FACULTAT D'EDUCACIÓ,
TRADUCCIÓ I
CIÈNCIES HUMANES

La influència dels continguts numèrics a l'hora de realitzar estratègies de càlcul mental

"Treball de Final de Grau de Mestre d'Educació Primària"

COROMINAS PALOMO, Queralt

4t curs. Treball de Final de Grau en l'itinerari de Matemàtiques (Primària M2A)

Tutora: Sònia Esteve

Facultat d'Educació – Universitat de Vic

Vic, maig de 2014

Resum. En aquesta recerca es presenta l'anàlisi de les estratègies que usen els alumnes de 4t de primària de l'escola Barnola d'Avinyó per a resoldre operacions de suma amb nombres de fins a dues xifres. A més, permet observar la seva evolució després d'haver dut a terme una unitat didàctica orientada a treballar i millorar de manera manipulativa i dinàmica, al llarg de set setmanes, els continguts numèrics. Per tant, amb els resultats obtinguts podem valorar si el fet de treballar continguts numèrics influencia en l'ús d'estratègies de càlcul mental i contrastar-ho amb diferents autors destacats en aquest àmbit.

Paraules clau: Càlcul mental, Estratègies de càlcul mental, Continguts numèrics, Suma.

Abstract. This research examines the strategies 4th grade pupils of Escola Barnola from Avinyó use to solve some adding computations with numbers until two digits. Moreover, it observes their evolution after having carried out some manipulative and dynamic activities during seven weeks to practice and improve their skills. This paper aims to assess that a practice of basic numerical facts can influence the use of reasoning strategies and also, to compare and contrast it with some important theories of mathematics authors.

Key words: Mental computation, Mental strategies, Basic numerical facts, Adding.

índex

1. Introducció

L'àrea de matemàtiques sempre ha sigut una de les meves preferides malgrat que en moltes ocasions he pensat que no eren prou significatives pel sol fet que se'ns ensenyava de manera memorística i mecànica. A l'iniciar el grau i, sobretot, les assignatures de didàctica de les matemàtiques vaig descobrir un altre enfocament d'aquesta àrea que em va cridar molt l'atenció i em va fer adonar de la gran importància de treballar les matemàtiques de manera motivant i significativa pels alumnes. Va ser per això, que no vaig dubtar ni un moment en realitzar l'itinerari de matemàtiques per tal d'acabar de consolidar el meu coneixement sobre didàctica i aprendre nous models per a treballar-ho. A més, considero que en el nostre país és necessari que els mestres comencin a adquirir i a utilitzar altres mètodes més eficaços i, començar a deixar de banda els models memorístics, mecànics i basats en algorismes tradicionals que fa tants anys que persisteixen en les nostres aules.

Per altra banda, al llarg de l'itinerari de matemàtiques se'ns ha donat molt èmfasi al fet de treballar la numeració i el càlcul a nivell manipulatiu, fomentant el raonament i deixant de banda el treball memorístic ja que és un dels continguts més útils en la nostra vida diària i que cal que en tinguem unes bones habilitats. En canvi, tenint en compte el meu passat com a alumna i, totes les metodologies que he anat observant en les diferents escoles de pràctiques, he pogut veure que tot el que hem après a la universitat dista molt de la realitat ja que el càlcul bàsicament es treballa a través del quinzet i sobre "llapis i paper" sense gairebé cap reflexió. Això em va fer pensar: "com pot ser que estiguem ensenyant actualment amb la mateixa metodologia que ho van fer els nostres pares, avis, i besavis tenint en compte com ha evolucionat la societat?. A més, diverses investigacions (Boaler, 2014; Baroody,1988; Kamii, 2010; Parrish, 2010; Van de Walle, 2010) també justifiquen la poca eficàcia de treballar de manera memorística i seguint un algorisme igual per a tots i, en canvi, el significat que té pels nens/es treballar a partir de material i permetent que per a ells mateixos elaborin diferents estratègies de càlcul i es posin en comú entre tots.

Per tant, el meu Treball de Final de Grau pretén analitzar com es treballa el càlcul mental concretament, a l'Escola Barnola d'Avinyó, en la qual vaig realitzar la meva escolaritat, tot centrant-me en 4t de primària, el grup en el qual aquest any he fet les pràctiques III. El meu objectiu doncs, és poder millorar el càlcul d'aquests nens/es a través d'una proposta pràctica utilitzant una metodologia diferent per tal de fer les matemàtiques més pròximes i significatives a aquests nens/es.

1.1 Plantejament del problema

El càlcul mental que s'ensenya a la gran majoria d'escoles del nostre país segueix una metodologia molt tradicional, completament diferent de la que defensen els grans referents a nivell matemàtic, la qual es regeix per treballar a través de material de manera significativa. Amb aquesta, el nen/a arriba a crear o desenvolupar les seves pròpies estratègies de càlcul que per a ell/a són ràpides i eficients per a calcular de manera mental sense necessitat de recórrer a un "llapis i paper" a partir de l'algorisme tradicional.

Per tant doncs, el meu treball es centra en les següents preguntes d'investigació:

- Quines estratègies usen els alumnes de 4t de primària en resoldre operacions de suma amb nombres de fins a dues xifres?
- Utilitzar una metodologia més concreta i manipulativa per a treballar continguts numèrics, provoca que els nens/es inventin estratègies de càlcul per a ells mateixos i, que per tant, millori el seu càlcul mental?

1.2 Objectius

Per dur a terme la meva recerca m'he plantejat els següents objectius que espero donar resposta a partir dels resultats obtinguts:

1. Analitzar quines estratègies usen els alumnes de 4t de primària en resoldre operacions de suma amb nombres de fins a dues xifres.
2. Elaborar una unitat didàctica a partir de la prova inicial i que permeti la millora dels continguts numèrics i l'ús d'estratègies de càlcul mental.
3. Valorar l'aprenentatge dels nens/es després d'haver dut a terme la unitat didàctica i analitzar l'ús de noves estratègies de càlcul mental repetint la prova inicial.

Per a dur a terme la recerca, doncs, primer de tot m'he estat documentant sobre què diuen alguns autors importants com per exemple, Arthur Baroody, Constance Kamii, John.A Van de Walle, Jo Boaler i Gina Kling sobre l'aprenentatge del càlcul mental. Això, ho trobareu explícit en l'apartat del marc teòric el qual està fragmentat per cinc apartats de la següent manera: introducció, com aprenen a comptar els nens/es i com adquireixen el concepte de nombre, l'aritmètica informal, les dificultats en l'ús de l'algorisme tradicional i, finalment, l'últim apartat fa referència a l'aritmètica formal en el qual trobareu descrit l'ús d'estratègies de càlcul mental, com treballar-ho a l'aula i, el material per a dur-ho a terme.

A la segona part del treball trobareu la part pràctica, en la qual he explicat la unitat didàctica dissenyada per dur a terme amb els nens/es de 4t de l'Escola Barnola d'Avinyó, per treballar i millorar el càlcul mental, i més concretament, en les operacions de suma. A continuació, he detallat la metodologia i l'instrument utilitzat per a dur a terme la meva recerca, per a recollir i analitzar les dades i així veure si aquests nens/es han deixat d'utilitzar l'algorisme tradicional per a adoptar altres estratègies més eficients i significatives per a ells/es.

Ja per acabar, en el tercer i últim apartat, trobareu les conclusions de les dades obtingudes tot contrastant-les amb les dades teòriques consultades prèviament per tal de verificar les teories dels autors més importants en aquest àmbit.

2. Marc teòric

2.1 Introducció

Després de triar el tema de recerca i d'haver llegit diversos documents (llibres i revistes) m'he adonat de la importància d'oferir múltiples situacions a l'aula, a través de material, per tal que els nens/es puguin arribar a desenvolupar i crear les seves pròpies estratègies de càlcul. Tot i així, cal tenir en compte que és una tasca molt complexa pels nens/es ja que requereix tenir un gran domini dels continguts numèrics i, per tant, una bon coneixement del concepte de nombre.

D'altra banda, cal ser conscient que l'ús de l'algorisme tradicional dificulta aquesta invenció i, a més, provoca certes dificultats d'aprenentatge en els alumnes, de manera que impossibilita el fet que els nens/es desenvolupin el pensament lògic i arribin a inventar les seves pròpies estratègies de càlcul (Baroody, 1988: 211; Kamii, 1996: 116; Van de Walle, 2010: 214). Per tant, com a docents cal tenir plena consciència del què saben els alumnes per poder-los donar les ajudes que cada un d'ells necessita per tal de poder arribar a desenvolupar aquest pensament lògic-matemàtic.

2.2 Com aprenen a comptar els nens/es i com adquireixen el concepte de nombre?

La capacitat de comptar comporta un seguit de tècniques jeràrquiques que cada cop es van fent més automàtiques i cada cop necessiten menys atenció fins al punt de poder aplicar una tècnica a altres situacions. Per poder arribar a comparar diferents quantitats de nombres, els nens/es fins als cinc anys, aproximadament, van adquirint les següents quatre tècniques (Baroody, 1988:87; Eisenhardt, Fisher, Thomas, Schack, Tassell i Yoder, 2014:500; Van de Walle, 2010:127):

- Domini de la sèrie numèrica oral: saber el nom dels nombres en l'ordre adequat. Primerament, els nens/es verbalitzen els nombres fins al 16 de manera memorística i sense sentit. Més tard, comencen a establir relacions numèrics a partir dels nombres més senzills. És a dir, sabent la seqüència de l'1 al 16, estableixen relacions per a conèixer els nombres a partir del 17. D'altra banda, quan ja saben dir quin nombre va abans que un altre són capaços de comptar enrere.

- Saber enumerar objectes: és a dir, quan disposen d'una quantitat d'objectes, saber tenir un control numèric verbal i alhora tenir consciència dels objectes comptats i no comptats. Per tant, tenir consciència d'atribuir un nombre a cada element, sense cometre errors de repetició, de deixar-se objectes per comptar, entre d'altres, de manera que quan els objectes estan desordenats o distribuïts en grups, també és important que l'alumne/a utilitzi estratègies per saber quins ha comptat i quins no.

- Saber la regla del valor cardinal: comprendre que l'últim nombre verbalitzat al final d'un procés d'enumeració representa el nombre total d'elements del conjunt, sense necessitat de tornar a comptar tots els objectes. D'altra banda, també és important que comprenguin que cada nombre té un valor i, que per tant, quan diem el nombre 5 fem referència a un conjunt de 5 objectes.

- Comprendre que la posició d'un nombre en la seqüència numèrica significa la magnitud d'aquests: és a dir, arribar a entendre que 9 és més gran que 8 i més petit que 10. Per tant, arriben a comprendre que el nombre que segueix a un altre significa "més quantitat" i el d'abans significa "menys quantitat". Tot i així, aquesta fase és una de les més complexes, ja que quan els nens/es comencen a treballar amb nombres de més d'una xifra sorgeixen varies dificultats fins que arriben a tenir-ne un ple coneixement (Baroody, 1988:199; Van de Walle, 2010: 199):

    - Primerament, els alumnes veuen els nombres com a un de sol i, per tant, els dos dígits no tenen cap significat per a ells.

- Els alumnes indentifiquen correctament les unitats i les desenes però no estableixen connexió entre els nombres individuals i el conjunt numèric. A més, arriben a poder dir quantes unitats, desenes i centenes té un nombre però de manera memorística ja que no tenen prou coneixements sobre el seu significat. També, estableixen el mateix nombre de blocs per les unitats que per les desenes.
- Transició cap al valor de posició. Del 36, el 6 és atribuït a 6 blocs i el 3 a 30 blocs en comptes de 3 blocs de 10.
- Finalment, quan arriben a entendre a la perfecció el sistema de numeració de base deu: 10 unitats són 1 desena, 10 desenes són una centena i 10 centenes són un milió i comprenen que en aquest sistema hi ha un total de deu xifres (del 0 al 9) arriben a dir que el nombre 36 està format per 3 blocs de 10 i 6 peces individuals. Tot i així, Van de Walle (2010: 195) ens dóna unes pautes per treballar aquest concepte d'una manera més útil i establint connexions entre els models, el llenguatge oral i el llenguatge escrit: no verbalitzar les unitats i només dir "4 desenes i 7". Les centenes, també és un concepte que costa molt d'entendre però cal que els alumnes el comprenguin de 3 maneres diferents: 100 objectes individuals, 10 desenes o bé un sol objecte (una centena). Primer de tot, és important utilitzar un material adequat en el qual es puguin posar les deu desenes per tal de formar la centena. Després, cal deixar que els alumnes estimin quina quantitat d'objectes hi ha i discutir-ho entre tots. A continuació, repartir-ho als alumnes perquè ho col·loquin en pots de deu i fer-ne deu grups, i així arribar a anotar "... centenes, …. desenes i …. unitats". Després, se'ls pot proposar de buscar altres maneres de representar aquest mateix nombre, o bé "podeu representar el 463 amb 31 peces amb el blocs multi base?". Quan els alumnes han practicat moltes vegades amb el material agrupable podem passar a treballar a nivell semi abstracte (la representació): punt, barres i quadrats.

Tot i això, saber comptar no és suficient per tenir adquirit el concepte de nombre i per poder comprendre els conceptes abstractes, com per exemple, sumar dos conjunts, ja que a banda dels aspectes comentats anteriorment, cal que el nen/a vagi assolint els següents principis (Baroody, 1988:110):

- El principi d'abstracció en el qual el nen/a és capaç de comptar un conjunt d'objectes malgrat tenir característiques diferents.
- El principi d'irrellevància de l'ordre, amb el qual els nens/es s'adonen que l'ordre amb el que enumeren un conjunt d'elements no efecte a la seva designació cardinal. És a dir,

l'ordre o distribució dels elements que compten no influeixen en la quantitat total d'elements.

2.3 L' aritmètica informal

Quan un nen/a ja domina aquests conceptes bàsics de comptar els elements d'un conjunt, és important plantejar-los diferents situacions o problemes a l'aula per tal que vagin desenvolupant o descobrint, per a ells mateixos, un seguit de fets aritmètics, mecanismes o pautes per a sumar i calcular diferents quantitats de nombres fins al punt que comprenen la suma com a un procés augmentatiu (afegir quelcom a una quantitat donada). (Eisenhardt, Fisher, Thomas, Schack, Tassell i Yoder, 2014: 499).

Per tant, per tal que els nens/es comencin a tenir un bon domini del càlcul és important que comprenguin, primer de tot, que sumar N+1 significa afegir un. De manera que alguns nens es basen en la seqüència numèrica i la seva representació mental, per tant, per a fer 1+3 es fixen en el nombre que va després del 3. A banda d'això, és important que estableixin una regla general de nombres consecutius i, que comprenguin que l'ordre dels sumands no altera el resultat final. Per tant, 1+3 és el mateix que 3+1 (propietat commutativa) i així poder-ho aplicar a altres situacions més complicades. Aquestes relacions es desenvolupen a partir del sentit de magnitud i de quantitat, el qual es pot treballar a partir de la recta numèrica.

Així doncs, per a realitzar operacions de suma, els nens/es comencen utilitzant objectes concrets o bé els dits de la mà. Primer, comencen comptant un per un per representar un sumand i es repeteix per al segon sumand. Llavors, es compten tots els objectes o dits per a assolir el resultat final de la suma. Mica en mica, els nens/es van elaborant estratègies que els faciliten aquesta tasca, com és el cas de les pautes digitals (cada sumand es representa amb els dits de la mà) i, ho reconeixen a cop d'ull sense necessitat de comptar dit per dit. Per exemple, per a sumar 4+5 s'adonen que tan sols els queda un dit dels deu de la mà per aixecar i, que per tant, el resultat final és 9.

Amb el temps, els nens van abandonant els procediments concrets i van inventant procediments mentals de càlcul per a resoldre operacions de suma. A l'inici, comencen comptant a partir del primer sumand, és a dir, per a 2+4 fan (1,2; 3,4,5 i 6). Això requereix portar el compte del segon sumand i, per tant, saber que 3 és un més, 4 són dos més i així successivament. Ara bé, més endavant, els nens/es s'adonen que sumar a partir del nombre més gran és més senzill.

Quan ja tenen aquestes habilitats adquirides, poden passar a realitzar altres operacions utilitzant el raonament lògic, és a dir, comencen a inventar estratègies de càlcul, com per exemple: per a fer 5+6 parteixen d'un fet conegut 5+5 i n'hi afegeixen un més. A mesura que van aplicant aquestes estratègies, les van memoritzant fins al punt d'utilitzar-les de manera sistemàtica i eficient, emetent respostes de l'estil "Ja ho sabia". (Baroody, 1988:127; Cain i Faulkner, 2012: 294; Eisenhardt, Fisher, Thomas, Schack, Tassell i Yoder, 2014: 500; Van de Walle, 2010:168)

Al llarg de l'ensenyament de les matemàtiques hem de tenir en compte els beneficis que comporta el treball i l'ús d'estratègies de càlcul respecte l'algorisme tradicional, pel fet que és més ràpid i significatiu (té més sentit) pels nens i nenes. A més, l'ús d'aquestes estratègies permet arribar a una resposta exacta, a partir del càlcul mental, i també, fer càlculs aproximats, a partir d'estimacions. Ambdues són tècniques indispensables per estimular el pensament quantitatiu, per comprovar càlculs escrits i per resoldre nombrosos problemes quotidians. Aquesta tècnica, també provoca un sentiment favorable a l'alumne/a de domini del càlcul (Baroody, 1988: 217; Van de Walle, 2010: 215).

A continuació doncs, plantejarem els efectes negatius que comporta l'ús de l'algorisme tradicional, seguidament, els beneficis en l'ús de les estratègies de càlcul i, finalment, la metodologia i el material que podem seguir per tal de treballar-ho de manera eficient.

2.4 Dificultats en l'ús de l'algorisme tradicional

Tan Van de Walle (2010: 214) com Baroody (1988: 211) coincideixen en el fet que utilitzar l'algorisme tradicional és poc significatiu i útil pels alumnes i, a més, comporta certes dificultats a nivell de procediment i raonament. El primer esmenta que, avui en dia el càlcul escrit ha anat desapareixent a causa de l'existència de les tecnologies que ens permeten calcular de manera més ràpida i eficient, sobretot quan els nombres són de més de dues o tres xifres, de tal manera que els adults en poques ocasions utilitzen paper i llapis. Tot i així, en la majoria d'escoles gairebé no es treballa a partir de la calculadora, sinó que s'acostuma a treballar utilitzant els algorismes tradicionals. Segons Baroody (1988:212) aquest càlcul escrit es realitza a partir d'una sèrie de passos o regles de procediment de manera mecànica i sistematitzada que consisteix en situar els números de manera vertical i alineats a la dreta formant una columna per les unitats, una per les desenes i una altra per les centenes, etc. Per tant, l'operació es comença a realitzar per la dreta i anar seguint cap a les xifres de l'esquerra.

Cal tenir en compte que els estudiants per a si mateixos no són capaços d'inventar l'algorisme tradicional sinó que el comencen coneixent gràcies el seu entorn (família, amics, etc) que han estat ensenyats d'aquesta manera o bé pels mateixos mestres. Cal tenir en compte, doncs, que un cop s'ha introduït aquest algorisme és molt difícil ensenyar altres mètodes i altres hàbits de càlcul.

Com a mestres és important que deixem clar que és una altra forma de càlcul (menys significativa i menys eficient) però que igualment és important que els nens/es tinguin consciència de cada pas que realitzen en utilitzar aquest mecanisme. Si es vol treballar s'ha de començar per un model concret (amb graella de deu, etc), plantejar problemes que permetin la discussió entre els alumnes i el raonament del procediment i, finalment, vincular-ho amb els símbols matemàtics (els nombres situats en columnes). Tot i així, Van de Walle (2010: 217) ens proposa un mètode molt útil per evitar que utilitzin aquest algorisme en totes les situacions: consisteix en mostrar un problema de l'estil 4568+12813 que amb l'algorisme tradicional es pugui calcular fàcilment, però llavors fer raonar als nens/es com ho resoldrien si es trobessin amb aquesta quantitat en la vida real: si agafarien un paper i llapis i ho calcularien o bé utilitzarien una calculadora. En canvi, Kamii (2010: 67) explica que una bona manera per evitar l'ús de l'algorisme tradicional és proposant una operació orientada de forma horitzontal i proposant als alumnes altres formes de càlcul i posar-ho en comú entre tots, amb l'objectiu de conscienciar a cada nen/a del valor de posició de cada nombre.

Varis autors afirmen que l'ús de l'algorisme tradicional provoca varis efectes negatius a l'alumnat pel fet que realitzen un procés sistematitzat sense raonament o comprensió. Per una banda, Van de Walle (2010: 215) afirma que l'ús de l'algorisme tradicional no permet tenir consciència de la totalitat dels nombres o del seu valor numèric, Kamii (2010: 66) ho exemplifica de la següent manera: quan sumem 45+32 veiem un 4+3 en comptes de 40+30, no permet l'aprenentatge del valor de posició i del sentit numèric.

Altres dificultats que comporta l'algorisme tradicional són (Baroody, 1988: 211; Kamii, 1996: 116):

a) Dificultats d'alineació. col·locació incorrecta de les xifres. Els alumnes que no entenen que en una operació vertical els nombres s'han de començar alineant per la dreta ens podem trobar que a l'hora d'anotar ells mateixos una operació (extreta d'un problema, per exemple) no ho facin correctament. A més, aquest mecanisme fa oblidar el valor de posició de cada nombre i per tant, arriben a pensar que el 2 del 200 equival a 2, en canvi, si pensen per a ells mateixos arriben a dir que 5x200 és 1000 en comptes de 5x0 és 0, 5x0 és 0 i 5x2 és 10. (Kamii, 1996: 117).

b) Errors sistemàtics com a conseqüència de procediments incorrectes o parcialment correctes. Moltes vegades un error sistemàtic sorgeix com a conseqüència de no haver comprès el raonament d'un algorisme. Per exemple, de vegades es diu als alumnes que al restar 0 a un nombre és com "no restar res" de manera que el primer número es queda igual que a l'inici i això en alguns casos els porta a resoldre malament operacions de l'estil (305 – 74 posant com a resultat 371) ja que consideren que del 0-7 no hi passa res.

c) Quan els procediments s'adquireixen de manera sistemàtica sense comprendre'n el significat provoca que els alumnes no estiguin segurs de quan utilitzar-los i, per tant, utilitzen els procediments apresos tan sols quan el problema es presenta de manera familiar a ells. Això pot explicar perquè hi ha alumnes que tenen èxit amb exercicis ja practicats i, en canvi, quan se'ls presenta una nova situació com per exemple, una suma disposada de forma horitzontal o amb nombres més elevats no ho sàpiguen resoldre.

d) Incapacitat per aprendre procediments sense significat: quan plantegem activitats poc significatives i poc coherents, els alumnes tendeixen a resoldre-les utilitzant de manera mecànica estratègies o procediments familiars o que anteriorment havien utilitzat o bé, se'n inventen un. Per tant, quan ensenyem un nou procediment cal assegurar-nos que tots els alumnes integrin el concepte de manera adequada.

e) L'ús de l'algorisme tradicional no permet el desenvolupament del pensament lògic ni aplicar relacions entre nombres, ja que el nen/a està obligat a seguir uns determinats mecanismes que per a ell no tenen cap significat i, per tant, resol les operacions sense sentit. A més, és un mecanisme massa complicat pels nens/es ja que implica memoritzar el resultat de sumar les unitats, les desenes i les centenes i desprès, invertir els nombres.

f) Memorització incompleta o incorrecta. Les regles que no es comprenen adequadament tan sols se'n recorda una part o bé es recorda de manera incorrecta. Per exemple, un alumne que no recordi bé i no comprengui de manera lògica la regla d'alineació dels nombres en una operació pot optar per alinear-los d'esquerra a dreta tenint en compte l'orientació amb la que llegeix, o bé, inventar-se un nou procediment tot combinant-los amb d'altres parcialment coneguts. Per tant, és important que els alumnes comprenguin els processos dels raonament que confirmen cada regla. Per a Baroody (1988: 217): l'afectivitat de cada nen/a també influeix en la resolució d'una operació, ja que quan no estan segurs del procediment a seguir i es cometen errors de manera sistematitzada o intermitent, la seva motivació i l'esforç que es vol dedicar respecte la tasca a realitzar és un aspecte clau.

g) A banda d'això, cal tenir present que el que per a nosaltres és l'algorisme tradicional per a molts altres països no és així sinó que utilitzen altres mètodes. Com a mestres cal conèixer-ho i no jutjar-ho per tal de poder entendre possibles respostes d'alguns alumnes.

2.5 L'aritmètica formal

2.5.1 L'ús d'estratègies de càlcul

Tenint en compte els aspectes negatius en l'ús de l'algorisme tradicional, cal fer referència als beneficis que diversos autors (Baroody, 1988: 218; Kamii, 1996: 114; Van de Walle, 2010: 215), exposen respecte l'ús d'estratègies de càlcul mental**:**

- Els estudiants fan menys errors ja que al llarg del procediment s'adonen del resultat que en sortirà. A més, comprenen cada pas que fan i tenen consciència del valor dels nombres.
- Al inventar una estratègia es comença per l'esquerra del nombre agafant el conjunt numèric per exemple: de 46+32 s'agafa 40 i 30, en canvi, amb l'algorisme tradicional es comença per la dreta agafant cada dígit de manera individual i no se sap el resultat fins al final de la operació. Utilitzant estratègies de càlcul, no només s'arriba a un resultat final sinó que els nens/es són capaços de raonar què han fet i perquè ho han fet ja que tenen consciència del valor de cada nombre.
- El fet d'inventar estratègies no provoca utilitzar sempre el mateix mecanisme sinó que permet adaptar-te a cada situació o a cada operació. D'altra banda, també és important que el mestre/a ajudi a l'alumne/a a saber distingir, de manera autònoma, quin càlcul (mental, escrit o amb algunes anotacions, o bé, utilitzant la calculadora) és el més adient o eficient per utilitzar tenint en compte cada cas o operació concreta, ja que tampoc podem pretendre que totes les operacions, fins i tot amb nombres de tres o quatre xifres, siguin resoltes utilitzant únicament, el càlcul mental.
- Molts mestres creuen que és un procés massa lent i que requereix massa temps. És veritat que és lent però finalment és més significatiu i queda més integrat pels nens/es que no pas l'algorisme tradicional tan memorístic com és.
- L'ús d'estratègies és més ràpid i eficient que l'algorisme tradicional.
- Augmenta la confiança a nivell matemàtic dels nens/es capaços d'inventar i utilitzar diferents estratègies.

Tot i això, per tal que els nens/es puguin arribar a desenvolupar les seves pròpies estratègies de càlcul i, per tant, tenir agilitat en el càlcul és imprescindible abans, haver treballat un seguit de continguts numèrics a través de material i de forma manipulativa. A més, també és important per evitar possibles complicacions en el càlcul a posteriori (Baroody, 1988: 211; Kling, 2011: 82; Parrish, 2010: 36; Van de Walle, 2010: 130):

- Treballar el valor de posició numèric i la seva magnitud, fer estimacions i relacions amb d'altres nombres i comprendre la disposició d'un nombre a diferents maneres. Un material que ens pot ser útil per a treballar-ho és la graella de deu o el material de base deu.
- Per tenir agilitat en el càlcul amb nombres petits cal proporcionar múltiples materials

(cartes de punts, Rekenrek, graella de deu) que permetin veure a l'alumne que un nombre es pot descomposar de múltiples maneres tot obtenint altres nombres més senzills que ens facilitin el càlcul.

- Comptar per percepció visual. Per tenir fluïdesa en el càlcul és important reconèixer un conjunt d'objectes com a una única unitat sense necessitat de comptar un per un. És a dir, saber comptar a cop d'ull. Això es pot treballar a partir del Rekenrek, la graella de deu, les cartes de punts, els daus, etc. Tot i així, Cain i Faulkner (2012: 291) assenyalen que l'ésser humà no pot comptar més de 5 elements per percepció visual. Per tant, no podem "veure" o comptar set elements a primer cop d'ull sinó que hem de fer diferents combinacions o descomposicions per arribar a comptar-ho, com per exemple, comptar de dos en dos, o de tres en tres.

- Els alumnes que mostren dificultats amb el càlcul mental sovint també mostraran dificultats a l'hora de fer estimacions en el càlcul. Per tant, caldria tenir ben assolit aquest últim contingut per poder tenir una bona agilitat en el càlcul.

- Aprendre a comptar de 5 en 5. Quan els alumnes ja comprenen que dos 5 fan 10 cal establir relacions entre els diferents nombres de l'1 al 10 respecte aquests dos nombres. És a dir, que 7 són 2 més que 5 i que en falten 3 per a 10, entre d'altres. la graella de deu és un bon material per treballar-ho.

- Fer deus. Fer grups de deu permet comprendre el valor de posició dels nombres i, alhora, aprenen la composició i descomposició del 10. És important que els nens/es practiquin diferents agrupacions de deu, com també formular-los preguntes per reflexionar sobre quantes unitats els falten per a fer un grup de 10. Segons Van de Walle (2010: 193), no podem obligar els alumnes a comptar de deu en deu, sinó que han de ser ells mateixos que comencin agrupant diferents objectes i, que finalment, s'adonin que agrupar de deu en deu és molt útil per a comptar. Una pregunta que podem utilitzar per orientar-los és: "com podríem comptar el nombre d'ulls d'una manera ràpida que no sigui un per un?". A partir de les propostes dels nens/es els orientem a que s'adonin que fer-ho de deu en deu és molt ràpid i eficient. A més, és important anar establint relacions entre els models i els signes numèrics per tal de contrastar-ho en diferents maneres. Posar la data utilitzant la graella de deu, mesurar les edats dels nens fent grups de 10 amb blocs multi base, agrupar objectes de l'aula de deu en deu, són algunes de les activitats que podem plantejar per a treballar-ho. De la mateixa manera, segons Van de Walle (2010: 170) per tal que un alumne pugui arribar a inventar una estratègia de càlcul és imprescindible, abans, haver adquirit les descomposicions del deu per després poder-ho aplicar a altres nombres que no en saben el resultat. És a dir, sabent que 7+3 són 10, podran resoldre 7+5 ja que és dos més que l'anterior.

A l'hora de seleccionar el material amb el que volem treballar (vegeu apartat 2.5.3, p.18), Van de Walle (2010:188) ens recomana tenir en compte els següents aspectes: que sigui útil (ben manejable però que no sigui perillós pels nens petits), que sigui representatiu (és a dir, un bon model ha de mostrar amb exactitud allò que es vol representar: una desena ha de ser deu vegades més gran que la unitat; però a més, que ells mateixos ho puguin fer, en comptes que els vingu donat com amb els blocs multi base ja que no poden comptar-ho d'un en un i potser no són conscients del total d'unitats que necessiten), atractiu, entre d'altres. Un material molt útil per treballar el valor de posició és el plafó dels nombres, el qual s'hauria d'introduir a P5 i a Cicle Inicial. En canvi, aquest mateix autor no recomana l'ús dels diners com a model per treballar les unitats i desenes ni el valor de posició ja que no permeten veure físicament que el 10 és 10 vegades més gran que l'1, sinó que podem utilitzar-ho quan els alumnes ja tenen adquirits els conceptes numèrics i necessiten altres recursos per a reforçar-ho, o bé amb els alumnes (més grans) que necessiten treballar el concepte d'unitats i desenes per a millorar el seu coneixement.

A banda d'això, quan treballem amb material també és important connectar-ho amb la verbalització dels nombres, la representació, i els nombres escrits. (Van de Walle, 2010: 204; Sousa, 2008: 188).

2.5.2 Com treballar el càlcul mental?

Tenint en compte aquests aspectes, també cal fer referència a la metodologia a seguir per tal que l'aprenentatge i el treball sigui significatiu i eficaç. Diferents autors (Baroody, 1988: 130; Boaler, 2004: 470; Crain i Faulkner, 2012: 294; Kamii, 1996: 111; Kling i Bay-Williams, 2014: 492; Parrish, 2010: 50; Van de Walle, 2010: 169) defensen l'ús d'una metodologia dinàmica, activa i, sobretot, que fomenti la participació dels nens/es:

- Partir diàriament, d'un problema matemàtic vinculat a un context real i interessant pels nens/es, el qual hagin de resoldre utilitzant el càlcul mental ja que d'aquesta manera tenen més consciència sobre el context i poden utilitzar múltiples estratègies (la que els vagi millor segons les necessitats de cada nen/a). A més, partint de situacions properes a ells, fomentem que els nens/es s'interessin pel que ocórrer a la vida real i això els promou a pensar, a reflexionar i, fins i tot, a adonar-se de si les seves pròpies respostes són coherents o correctes. D'aquesta manera, també s'adonen que les matemàtiques són rellevants o importants per a la seva vida quotidiana (per estimar el descompte d'un producte, per pagar la compra, per tornar el canvi, entre d'altres), (Crain i Faulkner, 2012: 294; Kamii, 1996: 111; Parrish, 2010: 48).

- Compartir estratègies i demanar als altres alumnes sobre el raonament d'un nen/a per tal d'assegurar-nos que tots parin atenció a les explicacions dels companys/es i, també examinar i decidir entre tots quina estratègia és la més apropiada respecte l'operació o problema proposat. Aquests autors ens proposen un seguit de preguntes que fomenten el raonament i la posada en comú dels coneixements de l'alumnat: "Com ho has fet? Per què has decidit fer-ho així? Per què has fet aquest pas? Com has sumat aquests nombres? etc". Cal tenir present, que és important que el docent no jutgi les respostes dels alumnes, ja que amb un simple "molt bé" ja limitaria als altres nens/es a participar i a exposar el seu punt de vista. També, seria interessant anotar un nombre a cada estratègia que hagi sortit per tal de discutir entre tots, quina és la més eficient. Van de Walle (2010: 170) proposa utilitzar plafons amb les noves estratègies que van sortint a partir d'un nom que tingui sentit per a ells com per exemple, qui l'ha proposat, juntament amb un exemple. Algunes de les estratègies per a resoldre operacions de suma són (Parrish, 2010: 58; Van de Walle, 2010: 139):

Estratègia	Com dur-la a terme?
Comptar cada nombre (un per un)	8+9 = 1,2,3 … 17
Comptar des d'un sumand	8+9 = 8,9,10...17
Fer dobles	8+9 = (8+8)+1
Fer deus	8+9= 7+ (1+9)
Fer nombres de referència	Buscar nombres que ens siguin més fàcils per a sumar (acabats en 0, acabats en 5,...) 23+48 = 23+(48+2) = 73 73-2 = 71
Compensar	Manipular els nombres per aconseguir-ne de més senzills treient una quantitat d'un sumand i afegir-ho a l'altre: 18+23 = (18+2) + (23-2) = 41
Descomposar els dos nombres en unitats, desesenes i centenes	24+38 = (20+4) + (30+8) = 62
Descomposar un dels nombres en unitats, desenes i centenes	45+28 = 45+(20+8) = 73

- Treballar les combinacions numèriques bàsiques per poder realitzar combinacions més complicades (si sabem fer 4+3=7 sabrem fer 400+300 = 700 que és més complex). Un cop es té fluïdesa en les operacions bàsiques, el nen/a pot aplicar-ho per a resoldre les més complexes, sobretot aquelles en les que intervé el 10 i, més endavant, les que intervé el 100 i el 1.000. Per exemple 10+9 = 19; 6+10 = 16; 42+10 = 52. És a dir, la addició automàtica de 10 redueix la tasca d'haver de sumar 10 unitats al sumant major o d'utilitzar l'algorisme tradicional.

- Treballar a nivell concret abans de presentar-los l'aritmètica escrita. Un cop dominen els procediments concrets el mestre/a ha de vincular-ho amb l'algorisme o amb l'abstracció per tal que l'alumne/a s'adoni que representa el mateix. Després, es vinculen aquests procediments a problemes simbòlics per tal de vincular-ho amb l'aritmètica formal. Aquest mètode, anomenat CRA, implementat per Bruner defensa el fet de treballar les matemàtiques a tres nivells (concret - representació i abstracte), sobretot per aquells alumnes amb més dificultats en les matemàtiques ja que es mou gradualment del material concret als símbols matemàtics tot passant per la representació (Sousa, 2008: 186).

- Estimular la comprovació dels càlculs escrits i el contrast dels resultats. Contrastar les solucions obtingudes d'una operació formal amb les obtingudes de manera informal ajuda als alumnes a localitzar els errors de procediment en la realització de l'algorisme i a modificar-ne els errors provocant així un aprenentatge significatiu del procediment formal.

- Estimular del procediment correcte. Quan un alumne no compren el raonament d'un procediment i l'error persisteix, el mestre ha d'intentar tornar a ensenyar el procediment però aquesta vegada d'una manera significativa per a l'infant.

- Cal tenir present, també, que ens podem trobar que no entenguem l'estratègia utilitzada pels nens/es. Per això, és important que el mestre prèviament, pensi quines estratègies poden sortir per a cada operació per tal de guanyar confiança a si mateix i a anticipar-se a les respostes dels nens/es, com també tenir present quines idees matemàtiques volem remarcar per tal que els altres nens/es puguin accedir i entendre aquestes estratègies (Parrish, 2010: 56).

- Cal tenir en compte que no podem pretendre que una estratègia s'entengui i s'utilitzi a la primera ja que sovint els alumnes l'han de practicar vàries vegades fins a fer-la seva. El més important abans d'utilitzar-la però, és comprendre-la a la perfecció. Tot i així, segons (Kling i Bay-Williams, 2014: 493) hi ha múltiples maneres per a saber què saben i què no saben els nostres alumnes:
    - Fer entrevistes per tal que l'alumne/a expliqui el què sap sobre un determinat contingut.

- ○ Observar quines estratègies utilitza cada alumne/a al llarg de les sessions o a través de jocs. Es poden fer graelles d'observació per facilitar-nos la tasca i per poder plantejar futures activitats adaptades a les necessitats dels alumnes.
- ○ Fer un diari en el qual l'alumne/a exposi de forma escrita, amb dibuixos, etc el seu coneixement i les estratègies utilitzades.
- ○ Fer proves per veure si els alumnes "ja saben" el resultat de les operacions o bé necessiten dur a terme altres procediments. En aquest últim cas, podem observar com ho fan per a resoldre-ho i per què ho fan d'aquesta manera (a través de preguntes, si cal). Per tant, podem avaluar la flexibilitat, la selecció i aplicació d'estratègies de càlcul.

- No plantejar activitats temporitzades ja que el fet de tenir un límit de temps provoca ansietat, estrés i angoixa als nens/es de tal manera que no els permet aplicar tot el coneixement, sinó tan sols allò que són capaços de recordar/memoritzar en aquell instant. En canvi, l'aprenentatge és quelcom que requereix molt temps. Per a Boaler (2004: 473): "*Aquells que són ràpids continuaran sent ràpids a nivell matemàtic i, els que són lents, encara ho seran més a causa de l'ansietat provocada per aquests tipus d'activitats."* El límit de temps també provoca una actitud negativa i desmotivant envers les matemàtiques les quals són considerades com una àrea memorística que tan sols es té en compte el resultat final dels exercicis en comptes de l'aprenentatge de cada contingut i, per tant, és una forma per a categoritzar els alumnes tenint en compte els seus resultats. Per tant, en comptes de plantejar activitats limitades, podem proposar-ne d'altres de més obertes, dinàmiques, però sobretot, a través de material.

2.5.3 Material per a treballar el càlcul mental

L'ús de material per a treballar les matemàtiques és positiu per a l'alumnat ja que promou el pensament "lliure i lògic" sense haver de seguir uns mecanismes establerts, permet enllaçar explícitament els procediments formals amb els models concrets, li permet memoritzar els fets numèrics simples, els dobles i les combinacions del deu, composar i descomposar els nombres de manera més eficient, tot construint també, les imatges dels nombres. (Kamiii, 2008 : 389; Kling, 2011: 87; Kling i Bay-Williams, 2014: 490; Parrish, 2010: 40; Van de Walle, 2010: 133):

- **Imatges de punts**

Incorporar aquest material a l'aula és útil perquè els alumnes puguin veure un mateix nombre descomposat i agrupat de diferents maneres i aprendre a fer varies combinacions. Una bona manera per a treballar-ho és deixant uns segons per mirar el material i després demanar-los "Quants punts heu vist? Com ho heu sabut?". El més adient és mostrar-los el material durant pocs segons per tal d'evitar que comptin un per un els elements i, per tant, puguin ser capaços de reconèixer un nombre com a un grup d'elements que pot ser descomposat i representat de vàries maneres.

- **Rekenrek**

És útil per desenvolupar la fluïdesa numèrica, la relació entre els nombres, saber comptar a cop d'ull, etc. Està format per dues fileres de 10 boles a cada una (distingides per diferents colors 5 i 5). El mestre pot utilitzar només una fila per treballar les sumes inferiors a 10, o bé dues fileres per treballar els nombres inferiors a 20.

- **Graella de cinc/Graella de deu**

L'objectiu és el mateix que amb el Rekenrek. Preguntes que podem fer: "Quants punts has vist? Quants en necessitem per a fer un 10? Si en traiem tres, quantes ens en queden?, etc". Amb aquestes graelles també podem plantejar activitats en les quals els mateixos alumnes representin un nombre i, també, utilitzar dues graelles en comptes d'una. Van de Walle (2010: 133) diu que ja es pot començar a treballar la graella de cinc punts a Educació Infantil. Sempre s'ha de començar treballant per la filera superior, per l'esquerra igual per on llegim. Quan la filera superior està plena, ja podem treballar la inferior i també l'esquerra.

- **Líneas de nombres**

El més adient és dibuixar una línia amb varis nombres començant pel primer sumand i així l'alumne es pot fer conscient del nombre de salts que ha de fer per arribar al resultat final. Ésútil perquè l'alumne visualitzi les accions realitzades en operar, la magnitud dels nombres i la distància entre ells.

- **El plafó dels nombres**

És un plafó amb 100 nombres que permet comptar, fer sumes i restes, treballar els grups de deu, les unitats, desenes i centenes, observar quants nombres falten fins a la següent desena, etc.

- **Cuc de 100 boles**

És un cordill que conté 100 boles disposades de diferents colors de deu en deu. Aquest material és útil per treballar la descomposició, però també, els grups de deu, el valor cardinal dels nombres, el comptatge de 5 en 5 i de 10 en 10, entre d'altres.

- **Blocs multi base**

Material per treballar les unitats, desenes i centenes i, que per tant, ens pot servir com a recurs per desenvolupar diferents estratègies de càlcul.

A banda d'aquests materials, (Kamii, 1996: 111) també defensa l'ús de jocs matemàtics com tasca diària a l'aula, per potenciar el debat en la resolució de problemes, la posada en comú de coneixement, entre d'altres i no com una tasca alternativa quan els nens/es han acabat la feina com sovint es fa en moltes escoles. A més, els jocs també permeten que els alumnes aprenguin per a ells mateixos ja que es corregeixen els uns als altres per evitar "fer trampes". Tal com diu Kamii en l'article *Arithmetic for first graders. Lacking number concepts* (2008: 394) "*L'actitud dels mestres respecte els jocs no és bona perquè afavoreix la dependència dels nens respecte l'adult."* En canvi segons l'autora, hauriem de fomentar la confiança dels nens/es per descobrir les coses i emetre els seus propis judicis, ja que estem provocant un retard en el desenvolupament de la confiança del nen en si mateix. Per altra banda, el fet d'escriure sempre fa que els nens/es centrin la seva atenció o preocupació en anotar bé els nombres. Per exemple, es preocupen per com escriure el 5 i que no es confongui per una S.

3. Aplicació Pràctica

3.1 Metodologia

L'objectiu de la meva recerca és analitzar quines estratègies usen els alumnes de 4t de primària en resoldre operacions de suma amb nombres de fins a dues xifres per elaborar una unitat didàctica a partir de la prova inicial i que permeti la millora dels continguts numèrics i l'ús d'estratègies de càlcul mental. Finalment, també pretenc valorar l'aprenentatge dels nens/es després d'haver dut a terme la unitat didàctica i analitzar l'ús de noves estratègies de càlcul mental repetint la prova inicial.

Aquest treball doncs, pretén analitzar més concretament, fins a quin punt podem canviar el càlcul mental dels alumnes de 4t de primària de l'Escola Barnola d'Avinyó canviant la metodologia en les matemàtiques la qual es caracteritza per ser molt tradicional i basada en el llibre de text (nivell abstracte) ja que en la majoria de casos la tasca de l'alumne/a és realitzar els exercicis a la llibreta en la qual tan sols ha d'escriure o anotar un seguit de símbols matemàtics i, en poques ocasions, s'utilitza la representació o el material concret per a explicar un concepte. A banda d'això, cal dir que cada setmana es dedica mitja hora per a treballar, exclusivament, el càlcul mental a través del quinzet, sense fomentar la reflexió, la verbalització de les estratègies utilitzades ni el raonament ja que tan sols es clarifiquen aquells problemes que la majoria d'alumnes han obtingut un resultat erroni. D'aquesta manera, gairebé no es valora el procediment ja que tot el valor rau en el resultat final, preguntant el nombre total de respostes encertades a cada nen/a.

Tenint en compte això, la metodologia que jo he utilitzat per a dur a terme aquesta recerca és dual: per una banda, he realitzat una recerca qualitativa orientada al canvi (investigació - acció) ja que primerament he passat una prova inicial per estudiar i avaluar els coneixements i habilitats d'un grup de nens/es en concret respecte el càlcul mental i, a partir dels resultats obtinguts he elaborat una unitat didàctica per treballar els continguts numèrics que permetés millorar les seves estratègies de càlcul. Al final de la seqüència, he tornat a passar la mateixa prova per tal d'observar i valorar l'eficàcia dels continguts treballats i analitzar l'ús de noves estratègies de càlcul mental. D'altra banda, al llarg de la unitat didàctica, he estat realitzant una observació directa i participant, ja que dia a dia he analitzat, descrit i valorat en un diari de camp l'evolució d'aquests nens/es en l'ús del càlcul mental en operacions de suma.

Aquesta recerca doncs, és descriptiva d'un únic grup d'alumnes d'un context determinat, ja que m'he centrat tan sols en els nens/es de 4t de primària, amb els quals he realitzat les pràctiques III i amb els que he dut a terme la proposta didàctica per tal d'observar i analitzar quines estratègies de càlcul utilitzen per a resoldre operacions de suma i, si aquestes milloren després d'haver treballat diferents continguts matemàtics de càlcul per tal de poder-ho comparar amb diferents referents importants d'aquest àmbit..

3.1.1 Instrument de recollida de dades

Per realitzar la recollida de dades he usat l'observació participant de tipus etnològic i l'anàlisi de documents, prenent com a referent Walker (1986: 145) i Serramona (1997: 285).

Per poder veure quins eren els coneixements previs dels alumnes i, com han evolucionat després d'haver treballat una sèrie de continguts relacionats amb el càlcul numèric, he utilitzat bàsicament l'observació participant de tipus etnològic, la qual consisteix en estudiar una col·lectiu social durant un període de temps tot participant de la seva dinàmica sense destorbar-los. A banda d'això, cal tenir en compte que per a recollir les dades de la prova inicial vaig utilitzar una gravadora de vídeo la qual vaig usar també, per enregistrar diverses situacions de l'aula, que a posteriori he transcrit a un diari de camp. Això, m'ha permès tenir una visió més detallada de l'observació que a cop d'ull potser m'hauria passat per alt. En canvi, per a recollir les dades de la prova final, vaig utilitzar les fitxes realitzades pels mateixos alumnes de manera escrita, tot fixant-me en quina estratègia havien usat per a resoldre cada operació i, més endavant, tenint en compte les estratègies més usades pels alumnes a nivell general respecte cada operació. D'aquesta manera, he pogut analitzar el seu coneixement.

A banda d'això, també he realitzat un anàlisi de documents que m'ha permès fer-me una idea sobre els fonaments teòrics de diferents autors destacats en aquest àmbit i, relacionar-ho amb els resultats que jo he obtingut a partir de la observació.

3.1.2 Procediment de recollida de dades

La meva recerca ha estat realitzada a l'Escola Barnola, situada al municipi d'Avinyó de la comarca del Bages de 2.500 habitants aproximadament, on hi ha tan sols una escola i una llar d'infants. L'Escola Barnola és un centre públic d'una sola línia creat l'any 1974 que depèn del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. En total doncs, compta de 197 alumnes i 16 mestres.

El meu estudi es centra en els alumnes de 4t de primària amb els quals he realitzat les pràctiques III. Aquest grup està format per 18 alumnes: 11 nens i 7 nenes amb grans diferències a nivell d’aprenentatge. Tot i així, he hagut d’agafar una mostra a propòsit de 16 alumnes (10 nens i 6 nenes) a causa que dos d’ells van estar malalts i no van poder realitzar la prova inicial. D’aquesta manera, vam decidir desestimar-los.

Així doncs, la primera observació de tradició qualitativa que vaig dur a terme va tenir l’objectiu de conèixer i analitzar les estratègies de càlcul mental que utilitzaven aquests nens/es per a resoldre operacions de suma i, per tant, quins continguts tenien assolits a nivell de càlcul. Per això, vaig elaborar una prova inicial (vegeu annex p. 4), amb 17 operacions de suma que vaig elaborar de manera intencionada per tal que poguessin sorgir totes les estratègies de suma i, també, tenint en compte un seguit d’ítems com: sumes d’1 xifra més 2 xifres, sumes de dues xifres portant i sumes de dues xifres sense portar i, a cada una d’aquestes categories, una o dues operacions que complissin aquests ítems: que les unitats siguin iguals i les desenes diferents, que les unitats siguin diferents i les desenes iguals, entre d’altres. Per tant, aquesta prova es va dur a terme durant els dies 9, 10 i 11 de desembre de 2013. Abans de realitzar la prova doncs, la tutora del grup va fer grups heterogenis de 4-5 alumnes per realitzar l’activitat en un període de 30-45 minuts. Cada nen/a tenia una fitxa amb les operacions orientades de manera horitzontal: primer, n’anotaven el resultat de forma escrita i, a continuació, sortien a la pissarra a explicar com ho havien resolt mentre jo els gravava amb una càmera de vídeo per tal de tenir constància de cada un dels passos que realitzaven. Cal dir que en tot moment vaig participar activament de la dinàmica de l’aula tot formulant preguntes que fomentessin el raonament de l’alumnat, de l’estil: “Com heu resolt aquesta operació?, Ho heu fet tots així? Algú ho ha fet diferent? Heu entès el que ha explicat el vostre company/a? Algú se li acudeix una altra manera de fer-ho?, entre d’altres”.

Gràcies a les gravacions de vídeo i de les explicacions dels mateixos nens/es vaig poder anota de manera general les estratègies que més abundaven a l’aula i els continguts que calia reforçar. Per tant, en veure que l’algorisme tradicional era el més comú entre aquests nens/es vaig decidir elaborar una seqüència didàctica (vegeu model activitats annex p.4-18) que em permetés treballar diferents continguts que intervenen a l’hora de resoldre diferents operacions de suma a través del càlcul mental, basant-me en els següents objectius:

1. Millorar els fets numèrics simples per a resoldre operacions de càlcul mental.
2. Millorar els fets numèrics més complicats per a resoldre operacions de càlcul mental.
3. Adquirir les destreses bàsiques per descomposar nombres en unitats, desenes i centenes.
4. Millorar les estratègies de càlcul mental (descomposició, fer dobles i fer deus) per arribar a tenir fluïdesa en el càlcul.
5. Aprendre a seleccionar, utilitzar i desenvolupar les diferents estratègies de càlcul mental

adequades a cada operació de suma.

6. Saber utilitzar el material i la representació per establir significat en els processos matemàtics i arribar a sistematitzar-ho a nivell abstracte.
7. Saber identificar i comunicar de manera clara i coherent les estratègies o procediments utilitzats en fer càlcul mental.
8. Saber treballar de manera cooperativa i mostrar una actitud respectuosa i responsable davant els companys/es.

A partir d'aquests objectius vaig plantejar dos blocs d'activitats que vaig dur a terme al llarg de set setmanes (del 3 de febrer al 21 de març de 2014) i que vaig analitzar a partir d'una observació participant i, també, a través de les tasques realitzades pels mateixos alumnes:

En el primer bloc, vaig plantejar diverses activitats orals, manipulatives, dinàmiques i graduals per a dur a terme de forma diària al llarg de períodes de 10-15 minuts, per treballar bàsicament, els continguts numèrics com: els fets numèrics simples, les descomposicions dels nombres, els dobles, la propietat commutativa i, els fets numèrics més complicats. Per a més informació: (vegeu annex p.2). Per a realitzar-les, vam utilitzar diferent material matemàtic com el cuc de 100 boles, el Rekenrek, les graelles de deu i les targetes de nombres. La dinàmica utilitzada en aquestes activitats era molt semblant entre elles ja que en tot moment es fomentava el diàleg, el raonament, l'escolta activa, l'intercanvi de coneixements i, sobretot, la participació activa de l'alumnat per tal que construïssin coneixement per a ells mateixos a través de preguntes de l'estil: "Com heu sabut el resultat? Com ho heu fet? Algú ho ha fet diferent? Sabríeu dir una altra manera per a descomposar aquest nombre?, entre d'altres".

El segon bloc d'activitats, estava format per 4 tasques les quals es van dur a terme, aproximadament, durant vuit sessions. L'objectiu de la primera activitat era treballar les agrupacions de deu i comprendre el concepte d'unitat, desena i centena, contingut essencial per a poder calcular mentalment amb eficàcia, a través de material agrupable, la representació i, finalment, l'anotació escrita o abstracció. Per a dur-ho a terme, vam fer grups heterogenis per tal que els nens/es poguessin discutir entre ells com agrupar diferents quantitats i aprendre a descomposar-ho en unitats, desenes i centenes. Cal dir, que en tot moment es va fomentar la reflexió i la posada en comú de les respostes.

En la segona activitat, per tal de consolidar aquest coneixement sobre la descomposició, vam realitzar una oca matemàtica durant una sessió d'una hora, també en grups heterogenis, en la qual els alumnes havien de respondre un seguit de preguntes sobre la descomposició en unitats, desenes i centenes tot resolent-se els dubtes entre ells, amb l'ajuda de material o, fins i tot, amb l'ajuda d'altres companys/es.

En la tercera activitat i al llarg de tres sessions d'una hora, vam començar a treballar de manera més específica les diferents estratègies de suma. Cada alumne/a tenia un seguit d'operacions (disposades de manera horitzontal) que havia de resoldre una per una. Primerament, vaig dissenyar dos nivells d'activitats: fàcil i difícil, però finalment tenint en compte el nivell dels alumnes, es va decidir utilitzar, tan sols, el nivell més elevat. Cal tenir en compte que es deixava un temps prudencial perquè tots els nens/es acabessin de resoldre una suma per poder-la posar en comú entre tots. Per tant, un nen/a sortia a la pissarra a anotar la seva estratègia utilitzada i ho explicava als seus companys/es, els quals aportaven també el seu coneixement o la seva estratègia emprada. En cas que fos convenient, sense donar cap resposta com a incorrecta, recorríem al material matemàtic per a fer més significativa cada operació. Cal tenir en compte, que per a aquells alumnes més ràpids se'ls plantejava que busquessin altres estratègies per a obtenir el resultat. També destacar, que a mesura que anaven apareixent les diferents estratègies de suma, es proposaven altres operacions per clarificar-ho i, es penjava un plafó a la paret de l'aula per tal que ho poguessin consultar quan fos necessari.

En la quarta i última activitat, es va passar de manera individual, escrita i a l'aula ordinària, la mateixa prova que la inicial. Així doncs, al llarg d'una hora cada nen/a havia de resoldre les sumes de la manera que fos més còmode per a ells/es. Els més ràpids, també van tenir la oportunitat d'anotar una altra forma d'arribar al resultat. En aquesta activitat més aviat vaig utilitzar una observació no participant ja que en cap moment vaig intervenir en la dinàmica de l'aula ni en la resolució de la fitxa ja que m'interessava veure com resolien cada operació de manera individual. Per tant, he sigut jo mateixa qui ha analitzat cada nen/a quina estratègia ha utilitzat per a cada operació i, més concretament, les estratègies més utilitzades per a cada suma tot contrastant-ho amb la prova inicial.

Per recollir les dades i per poder veure l'evolució de cada nen/a respecte la prova inicial de la final, vaig realitzar un registre continu i tancat tot anotant els aspectes més significatius o més útils per poder valorar el grau de coneixement d'aquests alumnes. Per tant, vaig realitzar una taula de registre que em va permetre categoritzar les dades segons les estratègies utilitzades i fer-ne una anàlisi i, una posterior, interpretació.

A banda d'això, al llarg de les rutines diàries de 10-15 minuts que treballàvem, bàsicament a través de material, vaig utilitzar un diari de camp en el qual anotava les activitats que jo proposava i, les aportacions dels nens/es (dades qualitatives) a través d'un registre continu (anotant els fets significatius o rellevants), com per exemple: com descomposaven els nombres, les respostes que em deien, les seves aportacions, com manipulaven el material, entre d'altres. Sovint, com que no podia fer-ho de manera escrita, m'ajudava d'una gravadora de vídeo i, després, ho transcrivia a l'ordinador. Gràcies a aquest diari, vaig poder fer un anàlisi general sobre l'evolució dels aprenentatges dels nens/es al llarg d'aquestes sessions.

Finalment, per tal d'obtenir les dades de la prova final em vaig fixar, únicament, en com havia resolt de forma escrita i de manera individual cada nen/a cada operació proposada i, per tant, quina estratègia havia utilitzat. A més, també vaig analitzar quines estratègies eren les més usades pels alumnes respecte cada operació. Aquestes dades les vaig enregistrar i classificar jo mateixa, a posteriori, en unes graelles per poder observar les estratègies utilitzades i fer-ne una anàlisi i, una posterior, interpretació sobre el grau d'aprenentatge d'aquests nens i nenes.

3.2 Anàlisi de dades

3.2.1 Anàlisi per alumne/a

Tal com he esmentat anteriorment, per poder identificar i analitzar de manera més clara les estratègies utilitzades pels alumnes en resoldre operacions de suma amb nombres de fins a dues xifres i, sobretot, per poder veure l'evolució de la prova inicial amb la final, vaig atribuir una escala de colors per a cada estratègia que em va servir per anotar i analitzar, de manera més visual, quines eren les estratègies més utilitzades per a cada nen/a (sense anotar-ne el nom, sinó un nombre) i l'evolució respecte les dues proves (vegeu annex p.19).

A continuació doncs, hi ha anotat quines estratègies de càlcul mental ha usat cada nen/a per a resoldre la prova inicial i la final independentment de la operació en la que ho ha fet. Cal tenir en compte, que en cas que algun alumne/a hagi comès algun error en el procediment o en el càlcul d'alguna operació, s'especificarà en color vermell.

Algorisme tradicional començant per la dreta
Algorisme tradicional començant per la esquerra
Decomposant un dels nombres
Descomposant tots dos nombres
Descomposant un dels dos nombres + dobles
Descomposant tots dos nombres + dobles
Fer deus
Nombres de referència

Nombres de referència + dobles
Compensant
Compensant + dobles
Compensant + Descomposant
Fet numèric conegut
Comptant amb els dits

També hi ha alumnes que usen d'altres procediments que no són cap dels anteriors i que són incorrectes. Aquests, s'especificaran de la següent manera:

Resolt amb un procediment incorrecte que no és cap dels anteriors

Alumne/a 1	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	10	1
Algorisme tradicional començant per la esquerra	3	
Decomposant un dels nombres	2	1
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		6
Fer deus		4
Nombres de referència		1
Compensant		1
Fet numèric conegut	2	2
TOTAL	17	17

A la prova inicial usa de forma majoritària l'algorisme tradicional (en 13 de les 17 operacions) i en canvi a la prova final només l'usa una sola vegada. A la prova inicial usa en dos ocasions un fet numèric conegut per a resoldre operacions on el resultat és inferior a 20, igual que en la prova final. A la prova final usa majoritàriament la descomposició (en 7 operacions) i en canvi a la prova inicial només l'usa en dues ocasions.

A la prova final també fa deus en 4 operacions i usa nombres de referència i compensa en una operació cadascuna.

Alumne/a 2	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	15	
Decomposant un dels nombres		2
Descomposant tots dos nombres		4
Descomposant tots dos nombres + dobles		4
Nombres de referència		3
Nombres de referència + dobles		1
Fet numèric conegut	2	2
Comptant amb els dits		1
TOTAL	17	17

A la prova inicial usa l'algorisme tradicional en tots els casos excepte en dos que usa un fet numèric conegut.
A la prova final en canvi no usa l'algorisme tradicional i usa la descomposició (en 10 ocasions) i nombres de referència (en 4 ocasions).
Finalment, per a 18+2 que a l'inici resolia amb l'algorisme tradicional, a la prova final ha usat els dits.

Alumne/a 3	Prova inicial	Prova final
Decomposant un dels nombres	8	6
Descomposant tots dos nombres + dobles	2	1
Nombres de referència	1	5
Nombres de referència + dobles		1
Compensant + dobles		2
Fet numèric conegut	6	2
TOTAL	17	17

En la prova inicial predomina la descomposició d'un nombre i els fets numèrics coneguts i, en canvi, en cap moment ha utilitzat l'algorisme tradicional.
A la prova final, continuen abundant les descomposicions dels nombres, a banda dels nombres de referència (en 5 operacions). També usa la compensació en 2 operacions.

Alumne/a 4	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	12	8
Algorisme tradicional començant per la esquerra	1	
Nombres de referència	1	6
Fet numèric conegut	2	
Comptant amb els dits	1	2
Resolt amb un procediment incorrecte que no és cap		1
TOTAL	17	17

Per resoldre la prova inicial aquest alumne ha usat majoritàriament l'algorisme tradicional i per sumes on el resultat és inferior a 20 ha partit dels fets numèrics coneguts. Aquests dos últims però, no corresponen amb la prova final en els quals ha utilitzat altres estratègies per arribar al resultat. En aquesta última prova, malgrat que encara hi ha un gran domini de l'algorisme tradicional (en 8 de 17 operacions) i el comptatge amb els dits (en 2 de 17 operacions), ha augmentat l'ús de nombres de referència (només en una operació a la prova inicial i 6 a la prova final).

Alumne/a 5	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	11	
Algorisme tradicional començant per la esquerra	1	
Decomposant un dels nombres		1
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		4
Fer deus		2
Nombres de referència	1	3
Compensant		1
Fet numèric conegut	4	4
TOTAL	17	17

En la prova inicial, aquest nen ha partit dels fets numèrics coneguts per a resoldre 4 sumes que no corresponen amb les 4 de la prova final en les quals ha seguit aquesta metodologia. Per altra banda, en 12 operacions de la prova inicial ha utilitzat l'algorisme tradicional i, en canvi, en la prova final en cap ocasió ja que ha utilitzat altres estratègies alternatives com: fer nombres de referència (en 3 operacions), la descomposició dels nombres (en 7 operacions) i fer deus (en 2 operacions).

Alumne/a 6	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	14	
Algorisme tradicional començant per la esquerra	1	
Decomposant un dels nombres		3
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		6
Fer deus		3
Fet numèric conegut	2	2
Comptant amb els dits		2
TOTAL	17	17

En la prova inicial hi ha un gran predomini de l'algorisme tradicional en 15 casos de 17, però en canvi, en la prova final en cap moment ha partit d'aquest procediment, ja que per exemple, ha utilitzat la descomposició dels nombres o fer deus. Per altra banda, en dos casos (8+2 i 86+5) els quals en la primera prova ha obtingut el resultat per a fet numèric conegut o amb l'algorisme tradicional, en aquesta última prova, ha utilitzat el comptatge partint del nombre més gran.

Alumne/a 7	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	8	
Algorisme tradicional començant per la esquerra	2	1
Decomposant un dels nombres	3	2
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		2
Fer deus	1	2
Nombres de referència		2
Nombres de referència + dobles		1
Compensant		1
Fet numèric conegut	3	5
TOTAL	17	17

A la prova inicial predomina l'algorisme tradicional en 10 casos de 17 i, en canvi, a la prova final tan sols l'utilitza per a resoldre 30+60.

A la prova inicial, també ha utilitzat la descomposició d'un nombre i ha partit, també, dels fets numèrics coneguts. En canvi, a la prova final, l'ús dels fets numèrics coneguts ha augmentat i, l'ús de la descomposició ha disminuït ja que ha començat a utilitzar altres estratègies com fer nombres de referència o compensar.

Alumne/a 8	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	14	3
Algorisme tradicional començant per la esquerra	1	1
Descomposant un dels nombres		3
Descomposant tots dos nombres + dobles		1
Fer deus		1
Nombres de referència		1
Nombres de referència + dobles		1
Fet numèric conegut	2	3
Resolt amb un procediment incorrecte que no és cap		3
TOTAL	17	17

En la prova inicial aquesta alumna ha resolt totes les operacions excepte dues a partir de l'algorisme tradicional. A la prova final, en canvi, tan sols ha utilitzat aquest mecanisme en 4 casos. D'altra banda, en aquesta última prova ha començat a usar d'altres estratègies com la descomposició d'un nombre i, en casos molt esporàdics els nombres de referència i fer deus.

Alumne/a 9	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	12	
Algorisme tradicional començant per la esquerra	1	
Descomposant un dels nombres		3
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		5
Fer deus		4
Nombres de referència + dobles		1
Fet numèric conegut	4	3
TOTAL	17	17

En la prova inicial predomina bàsicament l'algorisme tradicional (en 13 de 17 casos) i, la resta d'operacions les ha resolt partint dels fets numèrics coneguts. En canvi, no hi ha cap operació de la prova final que utilitzi l'algorisme tradicional per obtenir-ne el resultat ja que majoritàriament ha utilitzat la descomposició d'un o dos nombres, fer deus i, fer nombres de referència.

Alumne/a 10	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	13	
Algorisme tradicional començant per la esquerra	1	
Descomposant tots dos nombres + dobles		2
Nombres de referència		3
Nombres de referència + dobles		2
Compensant + dobles		3
Compensant + Descomposant		1
Fet numèric conegut	3	6
TOTAL	17	17

En la prova inicial aquest nen ha utilitzat l'algorisme tradicional excepte en tres casos, en els quals en dos d'ells el resultat era inferior a 20, que ha partit d'un fet numèric conegut.
A la prova final, l'ús dels fets numèrics coneguts ha augmentat en 6 de 17 operacions i, també, l'ús d'altres estratègies com la descomposició, fer nombres de referència i compensar les quals no havia utilitzat cap cop en la primera prova.

Alumne/a 11	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	10	
Decomposant un dels nombres	3	5
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		3
Fer deus		2
Nombres de referència	1	4
Nombres de referència		1
Nombres de referència + dobles	1	1
Fet numèric conegut	2	
TOTAL	17	17

En la prova inicial hi predomina l'algorisme tradicional (10 de 17 casos) i, en canvi, a la prova final no l'ha usat cap cop. D'altra banda, en la primera prova ha utilitzat d'altres estratègies com fer nombres de referència o descomposar un dels nombres les quals ha usat amb més abundància en la segona prova.

Alumne/a 12	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	13	
Decomposant un dels nombres		1
Descomposant tots dos nombres		3
Descomposant tots dos nombres.		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		5
Fer deus		1
Nombres de referència		3
Compensant		1
Fet numèric conegut		2
Comptant amb els dits	4	
TOTAL	17	17

Per a resoldre la prova inicial aquesta nena ha utilitzat bàsicament l'algorisme tradicional (en 13 de 17 casos) i, en els altres 4 casos restants, el comptatge amb dits. A la prova final no ha utilitzat cap cop aquestes estratègies, però en canvi, ha resolt les operacions a partir de la descomposició o bé fent nombres de referència. Tan sols per a 64+26 l'estratègia de fer deus. Cal destacar, que en aquesta última prova (18+2 i 30+60) els ha resolt a partir dels fets numèrics coneguts quan en canvi, a la prova inicial ho havia fet a partir de l'algorisme tradicional.

Alumne/a 13	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	12	
Decomposant un dels nombres		3
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres.		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		4
Fer deus		2
Nombres de referència + dobles		2
Compensant		1
Compensant + dobles		1
Fet numèric conegut	5	1
Resolt amb un procediment incorrecte que no és cap		1
TOTAL	17	17

En la major part d'operacions de la prova inicial aquesta nena ha utilitzat l'algorisme tradicional i, en els altres cinc càlculs, en canvi, ha utilitzat els fets numèrics ja coneguts per a ella. Pel que fa la prova final, bàsicament parteix de la descomposició dels nombres i fer deus i, en dos casos (2+8 i 11+8) ha utilitzat la compensació.

Alumne/a 14	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	11	
Algorisme tradicional començant per la esquerra	1	
Decomposant un dels nombres	1	3
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles	1	5
Fer deus	1	
Nombres de referència		3
Nombres de referència + dobles		1
Compensant		2
Compensant + dobles		1
Fet numèric conegut	2	1
TOTAL	17	17

En la prova inicial aquest alumne ha resolt dotze operacions utilitzant l'algorisme tradicional, excepte en dos casos que ha utilitzat la descomposició dels nombres, en un altre (64+26) ha utilitzat fer deus i, en dos altres, en els quals el resultat era inferior a 20, ha partit dels fets numèrics coneguts. En canvi, a la prova final en cap moment ha partit de l'algorisme tradicional i, tan sols per a 2+8 ha usat els fets numèrics coneguts. Les altres operacions doncs, les ha resolt a partir de la descomposició, fent nombres de referència o compensant.

Alumne/a 15	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	9	
Algorisme tradicional començant per la esquerra	3	
Decomposant un dels nombres	1	1
Fer deus	1	2
Nombres de referència		4
Nombres de referència + dobles		1
Compensant		1
Compensant + dobles		3
Fet numèric conegut	3	5
TOTAL	17	17

En la prova inicial aquest nen ha utilitzat l'algorisme tradicional en 12 de 17 casos i, en la prova final en cap moment l'ha usat. Pel que fa a l'ús dels fets numèrics coneguts ha augmentat ja que en la prova final l'ha utilitzat dues vegades més. Per altra banda, en aquesta última prova també ha utilitzat, en cinc casos, els nombres de referència i, en d'altres tres, la compensació.

Alumne/a 16	Prova inicial	Prova final
Algorisme tradicional començant per la dreta	13	
Algorisme tradicional començant per la esquerra	1	
Decomposant un dels nombres	1	4
Descomposant tots dos nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles		3
Fer deus		2
Nombres de referència		1
Nombres de referència + dobles		1
Compensant		2
Fet numèric conegut	2	3
TOTAL	17	17

En la prova inicial aquesta alumna majoritàriament ha utilitzat l'algorisme tradicional i, en tan sols dues operacions en les quals el resultat era inferior a 20, ha utilitzat els fets numèrics coneguts i, en una (84+5) la descomposició d'un nombre. Per contra, en la prova final no ha utilitzat en cap cas l'algorisme tradicional fet pel qual abunden altres estratègies com la descomposició, els fets numèrics coneguts i compensació.

3.2.1.1 Resultats obtinguts en l'anàlisi per alumne/a

A partir dels resultats obtinguts en aquest anàlisi de les estratègies utilitzades per a cada nen/a en ambdues proves, podem precisar encara més a partir de la següent taula, en la qual s'ha fet un buidatge de les dues o tres estratègies més usades per a cada nen/a en les dues proves per poder veure, de manera més clara i precisa, l'evolució de tots els alumnes a nivell general en l'ús d'estratègies de càlcul. Per això, a la columna de l'esquerra, s'ha especificat també quins nens/es en concret han realitzat cada progrés.

Prova inicial	Prova final	Nº de nens	Alumnes
Ús majoritari de l'algorisme tradicional + Fets numèrics coneguts	Ús majoritari de la descomposició i ús d'altres estratègies	4 alumnes	2, 6,9 i13
	Ús minoritari de la descomposició. En canvi, usa en major proporció els fets numèrics coneguts, els nombres de referència i la compensació	1 alumne	10
	Ús de la descomposició i d'altres estratègies. Encara hi ha operacions resoltes amb l'algorisme tradicional	1 alumne	8
Ús majoritari de l'algorisme tradicional + d'altres estratègies en menor proporció	Ús majoritari de la descomposició	4 alumnes	5, 11, 14 i 16
	Ús força similar de diferents estratègies com els fets numèrics coneguts, nombres de referència i compensació	1 alumne	15
	Ús de diferents estratègies malgrat que en algunes operacions encara utilitza l'algorisme tradicional	3 alumnes	1, 4 i 7
Ús majoritari de l'algorisme tradicional + comptatge	Ús majoritari de la descomposició i ús d'altres estratègies	1 alumne	12
Ús majoritari de la descomposició + fets numèrics coneguts	Ús força semblant entre la descomposició i els nombres de referència	1 alumne	3
Total d'alumnes		16	16

Tenint en compte les 17 operacions que els alumnes van realitzar a través de dues proves (inicial i final) podem concloure que:

- Dels sis alumnes que a la prova inicial van resoldre la gran major part de les operacions a partir de l'algorisme tradicional i, algunes a partir dels fets numèrics coneguts, 5 d'ells a la prova final ja no usen l'algorisme tradicional. Dos terços d'aquests alumnes han optat per utilitzar en més abundància la descomposició dels nombres. N'hi ha un que usa els fets numèrics coneguts i també d'altres estratègies de càlcul.

- Dels vuit alumnes que en la prova inicial ja utilitzaven, de manera esporàdica, alguna estratègia de càlcul, a banda de l'algorisme tradicional, quatre d'aquests han optat per resoldre les operacions de la prova final utilitzant la descomposició dels nombres i, tan sols un alumne/a ha utilitzat vàries estratègies de càlcul. Finalment, tornem a veure com en tres casos encara apareix l'algorisme tradicional de manera ocasional.
- L'únic alumne/a que en la prova inicial resolia les operacions a partir de la descomposició i de fets numèrics coneguts, en la prova final ha continuat utilitzant la descomposició, tot adoptant noves estratègies de càlcul.

3.2.2 Anàlisi per operacions

Fins al moment, hem vist l'anàlisi de les estratègies utilitzades de cada nen/a tan a la prova inicial com a la final. A continuació, trobem l'anàlisi de les operacions realitzades. És a dir, tenint en compte diferents ítems com: sumes portant o no portant, unitats i desenes iguals, unitats i desenes diferents, entre d'altres, he enregistrat el nombre d'alumnes que ha utilitzat cada estratègia. D'aquesta manera he pogut observar, a nivell general, quines estratègies s'han utilitzat en més freqüència independentment de l'alumne/a, com ha evolucionat el càlcul mental de cada nen/a de manera individual respecte la prova inicial de la final i, a trets generals, si han deixat d'utilitzar l'algorisme tradicional i, en cas afirmatiu, per a quines estratègies han optat.

Estratègies	Sumes d'1 xifra amb el resultat inferior a 20			
	8+2		10 +5	
	Prova Inicial	Prova Final	Prova Inicial	Prova Final
Algorisme tradicional començant per la	1		2	
Nombres de referència			1	3
Nombres de referència + dobles		1		1
Compensant		1		
Compensant + dobles		1		
Fet numèric conegut	14	11	13	11
Comptant amb els dits	1	2		
Resolt amb un procediment incorrecte que				1
Total	16	16	16	16

Observem en ambdues operacions que la opció majoritària a la prova inicial és un fet numèric conegut. En un cas hi ha un alumne que usa l'algorisme tradicional i en l'altre dos. En canvi a la prova final el nombre d'alumnes que usa un fet numèric conegut disminueix i sorgeixen altres estratègies, compensar i nombres de referència.

Estratègies	Sumes d'1 + 2 xifres sense portar-ne			
	84+5		11+8	
	Prova Inicial	Prova Final	Prova Inicial	Prova Final
Algorisme tradicional començant per la	11	1	10	
Decomposant un dels nombres	2	8	3	9
Descomposant tots dos nombres.		1		
Nombres de referència	1	6		3
Compensant				3
Fet numèric conegut	1		1	1
Comptant amb els dits	1		2	
Total	16	16	16	16

En ambdues operacions abunda l'ús de l'algorisme tradicional per a resoldre la prova inicial. En la prova final, en canvi, majoritàriament s'usa la descomposició d'un dels nombres i també, els nombres de referència (en la primera operació l'utilitzen 6 nens/es i, en la segona, tan sols 3).

	Sumes d'1 + 2 xifres portant-ne			
	18+2		86+5	
Estratègies	Prova Inicial	Prova Final	Prova Inicial	Prova Final
Algorisme tradicional començant per la	8		11	1
Decomposant un dels nombres	1		1	3
Fer deus	2	6		2
Nombres de referència		2	1	9
Fet numèric conegut	5	5	2	
Comptant amb els dits		2	1	1
Resolt amb un procediment incorrecte que		1		
Total	16	16	16	16

En ambdues operacions podem observar que en la prova inicial hi ha un gran predomini de l'algorisme tradicional però també, per a 18+2 un gran nombre d'alumnes que han partit dels fets numèrics coneguts en les dues proves. D'altra banda, en la segona operació veiem una evolució cap a l'ús de nombres de referència i la descomposició.

	Sumes de 2 xifres sense portar-ne on les U són iguals i les D diferents			
	24+74		30+60	
Estratègies	**Prova Inicial**	**Prova Final**	**Prova Inicial**	**Prova Final**
Algorisme tradicional començant per la	14	2	2	
Algorisme tradicional començant per la			11	2
Decomposant un dels nombres	2	1		
Descomposant tots dos nombres		3		
Descomposant tots dos nombres + dobles		8		
Nombres de referència		1	1	5
Nombres de referència + dobles			1	3
Compensant		1		
Fet numèric conegut			1	6
Total	16	16	16	16

En la resolució d'aquestes dues operacions en la prova inicial trobem dos trets en comú: la majoria d'alumnes les han resolt utilitzant l'algorisme tradicional, però amb la diferència que en la primera ho han fet començant per la dreta i, en canvi, la segona per l'esquerra, segurament pel fet que aquesta última els dos sumands acaben en 0.

Pel que fa a la prova final, la majoria d'alumnes han optat per a resoldre la primera operació utilitzant la descomposició i els dobles i, en canvi, en el segon cas, han partit dels fets numèrics coneguts i, també, dels nombres de referència.

- **Sumes de 2 xifres sense portar-ne**

	On les U són diferents i les D iguals			
	22+26		12+13	
Estratègies	**Prova Inicial**	**Prova Final**	**Prova Inicial**	**Prova Final**
Algorisme tradicional comencant per la	14	1	15	
Decomposant un dels nombres	2		1	2
Descomposant tots dos nombres		1		
Descomposant tots dos nombres + dobles		9		10
Nombres de referència		1		
Nombres de referència + dobles				2
Compensant + dobles		3		
Fet numèric conegut				1
Resolt amb un procediment incorrecte		1		1
Total	16	16	16	16

Els resultats obtinguts en aquestes dues operacions són molt similars entre ells ja que per a la prova inicial l'estratègia més usada és l'algorisme tradicional i, en canvi, per a la prova final només un alumne/a l'ha usat per a resoldre la primera operació. D'aquesta manera doncs, l'estratègia més usada en la última prova, per ambdues operacions, és la descomposició de tots dos nombres i dobles.

	On les U i les D són iguals	
	22+22	
Estratègies	**Prova Inicial**	**Prova Final**
Algorisme tradicional començant per la	9	1
Decomposant un dels nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles	1	8
Nombres de referència + dobles		1
Fet numèric conegut	6	4
Resolt amb un procediment incorrecte que		1
Total	16	16

A la prova inicial les estratègies més usades són per ordre: l'algorisme tradicional i un fet numèric conegut. En canvi a la prova final només un alumne usa l'algorisme tradicional i la majoria ha usat la descomposició. El nombre d'alumnes que usa un fet numèric conegut és força similar.

	On les U i les D són diferents			
	13+24		23+40	
Estratègies	**Prova Inicial**	**Prova Final**	**Prova Inicial**	**Prova Final**
Algorisme tradicional començant per la	14	1	14	
Decomposant un dels nombres	2	2	2	11
Descomposant tots dos nombres		9		
Nombres de referència		2		3
Nombres de referència		1		
Nombres de referència + dobles		1		
Compensant				1
Compensant + Descomposant				1
Total	16	16	16	16

Per a aquestes dues operacions podem veure que el mateix nombre d'alumnes han utilitzat l'algorisme tradicional per a resoldre la prova inicial i, tan sols en trobem un que ho faci per a la prova final.

D'altra banda, malgrat que la descomposició és l'estratègia més utilitzada entre els alumnes a la prova final, podem veure que per a calcular la primera operació han partit de la descomposició d'un nombre i, en canvi, per a la segona, la descomposició de tots dos.

	Sumes de 2 xifres portant-ne on les U són iguals i les D diferents	
	37+47	
Estratègies	**Prova Inicial**	**Prova Final**
Algorisme tradicional començant per la	15	1
Decomposant un dels nombres	1	
Descomposant tots dos nombres.		1
Descomposant tots dos nombres +		6
Fer deus		1
Nombres de referència		2
Nombres de referència + dobles		2
Compensant		1
Compensant + dobles		2
Total	16	16

A la prova inicial, tots els alumnes excepte un van resoldre aquesta operació a partir de l'algorisme tradicional.

A la prova final en canvi, tan sols un alumne/a l'ha utilitzat ja que els altres han optat per usar d'altres estratègies com la descomposició, fer nombres de referència, compensar, etc.

- **Sumes de 2 xifres portant-ne**

	On les U són diferents i les D iguals	
	56+54	
Estratègies	**Prova Inicial**	**Prova Final**
Algorisme tradicional començant per la	14	1
Algorisme tradicional començant per la	1	
Decomposant un dels nombres	1	1
Descomposant tots dos nombres		2
Fer deus		5
Nombres de referència		1
Nombres de referència + dobles		1
Compensant		2
Compensant + dobles		3
Total	16	16

A la prova inicial, tots els alumnes excepte dos van utilitzar l'algorisme tradicional per a resoldre aquesta operació. En canvi, a la prova final només un.

A aquesta última prova doncs, hi ha un ús majoritari de l'estratègia de fer deus i compensar, i en menor freqüència han utilitzat d'altres estratègies com descomposar o fer nombres de referència.

	On les U i les D són iguals	
	45+45	
Estratègies	**Prova Inicial**	**Prova Final**
Algorisme tradicional començant per la	11	2
Algorisme tradicional començant per la	3	
Decomposant un dels nombres		1
Descomposant tots dos nombres + dobles	2	10
Nombres de referència + dobles		1
Fet numèric conegut		2
Total	16	16

A la prova inicial la gran majoria d'alumnes han optat per utilitzar l'algorisme tradicional i, en canvi, tan sols dos nens/es ho han fet en la prova final.

D'altra banda, en aquesta última prova l'estratègia més utilitzada és la de descomposar tots dos nombres i fer dobles.

	On les U i les D són diferents	
	64+26	
Estratègies	**Prova Inicial**	**Prova Final**
Algorisme tradicional començant per la	13	1
Algorisme tradicional començant per la	1	
Decomposant un dels nombres	1	
Descomposant tots dos nombres		1
Fer deus	1	11
Nombres de referència		1
Compensant		1
Compensant + dobles		1
Total	16	16

L'ús de l'algorisme tradicional és el més abundant en la resolució d'aquesta operació a la prova inicial. En canvi, a la prova final, la majoria d'alumnes han optat per utilitzar l'estratègia de fer deus.

3.2.2.1 Resultats obtinguts en l'anàlisi per operacions

A través d'aquestes taules, hem pogut observar a grans trets quines són les estratègies més utilitzades pels nens/es respecte cada operació i, tenint en compte les dues proves que van realitzar. Tot i així, a partir de la següent taula, podem observar, de manera més concreta i precisa, quina estratègia ha sigut la més utilitzada pels alumnes (tan a la prova inicial com a la final) per a cada operació:

Estratègia més usada en la prova inicial	Estratègia més usada en la prova final	Operacions en les quals s'ha dut a terme
Fet numèric conegut	Fet numèric conegut	8+2 i 10+5
Algorisme tradicional	Descomposició	84+5 i 11+8 / 24+74 / 22+26 i 12+13 / 22+22 / 13+24 i 23+40 / 37+47 / 45+45
Algorisme tradicional	Fer deus	18+2 / 64+26
Algorisme tradicional	Nombres de referència	86+5 / 30+60
Algorisme tradicional	Fer deus o Compensar	56+54
Total d'operacions		17

Tenint aquests resultats podem dir que:

- Les operacions en les quals el resultat és inferior a 20, l'estratègia més utilitzada en ambdues proves és el fet numèric conegut.
- En les operacions (84+5 i 11+8) on es suma un nombre d'una xifra + nombre de dues xifres, quan el resultat de les unitats és inferior a 10, a la prova inicial els alumnes utilitzaven l'algorisme tradicional i, en canvi, a la final la descomposició del nombre de dues xifres. En canvi, quan el resultat de les unitats és superior a 10 i, per tant, la suma és portant (86+5 i 18+2), a la prova inicial continuaven utilitzant l'algorisme tradicional, però en a la final predomina l'estratègia de fer deus o fer nombres de referència.
- Per a resoldre operacions sense portar (24+74, 30+60, 22+26, 12+13, 13+24 i 23+40), a la prova inicial els alumnes utilitzaven majoritàriament l'algorisme tradicional. En canvi, per a resoldre la prova final l'estratègia més utilitzada és la descomposició (tan d'un nombre com de dos nombres+dobles).
- Per contra, en les operacions portant (37+47, 56+54, 45+45 i 64+26), continuem veient que per a resoldre la prova inicial destaca l'ús de l'algorisme tradicional, però a la prova final s'usa amb més freqüència l'estratègia de fer deus i la descomposició de tots dos nombres+dobles.

Per tant, podem afirmar que el canvi més significatiu que han dut a terme aquests nens/es és el fet de deixar d'utilitzar l'algorisme tradicional per a descomposar els nombres ja que en deu operacions (de 17) és l'estratègia més utilitzada.

4. Conclusions

Amb aquests treball pretenia donar resposta als següents objectius:

1. Analitzar quines estratègies usen els alumnes de 4t de primària en resoldre operacions de suma amb nombres de fins a dues xifres.
2. Elaborar una unitat didàctica a partir de la prova inicial i que permeti la millora dels continguts numèrics i l'ús d'estratègies de càlcul mental.
3. Valorar l'aprenentatge dels nens/es després d'haver dut a terme la unitat didàctica i analitzar l'ús de noves estratègies de càlcul mental repetint la prova inicial.

Així doncs, un cop finalitzada la meva recerca, i tenint en compte el primer objectiu, podem donar resposta a la primera pregunta d'aquesta investigació: "Quines estratègies usen els alumnes de 4t de primària en resoldre operacions de suma amb nombres de fins a dues xifres?" tot afirmant que tenint en compte la metodologia utilitzada en aquesta escola tan tradicional i a través de processos mecànics, i a través de la prova inicial hem pogut observar que l'estratègia més utilitzada pels alumnes era l'algorisme tradicional, excepte en algunes operacions on el resultat és inferior a 20 (8+2 i 10+5) en les quals l'estratègia més usada era el fet numèric conegut. Tot i així, els alumne/a 2, 5, 7, 9, 10, 13 i 15 quan les unitats i les desenes eren iguals (22+22) també han utilitzat aquest mecanisme. D'altra banda, hem pogut observar que altres estratègies com la descomposició tan sols tres alumnes (11, 14 i 16) l'han usat per a calcular diferents tipus d'operacions tan d'1 xifra més 2 xifres, com de dues xifres portant i no portant. Fer nombres de referència, tan sols l'alumne/a 5 per a 84+5 i fer deus l'alumne/14 per a 64+26. Per tant, aquestes estratègies tan sols han sigut utilitzades de forma esporàdica per alguns alumnes. Tot i així, l'alumne/a 3 destaca per no haver utilitzat l'algorisme tradicional en cap moment, a diferència dels altres nens/es, sinó d'haver partit dels fets numèrics coneguts o la descomposició.

Amb aquests resultats doncs, i prenent com a referents Baroody (1988) i Kamii (1996), podem evidenciar que el fet de seguir una metodologia tradicional fomentant la memorització i els processos mecànics a través de l'algorisme tradicional no afavoreix l'aprenentatge del pensament lògic dels alumnes sinó, que dificulta la invenció d'estratègies de càlcul i el raonament dels processos utilitzats.

Tenint en compte aquests resultats, es va elaborar una unitat didàctica amb l'objectiu de millorar els continguts numèrics i l'ús d'estratègies de càlcul mental d'aquests nens i nenes utilitzant una metodologia més dinàmica, manipulativa, fomentant el raonament i la posada en comú de coneixements, entre d'altres. Després de dur a terme aquest conjunt d'activitats que va culminar amb una prova final amb les mateixes operacions de suma que a la inicial i tenint en compte l'últim objectiu que em plantejava, podem donar resposta a la segona i última pregunta que em vaig formular a l'inici del treball: "Utilitzar una metodologia més concreta i manipulativa per a treballar continguts numèrics, provoca que els nens/es inventin estratègies de càlcul per a ells mateixos i, que per tant, millori el seu càlcul mental?". La resposta és sí, ja que el fet d'haver canviat la metodologia per una de més dinàmica, manipulativa i fomentant el raonament i la posada en comú de les estratègies utilitzades i, també, havent treballat els continguts numèrics al llarg d'aquestes set setmanes, ha permès l'aprenentatge dels alumnes i que comencin a inventar i usar les seves pròpies estratègies de càlcul ja que sorprenentment, van sorgir noves estratègies per a ells mateixos que jo a l'inici no tenia previst treballar, com per exemple fer nombres de referència i compensar.

Així doncs, a través de l'anàlisi de dades, podem concloure que a la prova final, l'estratègia més utilitzada per a resoldre les operacions on el resultat és inferior a 20 (8+2 i 10+5) contínua sent els fets numèrics coneguts igual que en la prova inicial, però aquesta vegada, l'ha usat menys alumnes ja que han optat per a utilitzar d'altres estratègies de càlcul. Tot i així, alguns alumnes també l'utilitzen per altres operacions en les quals les unitats i les desenes són iguals (22+22 i 45+45) o bé també per a 30+60.

D'altra banda, tenint en compte que a la prova inicial l'estratègia més usada pels alumnes era l'algorisme tradicional, en aquesta última prova, tan sols 4 alumnes l'han usat, de forma esporàdica en un total de 11 operacions diferents entre ells/es. En canvi, per a 8 alumnes de 16, l'estratègia més usada ha sigut la descomposició dels nombres, majoritàriament quan la suma no és portant, però també, en alguns casos excepcionals com 37+47 i 45+45. A banda d'aquests alumnes, dos altres també l'han utilitzat però en menor freqüència. A banda d'aquesta estratègia, hem pogut veure que fer deus i fer nombres de referència també han tingut un gran pes en aquesta prova ja que han sigut les estratègies més usades en 4 operacions, les quals no tenen cap tret en comú entre elles ja que algunes són portant i d'altres sense portar. Finalment, per a 56+54 hi ha hagut el mateix nombre de nens/es que han usat l'estratègia de fer deus i la de compensar.

Finalment, podem afirmar que havent canviat la metodologia i seguint les idees o fonaments d'alguns autors com Baroody, 1988; Boaler, 2004; Crain i Faulkner, 2012; Kamii, 1996; Kling i Bay-Williams, 2014; Parrish, 2010; Van de Walle, 2010 sobre com treballar el càlcul mental a l'aula, hem aconseguit que els alumnes deixessin d'utilitzar, en la mesura del possible, l'algorisme tradicional i s'iniciessin en l'ús de noves estratègies de càlcul.

5. Implicacions educatives

Primer de tot, penso que com a aspecte a introduir a nivell educatiu en aquest grup seria interessant que la tutora continués duent a terme les sessions diàries de 10-15 minuts a través del material concret per tal d'acabar de consolidar aquells aspectes que considero que hauria sigut interessant treballar amb més profunditat i, també, per evitar que els alumnes tornin a utilitzar l'algorisme tradicional.

També seria interessant que cada cop més, l'alumnat es sentís protagonista del seu propi procés d'aprenentatge, de manera que fossin els mateixos nens/es qui manipulessin el material, qui intentessin buscar diferents formes de resoldre els problemes tot fomentant el raonament, entre d'altres.

A més, a posteriori he pogut veure que a nivell d'aula s'ha continuat utilitzant aquest algorisme i, en canvi, hauria sigut adequat continuar potenciant l'ús d'estratègies de càlcul per tal que tot allò que jo vaig treballar a l'aula no caigui en l'oblit. Tot i així, estic satisfeta ja que a nivell d'escola es va proposar implementar, de cara l'any vinent, aquest model matemàtic de tal manera que espero que ben aviat aquesta escola deixi d'utilitzar aquesta metodologia tan tradicional i, opti per altres mètodes més significatius i eficaços.

Finalment, no estaria de més que es duguessin a terme assessoraments a les famílies per evitar l'ensenyament de l'algorisme tradicional als seus fills/es i intentar que cada cop més, utilitzin les seves pròpies estratègies de càlcul, ja que tampoc podem pretendre canviar una metodologia sense abans, informar i formar els pares els quals sovint ajuden els nens/es a resoldre diferents tasques.

6. Projecte de continuïtat

Un cop finalitzada aquesta recerca, encara hi ha diferents aspectes que es podrien continuar investigant en cas de disposar de més temps i, que serien de gran utilitat per complementar la informació obtinguda i, també, per tenir més fonaments per comparar-ho amb les teories dels diferents autors. Per tant, les noves preguntes que ens plantejaríem en cas d'un hipotètic projecte de continuïtat podrien ser:

1. Quina evolució haurien tingut aquests nens/es respecte el càlcul mental si tornéssim a passar la mateixa prova l'any vinent?
2. Quants nens/es que utilitzen alguna estratègia de càlcul mental, continuen utilitzant els dits com per exemple, per a sumar les xifres de les unitats? Fins i tot, seria interessant gravar-los amb vídeo per a poder-ho analitzar millor.
3. El fet de vincular les activitats a un context real, facilitaria que els alumnes inventessin d'estratègies de càlcul per a ells mateixos?
4. Podríem canviar l'ús de l'algorisme tradicional per estratègies de càlcul mental, en les operacions de resta, multiplicació i divisió?
5. Quines estratègies de càlcul mental haurien sorgit o haguessin sigut les més abundants amb nombres de tres xifres o més?

7. Bibliografia

BAROODY, Arthur. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación inicial.* Madrid: Visor Distribuciones.

BOALER, Jo. (2014). Research suggests that timed tests cause math anxiety. *Teaching Children Mathematics*, vol. 20, núm.8, p. 469-474.

CRAIN, Chris, R.; FAULKNER, Valerie,N. (2012). Teaching number in the early elementary years. *Teaching Children Mathematics*, vol.18, núm. 5, p. 288-295.

EISENHARDT, Sara; FISHER, Molly, H.; THOMAS, Jonathan; SCHACK, Edna, O.; TASSELL, Janet; YODER, Margaret. (2014). Is it counting, or is it adding?. *Teaching Children Mathematics*, vol. 20, núm.8, p. 498-507.

KAMII, C.; BAKER HOUSMAN, L. (2000). *Young children reinvent arithmetic.* Implications of Piaget's theory. New York: Teacher's College Press.

KAMII, Cosntance. (1996). La teoria de Piaget y la enseñanza de la aritmética. *Perspectivas,* Vol. XXVI núm. 1, p.107-119.

KAMII, C.; DOMINICK, A. (2010). Los efectos negativos de enseñar algoritmos en grados primarios (1ro al 4to)*. Revista de pedagogía*, vol. 43, núm. 1, p. 59-73.

KAMII, C.; RUMMELSBURG, J. (2008). Arithmetic for First Graders. Lacking Number Concepts. *Teaching Children Mathematics,* vol.16, núm.7, p.389-394.

KLING, Gina; BAY-WILLIAMS, Jennifer, M. (2014). Assessing basic fact fluency. *Teaching Children Mathematics*, vol. 20, núm.8, p. 488-497.

KLING, Gina. (2011). Fluency with basic addition. *Teaching Children Mathematics*, vol. 18, núm.2, p. 80-88.

PARRISH, Sherry. (2010). *Number Talks. Helping children build mental math and computation strategies.Grades K-5*. California: Math Solutions.

SERRAMONA, Jaume. (1997). La metodologia de observación empírica. Dins: *Fundamientos de Educación.* Barcelona: Grupo Editorial Ceac, S.A, p. 285 – 293.

SOUSA, David. A. (2008). *How the brain learns mathematics.* California: Corwin Press.

VAN DE WALLE, John.A.; KARP, Karen.S. i BAY-WILIIAMS, Jennifer.M. (2010). *Elemenentary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally.* Boston: Pearson Education.

WALKER, Rob. (1986). Ejemplo de aplicación de una observación sistemática. Dins: *Métodos de investigación.* Madrid: Ediciones Morata, p.145 – 151.