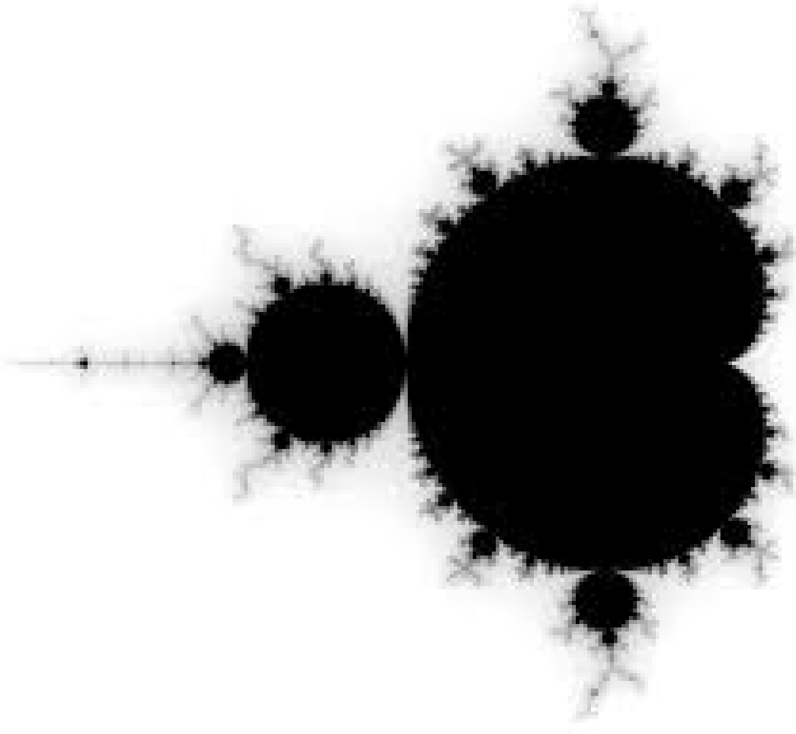
PROJECTE DE RECERCA 2021

Elaboració de la nostra pròpia edició del concurs Fem Matemàtiques

Arnau Viciano, Evelin Méndez, Lluc Falceto, Lucía Guerrero



ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

Aquest projecte està totalment construït al voltant del concurs Fem Matemàtiques, que és un concurs en el que els alumnes de 6è, 1r d'ESO i 2n d'ESO fet exclusivament a Catalunya i va començar al 1995, amb unes 25 edicions.
El Fem Matemàtiques ajuda a potenciar el raonament matemàtic i fomentar la creativitat mitjançant la resolució de problemes, premiant a les persones que millor solucionen i argumenten els problemes i les seves solucions, fent-les passar de fase en fase.

Consisteix en un concurs dividit en tres fases:

- *Primera fase:* Per resoldre els problemes tens aproximadament un mes. Pot pot participa tots l'alumnat que estigui dins dels cursos marcats.
- *Segona fase*: Consisteix en un examen d'una hora i mitja, on es plantegen tres problemes i has d'intentar resoldre'ls i justificar la resposta. Són seleccionats de cada centre, escoles i instituts, de tot Catalunya.
- *Tercera fase:* És la final de tot Catalunya ja que hi participen tots els alumnes seleccionats a la segona fase de forma, s'estructura com una jornada matemàtica amb component lúdic.

  Nosaltres principalment ens hem centrat en la segona fase, que anteriorment hem dit, està composta per 3 problemes que s'han de resoldre en un temps limit. Aquesta l'hem triat ja que ens sembla la més interessant i accessible de tot el concurs.
  També els nostres problemes estan fets per a nens de 2n d'ESO, encara que nens de 1r i 6è els poden resoldre perfectament.

Aquest treball de recerca es basa en la investigació o l'estudi de com funcionen els problemes, cosa que fa que els nostres objectius siguin bastant generals i amplis, com una successió que comença en analitzar com funcionen, continua amb la seva classificació segons el tipus de problema que és; i acabant en una nova composició de tres problemes semblant i basats en edicions originals antigues, des de 1995 fins a actualment, amb una recerca de 20 Fem Matemàtiques i 60 problemes.

La nostra feina la vam dividir en dues parts:

- Fase d'anàlisi: On vam estudiar els problemes mentre els fèiem i investigavem com funcionaven, com estaven fets i com nosaltres ens podriem basar per a nosaltres fer els nostres propis problemes.
- Fase de creació: Aquí nosaltres ja vam començar a donar forma a aplicar el que havíem après a l'anterior fase, i tot i que estavem una mica limitats a l'hora de crear-los perquè ens haviem de basar en els resultats de l'anàlisis que havíem fet prèviament, vam crear tres problemes de la segona fase del concurs.

A partir d'aquí, hem continuat el nostre projecte fent les justificacions, on expliquem com funcionen els problemes i com es poden resoldre, però és clar, nosaltres volem que hi hagi més d'una manera de fer-ho, amb un bon raonament matemàtic, que és com funcionen els problemes del Fem Matemàtiques.

OBJECTIUS

A l'inici, ens vam plantejar una sèrie de metes bàsiques a complir amb aquest treball. Després de donar-li voltes, vam decidir que amb aquest projecte podríem aconseguir:

- Prendre una aproximació a les matemàtiques diferent a la convencional, posant-nos a la pell dels creadors dels concursos i proves.

- Aprendre més sobre el camp dels tipus de resolució de problemes i les estratègies de concurs.

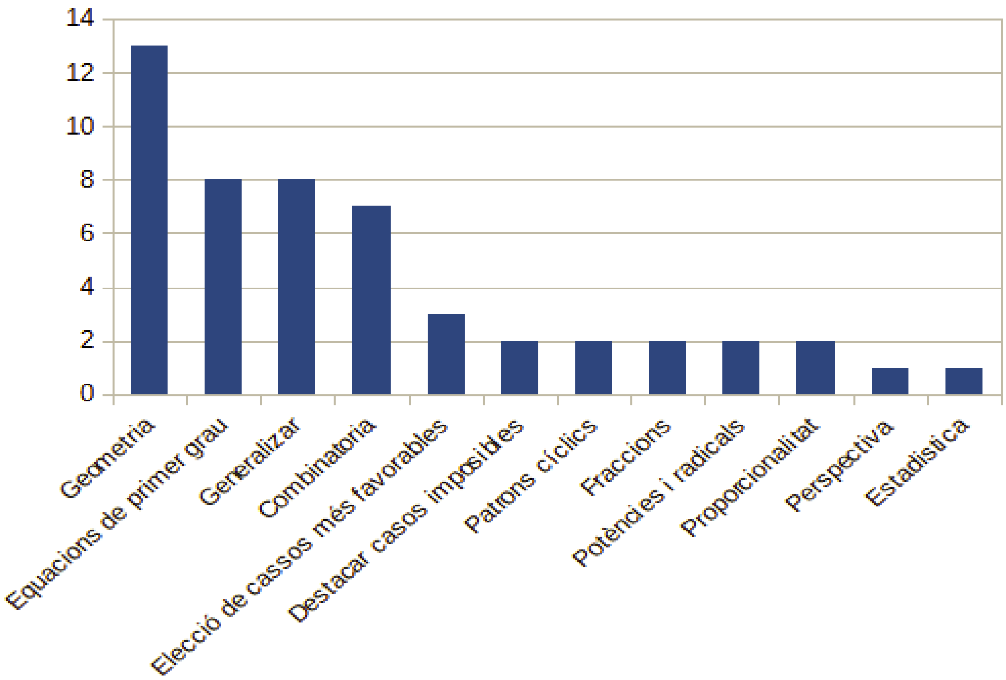
- Trobar patrons en les temàtiques dels concursos matemàtics, descobrir formes de preparar-t'hi.

- Buscar maneres d'enfocar les matemàtiques al pensament lateral i la recerca més que al càlcul i la cerca d'una resposta.

- Millorar en l'àmbit de l'organització, el treball cooperatiu i la independència a l'hora de dur a terme una tasca de llarg termini, de cara al futur.

FASE D'ANÀLISI

En total hem fet 20 edicions, 5 cadascú. Cada setmana cada membre havía de buscar el concurs d'un dels anys (els teníem tots en un drive que ens va enviar el nostre tutor) i resoldre'n la segona fase. Així podíem veure l'estètica general que havíem de seguir i també estudiar cada exercici per separat per veure com eren i es resolien. Quan ja havíen passat set dies, el següent dilluns, ens reuníem en una trucada de veu per exposar i comentar els resultats de la setmana. Així doncs vam anar anotant com estaven fetes: per exemple, si l'edició contenia un problema de geometria i generalitzar ho apuntàvem i després els sumàvem per veure els que si o si havíem de tenir en compte en la nostra fase de creació.



Amb això hem pogut classificar-los en diversos apartats, segons el nostre criteri i la nostra manera de resoldre els problemes. Els apartats són:

- *Geometria:* El que està en més quantitat. La majoria eren de descobrir l'àrea i el perímetre de polígons, amb unes poques dades, utilitzant més la lògica i el raonament matemàtic que hi ha darrere per a poder resoldre aquests problemes.
- *Equacions de primer grau:* Tot i que són nens de segon, algunes equacions de primer grau es poden resoldre per naturalesa, encara que a vegades no sigui necessari, ja que no hi ha una sola opció vàlida per a resoldre un problema.
- *Generalització:* És abstreure el que és comú i esencial a molts tòpics, per a formar un concepte general que les compren totes.
- *Combinatòria:* És comptar totes les possibilitats o casos en un problema, però fent l'ús de la lògica i les matemàtiques, enlloc de llistar-los un a un.
- *Elecció de casos favorables:* On s'escull entre molts resultats, tots els casos beneficiosos entre tots els casos posibles.

També han aparegut mentres analitzavem el procediment dels problemes alguns altres tipus de manera de resoldre'ls com:

- Destacar casos imposibles.
- Patrons cíclics.
- Fraccions.
- Potències i radicals.
- Proporcionalitat.
- Perspectiva.
- Estadística.

Una cosa que ens hem vist obligats a tenir en compte és que nosaltres estàvem treballant amb informació que els més petits no tenen. Per exemple: molts dels problemes van ser resolts amb equacions de 2x2 o fins i tot de 3x3, sense pensar en que potser són mètodes que queden fora de l'abast del nostre objectiu demogràfic.

Per això hi ha estratègies que hem utilitzat que vam decidir no incloure al nostre anàlisi i vam haver de rebaixar el nostre pensament al nivell d'alumnes de segon d'ESO, utilitzant el raonament per sobre dels càlculs tan pràctics que hem après des d'aleshores.

Tipus de problemes	Quantitat dels mateixos en les diferents edicions	Percentatge (%)
Geometria	13	65
Equacions de primer grau	8	40
Generalitzar	8	40
Combinatòria	7	35
Elecció de casos més favorables	3	15
Destacar casos impossibles	2	10
Patrons cíclics	2	10
Fraccions	2	10
Potències i radicals	2	10
Proporcionalitat	2	10
Perspectiva	1	5
Estadística	1	5

FASE DE CREACIÓ

Per decidir la temàtica dels exercicis vam utilitzar una pissarra online on tothom tenia accés i on vam poder gestionar una pluja d'idees. Alhora, vam començar a exposar les nostres idees i a desenvolupar-les, opinant-hi i discutint fins que vam tenir un esquema més conceptual que corpori dels tres exercicis que volíem dur a terme.

Òbviament, ens vam veure restringits a l'hora d'idear aquests problemes, ja que les decisions que preniem eren lligades a l'anàlisi de l'apartat anterior, perquè fossin el més fidels possible a la realitat: vam escollir els temes més freqüents, que són: Geometria, Equacions de primer grau, Generalitzar i Combinatòria, i vam decidir basar-nos en trets típics del fem matemàtiques per la forma general de la prova. Aquests són la justificació de les idees, la diversitat de possibles respostes, l'estructura dels tres problemes amb apartats que es van complicant i l'ús de la lògica i pensament lateral per trobar solucions creatives.

Amb aquestes bases en ment, vam anar escrivint enunciats i resolent-los, aplicant una espècie de selecció natural cada vegada, configurant-los retocant-los i ampliant-los fins que van ser complets. Vam dedicar un exercici a cada una de les branques més freqüents en la nostra recerca.

Per a fer que els participants justifiquessin el seu procediment hem utilitzat, essencialment, dues o tres tàctiques, depèn de com es miri:

La primera és la d'afegir diversos subapartats i extensions. D'aquesta manera, un problema que s'hauria pogut resoldre comptant exhaustivament ara compta amb tants casos que el mètode queda obsolet. Els concursants es veuen forçats indirectament a buscar la seva fòrmula o sistema per resoldre l'exercici, la qual, si es mostra com s'hi ha arribat, ja compta com a justificació.

Un altre mètode molt similar ha estat el de demanar directament que generalitzéssin, amb frases com “Podries respondre per qualsevol nombre?” És bàsicament el mètode anterior però menys amagat i més difícil d'eludir. (perquè tècnicament ningú t'impedeix dibuixar una llarga successió d'hexàgons i posar-te a comptar)

I l’últim i classic mètode és el de demanar-ho directament amb formes com Justifica o Raona la teva resposta, que hem afegit allà on més calien per emfatitzar-ho i assegurar-nos de que no deixàven cap solució sense explicar

Així és com va anar:

◻ *Primer problema*

Com els de geometria eren els més freqüents i ja teníem pensada una idea pel problema va ser el primer que vam crear. Primerament vam triar el polígon regular del problema, l’hexàgon. Després vam intentar relacionar el problema amb alguna cosa del món real perquè no quedes tan abstracte i fos més fàcil entendre'l, aquí sense cap dubte vam pensar amb un rusc d’abelles. Finalment vam buscar una seqüència en la qual els concursants en un últim apartat haurien de generalitzar. Finalment vam afegir-hi el típic justifica la teva resposta del fem matemàtiques.

◻ *Segon problema*

Per aquest segon problema volíem fer un joc, però al principi no ho vam aconseguir. Temps després vam canviar totalment el problema aconseguit el nostre propòsit.
La creació d’aquest problema ha variat bastant, al principi volíem que resolguessin una cosa similar a un quadrat màgic, però amb nombres diferents. Més tard per donar-li una estètica de joc vam invertir la idea del problema. Ara en comptes de solucionar-lo has de treure tota la informació possible demostrant que si es pot resoldre.
Aquest és el problema més complet que hem creat, pel que fa a l’anàlisi per això ha estat també el més temps li he dedicat.

▫ Tercer problema

Per al tercer problema teníem un tema, aquest que havia de ser si o si combinatòria, ja que en moltes edicions surten problemes d'aquest tipus.
Per fer-ho més visual i entenedor hem utilitzat animals i la mateixa convivència en les espècies triades. Aquest problema ha sigut bastant difícil de crear, ja que els càlculs es complicaven ràpidament o donaven solucions molt fàcils.

PRODUCTE FINAL

◻ *Hexàgons i abelles*

En un rusc d'abelles es vol construïr un patró hexagonal en una paret.

No obstant, encara no sap la mida desitjada, així que l'abella Anna en construeix uns com a l'exemple.

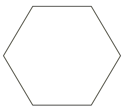


Figura 1

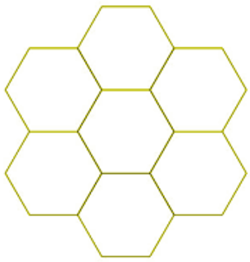


Figura 2

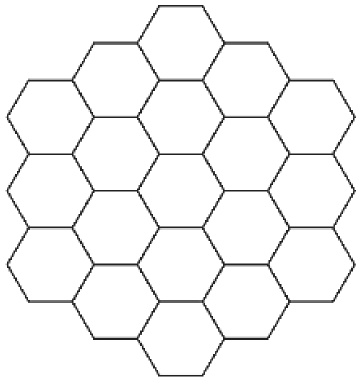


Figura 3

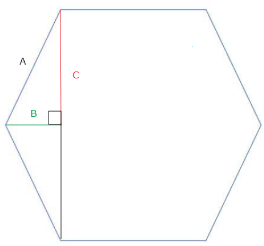


Figura 4

a) Si l'alçada del nostre grup de 7 hexagons (fig 2) és de 4.8cm i B=0.6cm, quina és l'àrea de l'hexàgon del mig?
   I l'àrea total?

b) Quants hexagons tindria la figura si aquesta tingués una tercera capa (fig 3)? I si en tinguéssin 8? Podries respondre per qualsevol nombre? Explica com.

c) Hi haurà algun panal de la nostra seqüència amb un nombre d'hexagons múltiple de sis? I de dos? I de quatre? I de tres? Perquè?

d) En la primera capa el nombre de hexagons és 1, en la segona és 7, a la tercera 19, a la quarta 37... Aquests nombres tenen quelcom en comú? Això passa amb totes les iteracions? Perquè o perquè no?

◻ *Les cartes estan sobre la taula*

En Biel i la Carla juguen a un joc. Ell assigna un nombre de l'1 al 4 a cada pal de la baralla francesa (piques, cors, diamants, trèbols) i reparteix nou cartes en una graella quadrada. Algunes queden cara amunt i algunes cara avall, a l'atzar. Aquesta és la disposició final:

		C1	C2	C3	D2
D1	7	7	9	6	11
F1	6	?	♠	♥	
F2	7	?	♣	?	
F3	9	♣	♥	?	

El Biel pot observar les cartes girades i, coneixedor de les sumes de les **columnes**, **files** i **diagonals**, les apunta en papers cara avall, que anomena c1, c2, c3, f1, f2, f3, d1 i d2. La Carolina pot girar els papers que vulgui per saber les sumes i descobrir els **valors** de les cartes, però…

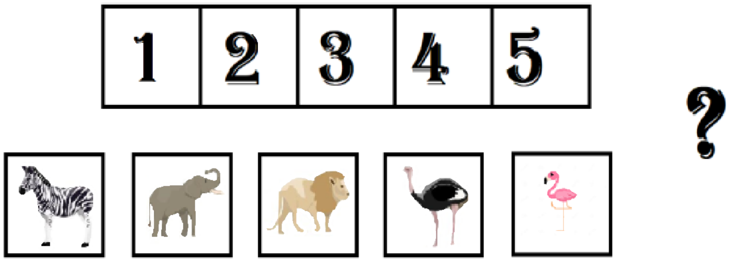
a) Coneixent tu totes les sumes, quin és el mínim nombre que la Carolina necessita saber-ne? Per què?

b) Com a persona aliena al joc, coneixes totes les sumes de les columnes, files i diagonals. Tenint la capacitat de descobrir totes les caselles, i només cobrint-les i descobrint-les, pots organitzar el taulell de manera que s'utilitzin menys cartes per resoldre'l? Quantes sumes necessites? Mostra el teu procediment

c) Ara prepara tu la teva pròpia partida però una mica diferent. Assigna nombres a les cartes i col·loca-les al taulell. Indicant la paritat de les sumes als quadrats grisos, organitza-les de manera que utilitzant les mínimes cartes puguis saber quins pals són parells i quins són imparells. Indica en què t'has basat per distribuir-les així.

▫ *Animals de zoo*

En Dídac té un zoo amb zebres, elefants, lleons, estruços i flamencs. Tots aquests animals estan col·locats en fila en recintes quadrats l'un al costat de l'altre, formant una línia.



a) De quantes maneres pot organitzar les gàbies?

b) Ara, necessita que les gàbies dels flamencs i els estruços estiguin juntes, per poder gestionar totes les aus en un apartat del zoològic. De quantes maneres pot organitzar les gàbies?

c) Si vol que els lleons estiguin separats de les zebres, perquè són el seu depredador natural, quin és el nombre de combinacions?

d) Si ara apliquem els dos canvis anteriors simultàniament, quantes combinacions possibles hi ha?

JUSTIFICACIONS

▢ *Introducció*

Al llarg de la segona meitat del segon trimestre vam anar treballant a un ritme fix: cada setmana <u>cada integrant de l’equip havia de realitzar una edició del concurs</u>, que més tard, el pròxim dilluns, es posaria en comú amb tot el grup. <u>Vam anar apuntant com havíem resolt cada problema</u>, no eren tan importants els resultats com l’estructura dels exercicis. A part d’això, vam anar catalogant de quin tipus eren en un excel, per veure quines eren les temàtiques més freqüents.

En general, més o menys en cada concurs trobàvem un problema de geometria, que acostumava a tractar-se d’àrees més que d’angles i costats, i en bastants podíem veure un exercici relacionat amb la combinatòria d’alguna manera. També vam escriure categories per a tipus de resolució, com ara descartar o destriar casos per arribar al resultat, però eren minoria.

Una de les coses més repetides i importants del concurs és aparentment justificar i generalitzar, perquè en moltes edicions partíen d’un problema el qual s’anava complicant amb diferents subapartats fins que et demanava que resolguessis per qualsevol nombre. D’aquesta manera no tan sols t’assegures de que el participant ho ha entès (sobretot en casos de combinatòria) sinó que és una bona manera d’amagar la justificació del problema, així que ho hem afegit a l’esquema del nostre projecte.

Un altre detall és que tots els problemes acostumaven a tractar-se de trobar una quantitat única i definida; ben raonada i explicada però definida. Mai en cap edició ens hem trobat per exemple problemes de l’estil de: *demostra que si…* És una qualitat que hem tingut present a l’hora d’elaborar els nostres problemes.

▫ Hexàgons i abelles

Com hem dit amb anterioritat, els problemes més comuns són els de geometria, per això hem començat amb aquest. Com que els nens de segon encara no han après trigonometría, ens hem assegurat de que era un problema més aviat relacionat amb àrees i no pas amb llargades, cosa que hem pogut observar en els nostres anàlisis. Com que necessitàvem un patró que s'estengués indefinidament per generalitzar, hem escollit el polígon més bonic per treballar, l'hexàgon.

Per trobar-ne l'àrea, ens cal una dada: el perímetre. Hem trobat un triangle rectangle on tenim aquesta dada, així que, prenent les llargades que els donem i aïllant pitàgores, es pot deduir la superfície. Així poden treballar una mica amb un parell de fórmules que haurien de conèixer, la de pitàgores, per exemple ha aparegut en anteriors edicions. Després per conèixer l'àrea total, només han de multiplicar.

El següent apartat se'ls demana que generalitzin un càlcul per saber quants hexàgons es tindrien en qualsevol iteració del nostre patró. És una fórmula bastant senzilla: 1+6*(0+1+2+3… (nº de capes-1)). Cada nombre consecutiu representa una de les capes del patró, la primera és l'1. Es multiplica per sis perquè a cada nivell afegim un nou hexàgon per capa, i cada capa té sis costats.

Amb aquest apartat podem aplicar la descoberta de patrons i generalització, el concursant ha de preveure com avançarà la sèrie i fer-ne prediccions, és un model que hem pogut veure en molts dels exercicis que hem fet i per això l'hem incorporat en aquest problema.

La següent és una pregunta senzilla sobre l'equació: com que sumem 1 a l'inici, no pot haver-hi múltiples de nombres parells (això descarta el dos, el quatre i el sis) i com que al multiplicar per sis, transformem els nombres en múltiples de tres (perquè sis és **3***2), i sempre sumem 1, estem impedint que en sorgeixin (perquè perquè tornessin a ser múltiples de tres els haurien de sumar 0, 3 o un múltiple seu (3, 6...) i no 1 o 2)

Amb aquest problema treballem amb els múltiples i donem als concursants oportunitat de treballar amb la seva equació. La gràcia és que per arribar aquí han hagut de completar exitosament l'anterior apartat, així podem afegir un sentit de continuïtat a la nostra edició.

L'última pregunta convida als participants a adonar-se de que en moltes de les iteracions el còmput de la suma dels hexagons dona nombres primers, ja que totes les iteracions són 1+6*(0+1+2+3… nº de capes) , i tots els primers són múltiples de sis més o menys u (6k±1).

□ Les cartes sobre la taula

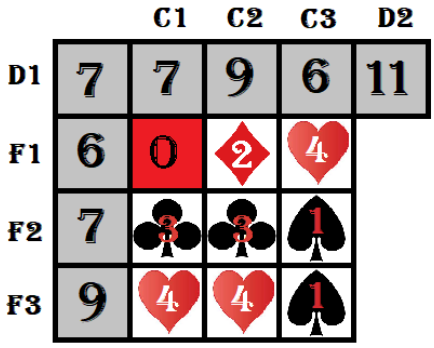
Les sumes que més infomació ens donen són *d2* i *c2*, ja que contenen tots els símbols. Només amb *d2* ja sabem els valors de trèbols (4) i cors (3), perquè per sumar 11 hem de tenir dos 4s i un 3. Observant la segona columna, descobrim que les piques valen 2 (9-4-3=2), i, tot descartant, que els rombes valen 1.

En aquest problema pensem al revés, enlloc de buscar informació estem buscant formes d'utilitzar-ne poca. Hem aprofitat per entrar en la dinàmica de joc, utilitzant unes quantitats o variants, unes regles bàsiques que les relacionen i preguntant al respecte, degut a que és un format que s'ajusta al nostre anàlisi.

Òbviament aquest és un apartat molt obert al que moltes persones diferents poden aportar moltes respostes igual de diferents, així que comentarem la nostra:

		C1	C2	C3	D2
D1	7	7	9	6	11
F1	6	?	?	♥	
F2	7	?	♣	?	
F3	9	?	♥	♠	

Hem observat que utilitzant la mateixa diagonal d'abans, deduïm que o el cor val quatre i el trèbol tres, o a l'inversa. Si provem la segona opció, tot encaixarà, però si provem la primera, arribarem a incongruències:



Com podeu comprovar només amb el trebol pot estar a la casella c1 f3. Gràcies a això sabem que la casella c1f2 és una pica. Amb tota aquesta informació ja no queden dubtes. Aquí practiquem la reducció a l'absurd, una tècnica molt comuna: suposem un fet que sospitem que és fals i, així, al veure que surten errors, podem demostrar la nostra hipòtesi. És quelcom que hem observat abans i volíem incorporar-ho.

L'últim apartat és el més obert de tots, fins i tot més que el segon, i s'utilitza per posar a prova la capacitat inventiva dels concursants i de passada els fem treballar amb el concepte de paritat, cosa intuïtiva i que sempre encaixa bé amb el format de concurs. És un problema que busca moltíssim més el procediment que el disseny final, així que és de vital importància per veure com pensen els nens que participen.

□ Animals de zoo

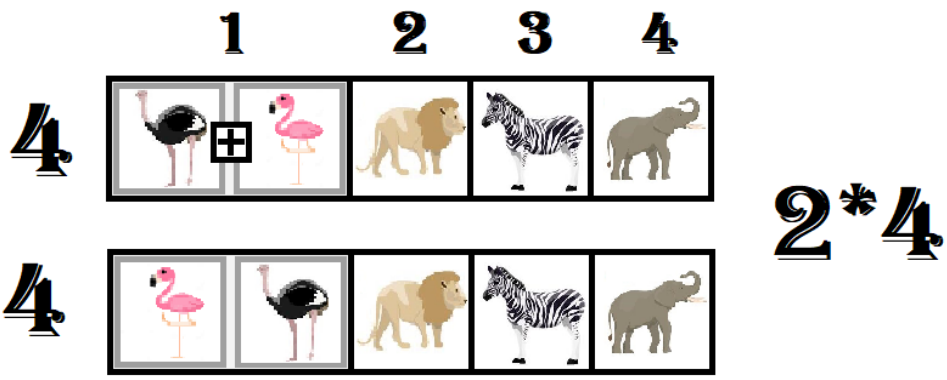
Aquest és el problema de combinatòria. És un camp que hem vist a darrers concursos i com que és un problema amb variables i condicions amb les que jugar, ens era perfecte per al projecte, tot i això va ser el més difícil.

Aquest comença fàcil, amb una petita introducció: com que tenim 5 possibles posicions per a la primera opció (5), després 4 posicions per a la segona opció per cada una d'aquestes possibilitats (5*4), 3 per a la tercera per cada possibilitat (5*4*3) i així fins l'1, ens queda la següent operació 1*2*3*4*5, també coneguda com a **5!** .

Hem fet que els concursants dedueixin el concepte de factorial sense necessitat de què el coneguin, com a demostració de la seva utilitat i naturalitat. Així poden treballar amb aquesta operació d'una manera conceptual i intuïtiva.

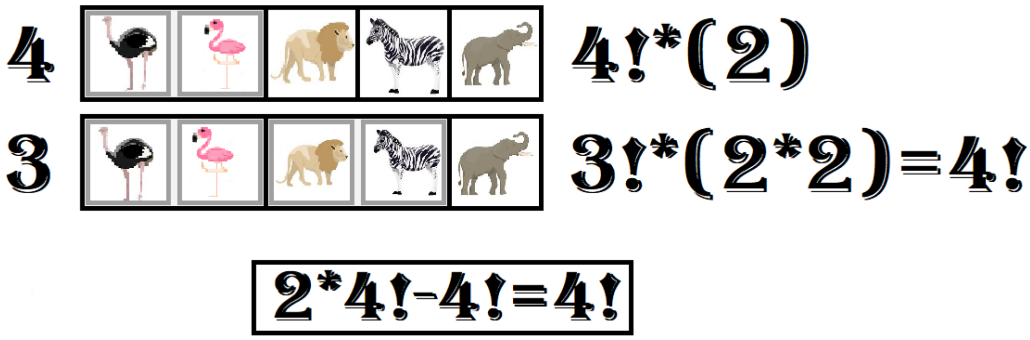
El segon apartat introdueix una nova idea: ajuntar dues de les opcions en posicions consecutives. Això s'obté tractant dues cel·les com una, com si enlloc de cinc en tinguéssim quatre (4!), però com que els animals consecutius poden estar en qualsevol ordre en la cel·la (estruç-flamenc o flamenc-estruç) s'ha de multiplicar per dos (**2*4!**). El tercer apartat és una copia del segon, però restant: si restem al total els casos en què dos animals estan junts, obtenim aquells en els que estan separats. Llavors tenim 5!-2*4!, és a dir 5*4!-2*4!, és a dir **3*4!**

Són apartats de visió matemàtica i de multiplicació, en els quals els nens aprenen a buscar maneres d'escurçar i fer la feina eficaçment, enlloc d'observar tots els casos tediosament.



Aquest últim apartat és el més divertit. Prenem la solució al segon com a base. Per continuar, restarem els casos en què els lleons i zebres estan a tocar de la nostra fòrmula: 3! (Perquè agrupem dos parells i 5-2=3) per dos (possible ordre d'estruços i flamencs) i per dos una altra vegada (ordre de lleons i zebres), és a dir, 4*3!, és a dir, 4!. Si ara restem els casos que no volem (4!) als que sí volem (2*4!), obtenim 4!.

És una barreja dels anteriors, però has de saber (o com a mínim intuir prou bé) com funcionen els factorials i el recompte de casos. Està prou bé perquè probablement hi ha diverses maneres de resoldre'l que no sospitem, degut a l'especificitat d'aquesta, cosa que potencia la diversitat de mètodes i opinions.



CONCLUSIÓ

Durant aquesta experiència, hem treballat amb una visió de les matemàtiques des d’un nou punt de vista, creant els problemes, més que resolent-los. Fent-ho, ens hem vist obligats a pensar a la inversa, cosa que ens ha ajudat a entendre millor com solucionar-los. Era una perspectiva que no havíem considerat abans, i que ha resultat ser més complicada del que esperàvem. Hem hagut d’utilitzar un pensament lateral, com hem mencionat als nostres objectius, i trencar amb la idea monòtona que moltes vegades es té de les matemàtiques.

Hem descobert que la creació de problemes es basa completament en la presentació i gens en el problema en si, ja que la majoria de contingut serà reciclat i no inventat, i simplement se’n canviarà l’estètica. Com ens va explicar el nostre tutor: De problemes bons se’n crea un a la vida. També hem descobert que acostuma a no tenir tanta importància el resultat com el procés que un ha fet per arribar-hi.

Encara que en aquest treball no hi ha ni una petita part del que preteníem al començament, estem satisfets del resultat, ja que les hores invertides en aquest projecte no són poques, al contrari, totes i cada una n’ha fomentat el desenvolupament.

El nostre objectiu era una cosa poc comú, encara que no rebuscat, havia de plaure tot el grup i complir certes expectatives.

I ara amb tot acoblat podem assegurar que per a nosaltres, cada part d'aquest projecte a valgut la pena.