

Accions del professor en les discussions a classe després de resoldre un problema de Fermi

Mireia Brunet-Bianes¹ i Lluís Albarracín¹

¹Universitat Autònoma de Barcelona; lluis.albarracin@uab.cat

Aquest estudi examina el paper del professor durant una discussió a tota la classe després d'un treball en grup sobre un problema de Fermi, un clar exemple d'activitat de modelització que connecta les matemàtiques amb el món real (Albarracín i Gorgorió, 2014). El problema va encarregar als estudiants de cinquè grau d'estimar quantes persones podien cabre al pati de l'escola. Després de treballar individualment i en grup, van presentar les seves solucions i raonaments. Utilitzant el marc de Drageset (2014), les accions del professor es van classificar com a accions de redirecció, progressió i enfocament. Els resultats mostren que el professor va utilitzar principalment accions d'enfocament i progrés per guiar els estudiants a través de la discussió. Tot i que aquest enfocament fomenta la participació dels estudiants, les interaccions van seguir principalment el patró IRE (iniciació-resposta-avaluació) (Cazden, 2001). L'estudi destaca la importància del paper del professor durant les discussions a classe, tot i que es necessita més investigació per explorar les contribucions dels estudiants en aquests entorns.

Paraules clau: Modelització matemàtica, problemes de Fermi, discussió a l'aula, intervencions del professorat, educació primària.

Introducció i preguntes de recerca

En els darrers anys, hi ha hagut un interès creixent per introduir activitats de modelització matemàtica a diversos nivells educatius per mostrar als estudiants la connexió entre les matemàtiques i el seu entorn (Vorhölter et al., 2014). Un exemple de problemes que requereixen un enfocament basat en models i que es poden explorar a les aules de primària són els problemes de Fermi (Albarracín i Gorgorió, 2014). Aquestes es caracteritzen com a preguntes obertes que ofereixen poca o cap informació específica per guiar el procés de resolució de problemes (Ärleback, 2009; Efthimou i Llewellyn, 2007).

Els alumnes de primària poden resoldre problemes de Fermi generant models matemàtics (Albarracín i Gorgorió, 2019) però cal explorar maneres d'ajudar-los a connectar els conceptes principals dels diferents models que poden generar. En aquest estudi, analitzem el treball de 24 alumnes de cinquè resolent el següent problema de Fermi: Quantes persones caben al pati de l'escola? (Albarracín i Gorgorió, 2014). Per fomentar la participació dels estudiants, l'activitat s'estructura en diverses fases: començant amb el treball individual, passant al treball en grups reduïts (amb grups de quatre alumnes) i conclouent amb una discussió de tota la classe. En un estudi previ, hem identificat el potencial del treball en grups reduïts per generar models per resoldre el problema i el paper de cadascun dels estudiants (Brunet-Bianes i Albarracín, 2024). Aquest estudi se centra en la discussió final de tota la classe, en la qual els estudiants presenten els mètodes utilitzats per resoldre el problema, discuteixen els resultats i justifiquen les seves respostes. Aquest procés facilita el desenvolupament de la seva comprensió matemàtica (Franke, Kazemi i Battey, 2007). En aquesta discussió a classe, el professor

té un paper crucial en la gestió de la discussió, inclosa la facilitació de torns, la formulació de preguntes i la retroalimentació (Smith i Stein, 2016).

L'objectiu de l'estudi és descriure el paper del professor durant la discussió a classe després de la resolució d'un problema de Fermi en grup. Les preguntes de recerca són les següents: (RQ1) Quins tipus d'accions fa el professor durant la discussió a classe? i; (RQ2) Com afecten aquestes accions a la participació i el compromís dels estudiants?

Modelització matemàtica i problemes de Fermi

En el context de la modelització matemàtica, adoptem la definició de Lesh i Harel (2003) d'un model matemàtic. Entenem un model com una construcció que comprèn una varietat d'elements, tant conceptuals com procedimentals, i que engloba diferents representacions de la realitat, incloent-hi paraules, dibuixos i diagrames. La funció dels models és explicar un sistema, que sovint és complex, que l'estudiant busca entendre. En el context de primària, els alumnes no disposen de les eines pròpies del llenguatge matemàtic, com l'àlgebra, per expressar els seus models. No obstant això, poden utilitzar el llenguatge escrit natural, els dibuixos, els diagrames i els càlculs corresponents per il·lustrar les seves idees (Albarracín i Gorgorió, 2019). En el context de la resolució de problemes, el model serveix per representar la situació que es presenta en el problema i, mitjançant l'aplicació de processos matemàtics, per arribar a una solució.

Una categoria de problemes que es poden abordar eficaçment mitjançant la introducció d'un model matemàtic en un entorn d'aula de primària són els coneguts com a problemes de Fermi. Com afirma Årlebäck (2009), es tracta de "problemes oberts i no estàndard que requereixen que els estudiants facin suposicions sobre la situació del problema i estimin quantitats rellevants abans de realitzar càlculs que són sovint simples" (pàg. 331). La introducció de problemes de Fermi en una aula de matemàtiques es basa en el supòsit que els estudiants poden relacionar-se amb el context del món real que se'ls presenta. Efthimou i Llewellyn (2007) van definir els problemes de Fermi per la forma en què estan formulats, ja que sempre es plantegen com a preguntes obertes que ofereixen poca o cap informació a aquells que intenten resoldre'ls. Des de la perspectiva de la modelització matemàtica, un dels aspectes més significatius dels problemes de Fermi és la necessitat d'una anàlisi exhaustiva de la situació presentada. El procediment proposat per Fermi era descompondre el problema original en subproblemes més simples i arribar a una solució a la pregunta original fent estimacions raonables o conjectures educades després de considerar primer els subproblemes individuals (Carlson, 1997).

En la seva recerca, Albarracín i Gorgorió (2019) van investigar els models construïts pels alumnes de primària per resoldre problemes de Fermi. Les seves troballes van revelar que hi ha múltiples mètodes per desenvolupar aquests models, amb els enfocaments més comuns que impliquen la reducció i l'ús de la proporció, la concentració de mesures, el punt de referència, la distribució en quadrícula i d'altres.

Discussió a classe: el paper del professor

Les discussions a classe faciliten el raonament matemàtic i l'aprenentatge significatiu permetent als estudiants participar activament en l'intercanvi d'idees i la justificació de les seves perspectives (Drageset, 2014). El desenvolupament de la comprensió matemàtica requereix que els estudiants

presentin solucions a problemes, proposin conjectures, discuteixin una sèrie de representacions matemàtiques, dilucidin els seus processos de solució, demostrin la raó darrere de les seves solucions i formulin generalitzacions (Franke, Kazemi i Battey, 2007, p. 230). A més, també és crucial participar en el discurs sobre diverses metodologies de solució i avaluar els resultats (Kooloos et al., 2020).

S'ha dut a terme una quantitat substancial d'investigació sobre els diversos patrons observats en les discussions a l'aula dins del camp de l'educació matemàtica, amb un èmfasi particular en la interacció entre estudiants i professors. En molts casos, el discurs està dominat pel professor, seguint el patró descrit com a IRE (iniciació-resposta-avaluació) on el professor fa les preguntes, els estudiants responen i el professor avalua la resposta (Cazden, 2001). Tot i que l'IRE pot limitar la participació dels estudiants i centrar-se en tasques procedimentals (Franke, Kazemi i Battey, 2007), alguns investigadors destaquen la seva variabilitat (Wells, 1993). Cultures més interactives a l'aula, com ara la investigació i els informes estratègics, promouen el raonament i la justificació dels estudiants (Wood, Williams i McNeal, 2006). No obstant això, només augmentar la conversa dels estudiants és insuficient; els professors han d'afegir bastides a les discussions per fer explícit el pensament matemàtic (Franke, Kazemi i Battey, 2007). Stein et al. (2008) afirmen que els primers esforços en discussions matemàtiques sovint no tenien orientació del professor, cosa que conduïa a intercanvis superficials. Brendefur i Frykholm (2000) descriuen la comunicació reflexiva, on les discussions tenen com a objectiu aprofundir en la comprensió matemàtica basant-se en les idees dels estudiants. La comunicació instructiva implica que els professors guiïn i aprofundeixin en el pensament matemàtic dels estudiants.

Hi ha un consens creixent que les contribucions dels estudiants haurien de ser un aspecte significatiu de la comunicació a l'aula. No obstant això, cal entendre com es pot aconseguir. Perquè els estudiants tinguin aquesta oportunitat, el discurs de classe ha d'estar dominat pels alumnes, donant-los espai per compartir les seves idees i explicar el seu raonament (Drageset, 2014). Smith i Stein (2016) presenten cinc pràctiques clau que poden ajudar els professors a tenir control sobre una discussió a classe. Smith i Stein (2016) presenten cinc pràctiques clau que poden ajudar els professors a mantenir el control sobre una discussió a classe. El seu objectiu és anticipar-se a possibles desenvolupaments durant l'activitat i així donar més temps als professors per prendre decisions. Aquestes cinc pràctiques clau són:

- **Anticipar** les possibles respostes dels estudiants a tasques matemàtiques difícils.
- **Supervisar** les respostes reals dels alumnes a les tasques (quan es resolen en parelles o grups reduïts).
- **Seleccionar** estudiants específics per presentar el seu treball matemàtic durant la discussió en grup.
- **Seqüenciar** les respostes dels estudiants perquè es mostrin en un ordre específic.
- **Connectar** les diferents respostes dels estudiants i vinculeu-les a idees matemàtiques clau.

Com afirmen Smith i Stein (2016), fer les preguntes adequades és crucial per promoure una comprensió més profunda de les tasques cognitivament desafiantes. Les preguntes efectives poden guiar l'atenció dels estudiants sobre aspectes prèviament passats per alt d'un problema o fomentar el

descobriments de noves perspectives. A més, aquestes preguntes faciliten la capacitat dels estudiants per articular els seus processos de pensament d'una manera clara i coherent, millorant així la comprensibilitat del seu raonament als altres. Aquest model se centra en el pensament dels estudiants i en com entenen el contingut matemàtic. Els professors tenen accés directe i regular a les idees dels estudiants i als detalls que els sustenten, informació essencial per a l'ensenyament i l'aprenentatge eficaç de les matemàtiques (Drageset, 2014; Frank et al., 2007). Com subratllen Kooloos et al. (2020), els professors han de trobar un equilibri entre les contribucions dirigides pels estudiants i l'orientació dirigida pel professor per garantir un aprenentatge i una comprensió matemàtics significatius. Tot i que diversos estudis han explorat com els professors utilitzen activament les idees dels estudiants per promoure una comprensió matemàtica precisa i més profunda, hi ha una escassetat d'investigacions sobre aquesta pràctica dins de les discussions a classe on els estudiants presenten les seves estratègies de solució per als problemes de Fermi.

Mètodes

El problema utilitzat durant la recollida de dades va ser: quantes persones poden cabre al pati de l'escola? En aquest cas, els estudiants havien d'estimar el nombre de persones que es podien organitzar al pati de l'escola. La decisió d'utilitzar aquest problema es va basar en el seu desplegament previ en l'estudi realitzat per Albarracín i Gorgorió (2019). En conseqüència, ja es coneixen les estratègies potencials que els estudiants poden emprar en resposta a aquest problema. L'activitat presentada als alumnes es va plantejar en diferents etapes:

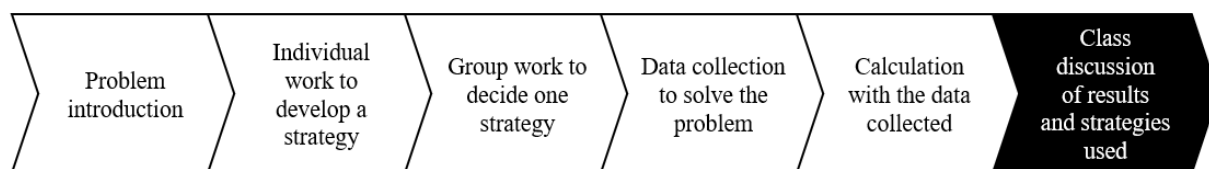


Figura 1. Etapes seguides durant el procés de recollida de dades

La discussió a classe es va orquestrar seguint les directrius de Smith i Stein (2016). La mostra va ser de 24 alumnes de cinquè d'educació primària i el seu professor. L'activitat es va desenvolupar en dues sessions d'una hora i mitja cadascuna. La discussió a classe es va dur a terme a la segona sessió, amb un professor guiant la conversa. Això es va gravar en àudio per a la seva posterior anàlisi. Dos investigadors van observar i van participar en les sessions. Aquest article se centrarà en el paper del professor durant la discussió a classe, les seves intervencions i com van utilitzar els comentaris dels estudiants.

Anàlisi

Després de la recollida de dades, es va transcriure i estructurar l'enregistrament de la discussió a classe per facilitar la categorització dels comentaris del professor. Per garantir la fiabilitat de l'anàlisi de les dades, els enregistraments d'àudio van ser revisats per dos investigadors per confirmar la categorització de les accions del professorat. Es van aplicar les categories de codificació predefinides detallades per Drageset (2014) en el marc de redirecció, progressió i enfocament. Aquestes categories, amb canvis menors, s'han utilitzat en altres estudis, com ara el treball de Kooloos, Oolbekkink-Marchand, Kaenders i Heckman (2020).

- Les accions de redirecció representen intervencions del professorat dissenyades per guiar els estudiants cap a un enfocament o estratègia alternatiu. El professor pot reconèixer la resposta d'un estudiant però després redirigir-la, ja sigui mitjançant correccions, suggeriments o preguntes que animin l'estudiant a repensar el seu enfocament. Aquesta categoria inclou deixar de banda els comentaris dels estudiants, aconsellar explícitament als estudiants que utilitzin una estratègia alternativa i corregir preguntes. Un exemple d'aquesta categoria és quan el professor corregeix l'enfocament d'un alumne dient: *"D'acord, però aquesta part encara s'ha d'omplir, oi?"*
- Les accions de progrés són les que pren el professor per garantir que la classe continuï avançant cap a la resolució del problema. Això pot implicar demostrar solucions, simplificar tasques o dividir el problema en passos discrets i manejables per facilitar la progressió contínua del procés. Aquesta categoria inclou la demostració dels passos o de la solució completa, simplificacions de la tasca proporcionant suggeriments, detalls tancats del progrés guiant els estudiants pas a pas a través d'un procés i iniciatives de progrés obert en què el professor fa preguntes obertes. Un exemple d'aquesta categoria és quan el professor demana als estudiants que presentin el seu procés de resolució: *"Grup quatre, ens podeu explicar com has resolt el problema?"*
- Les accions d'enfocament impliquen l'ús de comentaris o preguntes del professor que dirigeixen l'atenció cap a elements específics del procés de resolució de problemes o solució. L'objectiu és facilitar una comprensió més profunda incitant els estudiants a dilucidar la seva raó, fonamentar les seves respostes o emfatitzar detalls fonamentals. Aquest enfocament es classifica en dues seccions diferents:
 - Sol·licituds d'aportacions dels estudiants: el professor demana als estudiants que expliquin detalls, justifiquin les seves respostes, apliquin coneixements a problemes similars o busquin la validació dels companys. Aquesta categoria inclou detalls aclaridors del procés de solució, justificant el raonament darrere dels mètodes utilitzats o aplicant-lo a problemes similars, i sol·licitant l'avaluació per parells. Un exemple d'aquesta categoria és quan el professor demana als estudiants que justifiquin la seva resposta dient: *"Com heu arribat a aquest resultat?"*
 - Assenyalar: el professor ressalta o recapitula la informació clau. Aquesta categoria inclou el resum de les solucions o l'aclariment de punts clau i l'observació de detalls importants. Un exemple d'aquesta categoria és quan el professor assenyala una possible estratègia per resoldre problemes: *"Mira, de vegades tenim un gran problema, una bona estratègia és dividir-lo en problemes més petits. És més fàcil trobar una solució a petits problemes".*

Resultats

Una característica clau de les dades d'aquest estudi és que la majoria dels casos s'alineen amb el patró IRE (Cazden, 2001), caracteritzat per la intervenció constant del professor i la resposta als comentaris dels estudiants. Això també indica que el professor exerceix control sobre l'ordre dels torns, parlant només després dels alumnes. En conseqüència, era evident que el professor tenia un paper fonamental

en guiar i avançar en la discussió a classe. Tenint en compte les categories descrites anteriorment, la següent taula presenta els resultats obtinguts després d'analitzar les dades:

Taula 1. Accions docents segons les categories detallades per Drageset (2014) en el marc de reorientació, progrés i enfocament

Categoria	Subcategories		Accions del professorat
Redirigint	Deixar de banda		2
	Assessorament en noves estratègies		2
	Correcció de preguntes		3
Progressant	Demostració		5
	Simplificació		2
	Detalls del progrés tancat		16
	Iniciatives de progrés obert		11
Centrat	Sol·licitar l'opinió dels estudiants	Il·luminar els detalls	3
		Justificació	8
		Aplicar a problemes similars	3
		Sol·licitar l'avaluació entre iguals	4
	Assenyalar	Resum	19
		Notar	7
Accions de gestió d'aula			9

S'ha incorporat una nova categoria a la llista inicial: accions de gestió d'aula. Aquesta categoria es refereix a les estratègies i intervencions emprades pel professor per mantenir l'ordre, l'estructura i un entorn d'aprenentatge eficaç durant la discussió a classe. És important tenir en compte que les accions docents més freqüents són recapitulació (enfocament), detalls de progrés tancats (progressió) i iniciatives de progrés obert (progrés). Tenint en compte la naturalesa de l'activitat, les iniciatives de progrés obert sovint s'utilitzen per donar als estudiants l'oportunitat d'explicar el procés que han seguit per resoldre el problema. Els detalls de progrés tancats són utilitzats pel professor per seguir plans de solució pas a pas, amb l'ajuda dels estudiants que avança a la solució del problema. Finalment, l'acció més utilitzada és el recapitulació, en què el professor sovint resumeix i reformula les explicacions proporcionades pels alumnes. Aquesta és una acció clau, ja que dona l'oportunitat de donar sentit al que expliquen els estudiants i posar-lo a disposició de tota la classe. Dues accions significatives més són demanar justificació (progressar) i avís (enfocar). Aquesta primera acció s'utilitza principalment per demanar als estudiants que expliquin algunes parts de l'estratègia utilitzada per resoldre el problema. A més, el professor utilitza l'avís d'acció per cridar l'atenció sobre certs detalls de les diferents estratègies utilitzades per resoldre el problema. Una altra acció clau és la demostració (progressar), en la qual el professor utilitza dibuixos, exemplifica la situació a l'aula, fa referències d'altres àmbits, etc. Aquesta acció anima els estudiants a participar activament en el discurs, responnent i demostrant la seva comprensió de la situació.

En general, les accions més utilitzades a l'aula són les accions focalitzades (52%). Es defineixen com a intervencions del professorat, ja sigui en forma de comentaris o preguntes, que dirigeixen l'atenció dels estudiants cap a elements clau del procés de problema o solució Drageset (2014). Donada la complexitat de la tasca, el professor sovint demanava als estudiants que donessin explicacions i justificacions més completes. Aquest enfocament va permetre identificar i aclarir les seves estratègies i processos de raonament subjacents. A més, el professor resumeix regularment la discussió i emfatitza aspectes importants per garantir que tots els estudiants puguin seguir i participar en la

discussió. Aquest procés continu d'aclariment, recapitulació i ressaltat dels punts clau no només va garantir que els estudiants es mantinguessin en el bon camí, sinó que també van cultivar una comprensió més profunda dels conceptes matemàtics que s'estan discutint. A través d'accions d'enfocament, el professor guia els estudiants a reflexionar sobre el seu treball alhora que s'assegura que tota la classe es mantingui involucrada i compregui la discussió en curs.

Discussió dels resultats i conclusions

Pel que fa a les accions dels professors durant una discussió a classe (RQ1), l'estudi destaca que el recapitulació (enfocament), els detalls de progrés tancats i les iniciatives de progrés obert (progrés) són les accions docents més utilitzades. L'ús freqüent d'accions de recapitulació indica un enfocament en resumir i aclarir les contribucions dels estudiants per garantir la comprensió col·lectiva, d'acord amb l'èmfasi de Franke et al. (2007) en fer explícit el pensament matemàtic. A més, això també es pot connectar amb una de les pràctiques clau suggerides per Smith i Stein (2016), connectar les idees dels estudiants i vincular-les entre els diferents enfocaments. Altres accions fonamentals observades inclouen la justificació i l'avís, mitjançant el qual el professor demana als estudiants que expliquin el seu raonament i destaca aspectes crítics del procés de resolució de problemes. A més, la utilització de demostracions per part del professor, com ara dibuixos i referències a temes familiars, anima a tots els estudiants a seguir la discussió a classe i els proporciona aspectes per reconsiderar les seves estratègies.

El professor va exercir una influència considerable en la participació i el compromís dels estudiants (RQ2). Les interaccions a l'aula van seguir predominantment el patró IRE (iniciació-resposta-avaluació) (Cazden, 2001), que és coherent amb les troballes de Drageset (2014). En equilibrar les seqüències d'IRE amb iniciatives de progrés obert, el professor va crear oportunitats per a un raonament i una participació més profunds dels estudiants, un punt també emfatitzat per Wells (1993) en el seu treball sobre cultures interactives a l'aula. No obstant això, l'ús de preguntes tancades que requereixen respostes breus va donar lloc a una major implicació dels estudiants, amb un nombre notable d'estudiants oferint les seves respostes en veu alta. No obstant això, aquest tipus de compromís va ser menys reflexiu. Per tant, és essencial trobar un equilibri entre les iniciatives de progrés obert i els detalls de progrés tancats per garantir una àmplia participació dels estudiants alhora que fomenta un raonament més profund i l'autoavaluació.

Aquesta recerca ofereix una visió de la dinàmica de les discussions a classe i el paper del professor després de resoldre un problema de Fermi en grups del cicle superior d'educació primària. En el context de les discussions a classe, és essencial que els estudiants de primària rebin una orientació i una estructura clares per part dels seus professors, alhora que se'ls ofereix l'oportunitat d'aclarir el seu raonament. Els professors també poden facilitar la comprensió proporcionant exemples i connectant les idees dels estudiants per fomentar la comprensió col·lectiva. Aquestes accions dels professors són crucials per fomentar la participació dels estudiants, promoure un raonament més profund i garantir una participació efectiva en discussions matemàtiques. Els resultats de l'estudi es basen en una mida de mostra relativament petita, la qual cosa pot limitar fins a quin punt es poden generalitzar. A més, l'anàlisi es concentra principalment en les accions del professorat, amb comparativament menys atenció dedicada als comentaris i interaccions dels estudiants. Les investigacions futures haurien de

considerar una mostra més gran i diversa i incloure una anàlisi més completa de les contribucions dels estudiants per obtenir una comprensió més completa de les dinàmiques en les discussions a l'aula. Explorar com els comentaris i respostes dels estudiants influeixen i interactuen amb les accions del professor podria proporcionar una visió més profunda de les estratègies d'ensenyament efectives i la participació dels estudiants en el discurs matemàtic.

Referències

- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79–96.
- Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2019). Using Large Number Estimation Problems in Primary Education Classrooms to Introduce Mathematical Modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 45–57.
- Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of Realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331–364.
- Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance of Depth and Breadth in the Analysis of Teaching: A Framework for Analyzing Teacher Questions. In D. E. McDougall & J. A. Ross (Eds.), *Proceedings of the 26th Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME.
- Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(2), 125–153.
- Brunet-Biarnes, M., & Albarracín, L. (2024). Exploring the negotiation processes when developing a mathematical model to solve a Fermi problem in groups. *Mathematics Education Research Journal*, 36(1), 177–198.
- Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, 35(5), 308–309.
- Cazden, C. B. (2001). *Classroom discourse: The language of teaching and learning*. Heinemann.
- Drageset, O.G. (2014). Redirecting, progressing, and focusing actions—a framework for describing how teachers use students' comments to work with mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 85, 281–304.
- Efthimiou, C. J., & Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, 42(3), 253.
- Franke, M.L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225–256). NCTM.
- Kooloos, C., Oolbekkink-Marchand, H., & Kaenders, R. (2020). Orchestrating mathematical classroom discourse about various solution methods: Case study of a teacher's development. *Journal of Mathematics Didaktik*, 41, 357–389.
- Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2), 157–189.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
- Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

- Vorhölter, K., Kaiser, G. & Borromeo Ferri, R. (2014). Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics education. In Y. Li, E. A. Silver & S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction* (pp. 21–36). Springer.
- Wells, G. (1993). Reevaluating the IRF sequence: A proposal for the articulation of theories of activity and discourse for the analysis of teaching and learning in the classroom. *Linguistics and Education*, 5(1), 1–37.
- Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(3), 222–255.