llarg d'un camí que té per inclinació 20° respecte de l'horitzontal. Quina altura aconsegueix respecte al punt de partida?