



C.F.A Concòrdia

TEMA 1: Cojunts numèrics

- 1.- Nombres naturals. Divisibilitat
- 2.- Nombres enters
- 3.- Nombres racionals
- 4.- Nombres reals
- 5.- Potències i radicals
- 6.- Notació científica
- 7.- Logaritmes

1. NOMBRES NATURALS. DIVISIBILITAT

1.1. Nombres naturals

Els **nombres naturals** són els que fem servir per comptar. Es representa per la lletra $\mathbb{N}$.

1.2. Divisibilitat

Múltiples

Donats dos nombres naturals, a i b , diem que **a és múltiple de b** si **$a = n \cdot b$** , en què n és un altre nombre natural.

Exemples:

1.- **12** és múltiple de **3**, ja que **$12 = 4 \cdot 3$**

2.- **40** és múltiple de **8**, ja que **$40 = 5 \cdot 8$**

Així, **per trobar els múltiples d'un nombre, anem multiplicant aquest nombre pels nombres naturals. Cada nombre té infinits múltiples.**

Exercicis:

Exercici 1.- a) Calcula cinc múltiples de 4:

b) Calcula cinc múltiples de 7:

Divisors

Donats dos nombres naturals, a i b , diem que **b és divisor de a** si **$a = n \cdot b$** , en què n és un altre nombre natural.

Exemples:

1.- **3** és divisor de **12**, ja que **$12 = 4 \cdot 3$**

2.- **8** és divisor de **40**, ja que **$40 = 5 \cdot 8$**

Si la divisió **$a:b$ és exacta**, **a és múltiple de b** i **b és divisor de a** . També diem que **a és divisible per b** .

Exemple: La divisió $15:3$ és exacta. Així doncs, 15 és múltiple de 3, 3 és divisor de 15 i 3 és divisible per 15. Observem que en ser 5 el quocient de la divisió exacta $15:3$, també es dona que 15 és múltiple de 5, 5 és divisor de 15 i 5 és divisible per 15.

Exemples:

1.- Divisors del **12**: 1, 2, 3, 4, 6, 12

2.- Divisors del **15**: 1, 3, 5, 15

Exercicis:

Exercici 2.- a) Calcula els divisors de 8:

b) Calcula els divisors de 20:

Criteris de divisibilitat

Els criteris de divisibilitat són regles senzilles que ens permeten saber si un nombre és divisible per un altre. Els més utilitzats són:

Divisible per...	
2	Si l'ul
3	Si la :
5	Si l'ul
10	Si l'ul

Exercicis:

Exercici 3.- Calcula tots els divisors de 150

Nombres primers i compostos

Un nombre natural més gran que 1 és **primer** si **només és divisible per ell mateix i pel nombre** (l'1 no es considera nombre primer).

Un nombre natural és compost si té altres divisors a més d'ell mateix i el nombre 1.

Factorització d'un nombre compost

Factoritzar un nombre és descompondre'l en potències de factors primers, és a dir, expressar-lo com un producte de potències de nombres primers.

Exemples:

1.- Factoritza el **60**: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

2.- Factoritza el **72**: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

Exercicis:

Exercici 4.- Factoritza els nombres 84 i 450

Màxim comú divisor (m.c.d.) i mínim comú múltiple (m.c.m.)

El **màxim comú divisor** de dos nombre és **el més gran dels divisors comuns a tots ells**.

Exemple: Calcula el màxim comú divisor de 12 i 28.

El màxim comú divisor de 12 i 28 es representa amb m.c.d.(12,28).

Els divisors de 12 són: **1,2,3,4,6,12**.

Els divisors de 28 són: **1,2,4,7,14,28**.

Dels divisors comuns, el més gran és el **4**. Així, **m.c.d.(12,28) = 4**

El **mínim comú múltiple** de dos nombre és **el més petit dels múltiples comuns a tots ells**.

Exemple: Calcula el mínim comú múltiple de 4 i 6.

El mínim comú múltiple de 4 i 6 es representa amb m.c.m.(4,6).

Els múltiples de 4 són: 4,8,**12**,16,20,**24**,28,32,**36**...

Els múltiples de 6 són: 6,**12**,18,**24**,30,**36**,42...

Dels múltiples comuns, el més petit és el 12. Així, m.c.m.(4,6) = 12

Per calcular el **m.c.d.** i el **m.c.m.** de dos nombres, es pot utilitzar la següent regla pràctica:

<i>m.c.d.</i>	<i>m.c.m.</i>
- <u>Factoritzem</u> els nombres. - Triem els factors primers <u>comuns</u> elevats a <u>l'exponent més petit</u> i els multipliquem.	- <u>Factoritzem</u> els nombres. - Triem els factors primers <u>comuns</u> i <u>no comuns</u> elevats a <u>l'exponent més gran</u> i els multipliquem.

Exemples:

a) Calcula el m.c.d. i el m.c.m. de 4 i 6.

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{m.c.d.}(4,6) = 2$$

$$\text{m.c.m.}(4,6) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

b) Calcula el m.c.d. i el m.c.m. de 60 i 72.

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\text{m.c.d.}(60,72) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$\text{m.c.m.}(60,72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Exercicis:

Exercici 5.- Calcula el m.c.d. i el m.c.m. de:

a) 84 i 14

b) 75 i 45

c) 9 i 70

d) 90,12 i 10

e) 5,15 i 13

f) 150,90 i 70

$$\text{a) m.c.d.} = 14; \text{ m.c.m.} = 84$$

$$\text{c) m.c.d.} = 1^*; \text{ m.c.m.} = 630$$

$$\text{e) m.c.d.} = 1^*; \text{ m.c.m.} = 195$$

$$\text{b) m.c.d.} = 15; \text{ m.c.m.} = 225$$

$$\text{d) m.c.d.} = 2; \text{ m.c.m.} = 180$$

$$\text{f) m.c.d.} = 10; \text{ m.c.m.} = 3.150$$

Observació: Si no hi ha **cap divisor comú**, el **m.c.d.** és **1**.

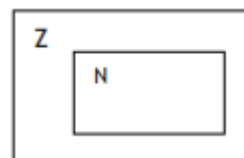
2. NOMBRES ENTERS

2.1. Nombres enters

Els **nombres enters** varen sorgir de la necessitat de resoldre operacions matemàtiques que no tenen solució en el conjunt dels nombres naturals (per exemple, la resta $3-10$) i d'expressar numèricament situacions que no es poden expressar amb nombres naturals.

Els conjunt dels nombres enters està format per:

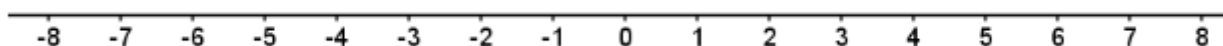
- Els nombres enters positius (= els nombres naturals).
- Els nombres enters negatius.
- El nombre 0.



Representem el conjunt dels **nombres enters** amb la lletra $\mathbb{Z}$.

El conjunt dels nombres naturals està inclòs en el conjunt dels nombres enters.

Representem gràficament els nombres enters ordenats en una **recta numèrica**:



Comparació de nombres enters

Nota: Vegem el significat dels símbols $<$, $>$, $\leq$ i $\geq$.

$a < b \rightarrow a$ és més petit que b . $a \leq b \rightarrow a$ és més petit o igual que b .

$a > b \rightarrow a$ és més gran que b . $a \geq b \rightarrow a$ és més gran o igual que b .

Exercicis:

Exercici 6.- Completa amb $<$ o $>$:

- | | | | | | |
|-------|-----|-------|----|-------|----|
| a) +3 | +2 | c) +8 | -5 | e) -1 | +5 |
| b) -7 | -10 | d) -6 | -1 | f) +1 | -3 |

Donats dos nombres enters, el més petit és el que està situat més a l'esquerra en la recta numèrica.

2.2. Valor absolut

El **valor absolut** d'un nombre enter és el **nombre natural** que obtenim en prescindir del seu signe.

Exemples:

$$|-3| = 3 \quad | +3 | = 3 \quad |-5| = 5 \quad | +10 | = 10$$

2.3. Operacions amb nombres enters

Suma i resta de nombres enters

Per **sumar o restar dos nombres enters**, seguim els passos següents:

- **Traiem els parèntesis** fent servir **la regla següent**:

$$\begin{array}{ll} +(+)=+ & +(-)=- \\ -(-)=+ & -(+)=- \end{array}$$

- Si obtenim dos nombres amb el **mateix signe**, **sumem** els valors absoluts i hi escrivim aquest **mateix signe**.

- Si obtenim dos nombres de **signe diferent**, **restem** els valors absoluts i hi escrivim **el signe del que té el valor absolut més gran**.

Exemples:

1. $(-3) + (-2) = -3 - 2 = -5$

5. $(+3) + (-2) = +3 - 2 = +1$

2. $(+2) - (+10) = +2 - 10 = -8$

6. $(-2) - (-9) = -2 + 9 = +7$

3. $(-3) + (+2) = -3 + 2 = -1$

7. $(-5) - (-7) = -5 + 7 = +2$

4. $(-4) - (+6) = -4 - 6 = -10$

8. $(+8) + (+2) = +8 + 2 = +10$

Exercicis:

Exercici 7.- Calcula:

a) $(-5) + (+6) =$

c) $(-5) + (-6) =$

b) $(+5) - (-6) =$

d) $(+5) - (+6) =$

Multiplicació i divisió exacta de nombres enters

Per **multiplicar o dividir** dos nombres enters, seguim els passos següents:

- **Multipliquem o dividim** els seus **valors absoluts** per calcular el valor absolut del resultat.

- El signe del resultat el calculem aplicant la **regla del producte de signes**:

- El resultat és **positiu** si els dos nombres tenen el **mateix signe**.
- El resultat és **negatiu** si els dos nombres tenen **signes diferents**.

Exemples:

1. $(-3) \cdot (-2) = +6$

4. $(+4) : (-2) = -2$

2. $(-6) \cdot (+5) = -30$

5. $(-5) : (-5) = +1$

3. $(+5) \cdot (+5) = +25$

6. $(-15) : (-5) = +3$

Exercicis:

Exercici 8.- Calcula:

a) $(-10) \cdot (+2) =$

d) $(-36) : (-9) =$

b) $(-6) \cdot (-4) =$

e) $(-5) : (+5) =$

c) $(+3) \cdot (-7) =$

f) $(+6) : (-3) =$

Operacions combinades

Quan treballem amb operacions combinades, cal seguir l'ordre següent:

- Resolem els **parèntesis i claudàtors**.
- Fem els **productes i les divisions** en l'ordre en què es presentin.
- Fem les **sumes i restes**.

Exemples:

1. $(-3) \cdot (-2) + (-5) \cdot (+6) + (+3) \cdot (-4) =$
 $+6 + (-30) + (-12) =$
 $+6 - 30 - 12 = +6 - 42 = -36$

2. $3 + 2 \cdot (-5) - 4 \cdot [4 - 8 : (+3 - 5) - 5] =$
 $3 + 2 \cdot (-5) - 4 \cdot [4 - 8 : (-2) - 5] =$
 $3 + 2 \cdot (-5) - 4 \cdot [4 + 4 - 5] =$
 $3 + 2 \cdot (-5) - 4 \cdot (+3) = 3 - 10 - 12 = 3 - 22 = -19$

3. $5 - [(-3) + (+2) \cdot (-1) + (-5)] + 10 =$
 $5 - [(-3) + (-2) + (-5)] + 10 =$
 $5 - [-3 - 2 - 5] + 10 =$
 $5 - (-10) + 10 = 5 + 10 + 10 = +25$

4. $4 - 12 : [(-3) + (+2) \cdot (-1 + 10 : (-2) : (-5)) + (-3)] + 10 =$
 $4 - 12 : [(-3) + (+2) \cdot (-1 + 1) + (-3)] + 10 =$
 $4 - 12 : [(-3) + (+2) \cdot 0 + (-3)] + 10 =$
 $4 - 12 : [(-3) + 0 + (-3)] + 10 =$
 $4 - 12 : [-3 - 3] + 10 =$
 $4 - 12 : (-6) + 10 = 4 + 2 + 10 = +16$

Exercicis:

Exercici 9.- Calcula:

a) $5 + 2 \cdot (-3) - (2 - 4) : (+2)$

b) $8 - 5 \cdot ((+4) + (-7) \cdot (-1 + (-8) : (+4))) =$

3. NOMBRES RACIONALS

3.1. Fraccions

Una **fracció** és una expressió del tipus $\frac{a}{b}$, en què a i b són nombres enters, amb $b \neq 0$, anomenats **numerador** i **denominador** respectivament (a és el numerador i b el denominador).

Concepte de fracció

Una fracció pot representar:

- **El quocient entre dos nombres enters.** $\frac{a}{b}$ expressa el quocient o divisió entre a i b --> $a:b$. El resultat del quocient s'anomena **expressió decimal** de la fracció i pot ser un nombre enter o un nombre decimal.

Exemples:

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$

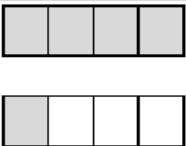
$$\frac{5}{4} = 1,25$$

$$-\frac{5}{3} = -1,666...$$

$$\frac{12}{3} = 4$$

- **Una part de la unitat.** $\frac{a}{b}$ pot representar una part de la unitat. El denominador indica el nombre de parts iguals en què dividim la unitat, i el numerador indica el nombre de parts que volem destacar.

Exemples: (Completa els dos últims)

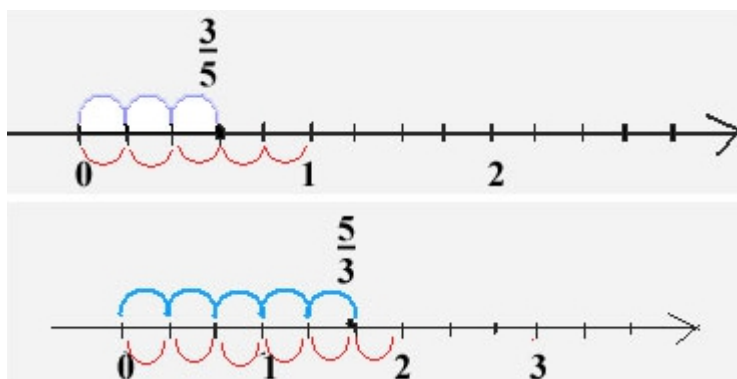
Fracció	Part de la unitat	Expressió decimal	Pròpia o impròpia
$\frac{1}{2}$		0,5	pròpia
$\frac{3}{4}$		0,75	pròpia
$\frac{5}{4}$		1,25	impròpia
$\frac{9}{3}$		3	impròpia
$\frac{2}{5}$			
$\frac{7}{3}$			

- **L'operador d'un nombre.** Per calcular $\frac{a}{b}$ d'un nombre, dividim el nombre entre b i el resultat el multipliquem per a .

Exemple: $\frac{3}{4}$ de 24: $24:4 = 6$, $6 \cdot 3 = 18 \rightarrow \frac{3}{4}$ de 24 = 18

Representació d'una fracció sobre la recta numèrica

Exemple: Representa a la recta numèrica les fraccions $\frac{3}{5}$ i $\frac{5}{3}$



Fraccions equivalents

Dues fraccions $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ són **equivalents** si $a \cdot d = b \cdot c$. Si dues fraccions són equivalents, **els resultats dels seus quocients són iguals** (tenen la mateixa expressió decimal) i **representen la mateixa part de la unitat**.

Exemples: Les fraccions següents són equivalents:			
Fracció	Parts de la unitat	Expressió decimal	$a \cdot d = b \cdot c$
$\frac{1}{2}$		$1:2 = 0,5$	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$
$\frac{2}{4}$		$2:4 = 0,5$	$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \rightarrow 1 \cdot 6 = 3 \cdot 2$
$\frac{3}{6}$		$3:6 = 0,5$	$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \rightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

Per **trobar fraccions equivalents** a una fracció donada, es pot fer:

- Per **amplificació**: multiplicant el numerador i el denominador de la fracció per un mateix nombre enter. Per amplificació es poden calcular infinites fraccions equivalents.

- Per **simplificació**: dividint el numerador i el denominador de la fracció per un mateix nombre enter, que sigui divisor comú de tots dos.



Exemples: Calcula fraccions equivalents a la donada:

1. $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \frac{18}{24} \dots$

(per amplificació)

2. $\frac{60}{24} \rightarrow \frac{30}{12}, \frac{20}{8}, \frac{15}{6}, \frac{10}{4}, \frac{5}{2}$

(per simplificació)

Exercicis:

Exercici 10.- Calcula 5 fraccions equivalents a la donada:

a) $\frac{2}{5}$ (per amplificació)

b) $\frac{120}{180}$ (per simplificació)

Reducció a denominador comú

Reduir a denominador comú dues o més fraccions és **trobar fraccions equivalents a aquestes que tinguin el mateix denominador**. Per fer-ho, seguim els passos següents:

- Calculem el **mínim comú múltiple dels denominadors**, el qual serà el **denominador comú**.

- Calculem els **numeradors** perquè les fraccions siguin equivalents, és a dir, multipliquem el numerador de cada fracció pel nombre pel qual es multiplicaria el denominador per trobar el denominador comú (perquè siguin equivalents s'ha de multiplicar el numerador i el denominador pel mateix nombre)

Exemples: Redueix a denominador comú:

1.

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{6} \rightarrow \frac{9}{12}, \frac{2}{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \underline{3} = 12 \rightarrow \text{multipliquem el numerador i denominador de la primera fracció per 3.} \\ 6 \cdot \underline{2} = 12 \rightarrow \text{multipliquem el numerador i denominador de la segona fracció per 2.} \end{array} \right.$$

$$m.c.m.(4, 6) = 12$$

2.

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{15}, \frac{2}{25} \rightarrow \frac{45}{75}, \frac{20}{75}, \frac{6}{75} \quad \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot \underline{15} = 75 \rightarrow \text{multipliquem el num. i denom. de la primera fracció per 15.} \\ 15 \cdot \underline{5} = 75 \rightarrow \text{multipliquem el num. i denom. de la segona fracció per 5.} \\ 25 \cdot \underline{3} = 75 \rightarrow \text{multipliquem el num. i denom. de la tercera fracció per 3.} \end{array} \right.$$

$$m.c.m.(5, 15, 25) = 75$$

Exercicis:

Exercici 11.- Redueix a denominador comú:

a) $\frac{2}{15}, \frac{7}{10}$

b) $\frac{5}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$

c) $\frac{3}{20}, \frac{4}{12}, \frac{2}{24}$

Fracció irreductible i simplificació de fraccions:

Una fracció és **irreductible** quan **el numerador i el denominador no tenen cap divisor comú** (són primers entre ells).

Simplificar una fracció és trobar la fracció equivalent irreductible. Es pot trobar de tres maneres diferents:

- Dividint el numerador i el denominador per divisors comuns fins que ja no tinguin cap divisor comú.
- Dividint el numerador i el denominador pel m.c.d. d'ells.
- Factoritzant el numerador i el denominador i eliminant els factors comuns.

<u>Exemples:</u>		
1. Simplifica $\frac{120}{36}$		
1r mètode: $\frac{120}{36} = \frac{60}{18} = \frac{30}{9} = \boxed{\frac{10}{3}}$	2n mètode: $\left. \begin{array}{l} 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array} \right\} m.c.d. (120, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$ $\rightarrow \frac{120}{36} = \frac{120 : 12}{36 : 12} = \boxed{\frac{10}{3}}$	3r mètode: $\frac{120}{36} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}$
2. Simplifica $\frac{45}{270}$		
1r mètode: $\frac{45}{270} = \frac{9}{54} = \frac{3}{18} = \boxed{\frac{1}{6}}$	2n mètode: $\left. \begin{array}{l} 45 = 3^2 \cdot 5 \\ 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \end{array} \right\} m.c.d. (45, 270) = 3^2 \cdot 5 = 45$ $\rightarrow \frac{45}{270} = \frac{45 : 45}{270 : 45} = \boxed{\frac{1}{6}}$	3r mètode: $\frac{45}{270} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{5}} = \boxed{\frac{1}{6}}$

Exercicis:

Exercici 12.- Simplifica $\frac{720}{420}$ fent servir els 3 mètodes.

3.2. Operacions amb fraccions

Suma i resta de fraccions

Per **sumar o restar fraccions amb el mateix denominador**, **sumem o restem els seus numeradors i deixem invariant el denominador**. Si el resultat obtingut no és irreductible, el simplifiquem.

Exemples:

$$1. \quad \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$2. \quad \frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$3. \quad \frac{8}{4} - \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Per **sumar o restar fraccions amb diferent denominador**, reduïm les fraccions a denominador comú i les sumem o restem com en el cas anterior. Finalment, simplifiquem el resultat obtingut.

Exemples:

$$1. \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{18} = \frac{27}{36} - \frac{2}{36} = \frac{25}{36} \quad m.c.m.(4,18) = 36$$

$$2. \quad 2 + \frac{1}{3} + \frac{7}{15} = \frac{2}{1} + \frac{1}{3} + \frac{7}{15} = \frac{30}{15} + \frac{5}{15} + \frac{7}{15} = \frac{42}{15} = \frac{14}{5} \quad m.c.m.(1,3,15) = 15$$

Nota: Tot nombre enter el podem expressar com una fracció de denominador 1: $2 = \frac{2}{1}$

Exercicis:

Exercici 13.- Calcula:

a) $\frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{10} - \frac{2}{15} + \frac{5}{9}$

c) $\frac{11}{12} + \frac{19}{45} - \frac{13}{18}$

Multiplicació de fraccions

El **producte de dues o més fraccions** és una altra fracció que té per **numerador el**

producte dels numeradors i per denominador el producte dels denominadors. Per calcular el signe de la fracció resultant, apliquem la regla del producte de signes.

Exemples:

$$\underline{1.} \quad \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\underline{2.} \quad \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{45}{30} = -\frac{3}{2}$$

Nota: El resultat final s'ha de simplificar sempre que no sigui irreductible.

Exercicis:

Exercici 14.- Calcula:

a) $\frac{7}{2} \cdot \frac{8}{3}$

b) $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{6}$

Divisió de fraccions

El **quocient de dues fraccions** és una altra fracció que té per **numerador el producte del numerador de la primer fracció pel denominador de la segona, i per denominador, el producte del denominador de la primera pel numerador de la segona.** A la pràctica, diem que multipliquem en creu:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Exemples:

$$\underline{1.} \quad \frac{1}{4} : \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

$$\underline{2.} \quad \frac{8}{5} : \frac{3}{10} = \frac{8 \cdot 10}{5 \cdot 3} = \frac{16}{3}$$

Nota: El resultat final s'ha de simplificar sempre que no sigui irreductible.

Exercicis:

Exercici 15.- Calcula:

a) $\frac{5}{9} : \frac{7}{4}$

b) $\frac{1}{3} : \frac{1}{9}$

A vegades, quan fem un producte o divisió de diverses fraccions, és convenient simplificar abans de multiplicar.

Exemples:

$$1. \quad \frac{4}{9} : \frac{16}{15} = \frac{4 \cdot 15}{9 \cdot 16} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{15} \cdot 5}{\cancel{3} \cdot 3 \cdot \cancel{16} \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{12}$$

$$2. \quad \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{18}{14} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 18}{12 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{18} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{12} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{14} \cdot 2 \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{4}$$

Operacions combinades

Quan fem operacions combinades amb fraccions, cal representar la jerarquia de les operacions:

- Resolem els **parèntesis i claudàtors** (es comença pels que hi ha més endins i es continua cap a fora).

- Fem els **productes i les divisions** en l'ordre en què es presentin.

- Fem les **sumes i restes**.

Convé anar fent les operacions a banda i **simplificar** cada resultat parcial.

Quan hi ha operacions en el numerador i en el denominador d'una fracció, les resolem per separat i fem el quocient de les dues fraccions resultants.

Exemples:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \right) - \frac{2}{3} : \left(\frac{2}{3} - 2 \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{12 + 2 - 5}{6} \right) - \frac{2}{3} : \left(\frac{2 - 6}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{14 - 5}{6} \right) - \frac{2}{3} : \left(\frac{-4}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{6} \right) - \frac{2}{3} : \left(\frac{-4}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{6}{12} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3 + 2}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot (5 - 7) + \frac{4}{3} - 2 \cdot \left(\frac{4}{3} + 1 \right) &= \frac{3}{2} \cdot (-2) + \frac{4}{3} - 2 \cdot \left(\frac{4 + 3}{3} \right) = \frac{3}{2} \cdot (-2) + \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{7}{3} = -\frac{6}{2} + \frac{4}{3} - \frac{14}{3} = \\ &= -3 + \frac{4 - 14}{3} = -3 - \frac{10}{3} = \frac{-9 - 10}{3} = -\frac{19}{3} \end{aligned}$$

3.3. Nombres decimals

Quan calculem l'expressió decimal d'una fracció, el resultat pot ser un nombre enter o un nombre decimal. Si el resultat és un nombre decimal, es poden donar tres casos:

- Que sigui un nombre **decimal exacte**, és a dir, que **tingui un nombre limitat de xifres decimals**.

- Que sigui un nombre **decimal periòdic pur**, és a dir, que **tingui un nombre**

il·limitat de xifres decimals que es van repetint periòdicament. El grup de xifres decimals que es repeteix s'anomena **període**.

- Que sigui un nombre **decimal periòdic mixt**, és a dir, que **tingui un nombre il·limitat de xifres decimals, algunes de les quals (no totes) es van repetint periòdicament**. El grup de xifres decimals que no es repeteix està situat abans del període.

Exemples:

$$\frac{1}{4} = 0,25 \rightarrow \text{Decimal exacte.}$$

$$\frac{3}{8} = 0,375 \rightarrow \text{Decimal exacte.}$$

$$\frac{3}{2} = 1,5 \rightarrow \text{Decimal exacte.}$$

$$\frac{2}{7} = 0,285714 \rightarrow \text{Decimal periòdic pur.}$$

$$\frac{10}{3} = 3,33333... = 3,\widehat{3} \rightarrow \text{Decimal periòdic pur.}$$

$$\frac{15}{11} = 1,363636... = 1,\widehat{36} \rightarrow \text{Decimal periòdic pur.}$$

$$\frac{1}{6} = 0,16666... = 0,1\widehat{6} \rightarrow \text{Decimal periòdic mixt.}$$

$$\frac{13}{12} = 1,08333... = 1,08\widehat{3} \rightarrow \text{Decimal periòdic mixt.}$$

Fracció generatriu (pas de nombre decimal a fracció)

Tot nombre decimal exacte o periòdic el podem expressar per mitjà d'una fracció **irreductible** que anomenem **fracció generatriu**.

Càlcul de la fracció generatriu d'un nombre decimal exacte

La **fracció generatriu d'un nombre decimal exacte** és equivalent a una **fracció que té per numerador el nombre decimal sense la coma i per denominador un 1 seguit de tants zeros com xifres decimals tingui el nombre**.

Exemples:

1. $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

2. $1,8 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

3. $0,123 = \frac{123}{1000}$

Nota: Hem de simplificar, sempre que sigui possible, atès que la fracció generatriu és irreductible.

Càlcul de la fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic pur

Per calcular la **fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic pur**, procedim com en els exemples:



<u>Exemple:</u> Calcula la fracció generatriu de $1,\widehat{3}$ i de $0,\widehat{123}$:		
Passos a seguir	$1,\widehat{3}$	$0,\widehat{123}$
Anomenem x el nombre decimal	$x = 1,\widehat{3} = 1,3333333...$	$x = 0,\widehat{123} = 0,123123...$
Multipliquem x per un 1 seguit de tants zeros com xifres té el període, per obtenir un nombre amb la mateixa part decimal que x .	$10x = 13,333333...$	$1000x = 123,123123...$
Restem els dos nombres anteriors. Com que tots dos nombres tenen la mateixa part decimal, el resultat serà un nombre enter.	$\begin{array}{r} 10x = 13,333333... \\ - x = 1,3333333... \\ \hline 9x = 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1000x = 123,123123... \\ - x = 0,123123... \\ \hline 999x = 123 \end{array}$
Aïllem la x i simplifiquem.	$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$	$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$
Fem el quocient per comprovar que és correcte.	$4:3 = 1,\widehat{3}$	$41:333 = 0,\widehat{123}$

Càlcul de la fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic mixt

Per calcular **la fracció generatriu d'un nombre decimal periòdic mixt**, procedim com en els exemples:

<u>Exemple:</u> Calcula la fracció generatriu de $1,\widehat{16}$ i de $1,25\widehat{4}$		
Passos a seguir	$1,\widehat{16}$	$1,25\widehat{4}$
Anomenem x el nombre decimal	$x = 1,\widehat{16} = 1,1666666...$	$x = 1,25454545454...$
Multipliquem x per un 1 seguit de tants zeros com xifres té l'antepèriode, per obtenir un nombre decimal periòdic pur.	$10x = 11,666666...$	$10x = 12,545454...$

Multipliquem x per un 1 seguit de tants zeros com xifres tenen el període i l'anteperíode junts, per obtenir un altre nombre amb la mateixa part decimal que l'anterior.	$100x = 116,66666...$	$1000x = 1254,545454...$
Restem els dos nombres anteriors. Com que tots dos nombres tenen la mateixa part decimal, el resultat serà un nombre enter.	$\begin{array}{r} 100x = 116,66666... \\ - 10x = 11,66666... \\ \hline 90x = 105 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1000x = 1254,545454... \\ - 10x = 12,545454... \\ \hline 990x = 1242 \end{array}$
Aïllem la x i simplifiquem.	$x = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$	$x = \frac{1242}{990} = \frac{69}{55}$
Fem el quocient per comprovar que és correcte.	$7:6 = 1,1\overline{6}$	$69:55 = 1,25\overline{4}$

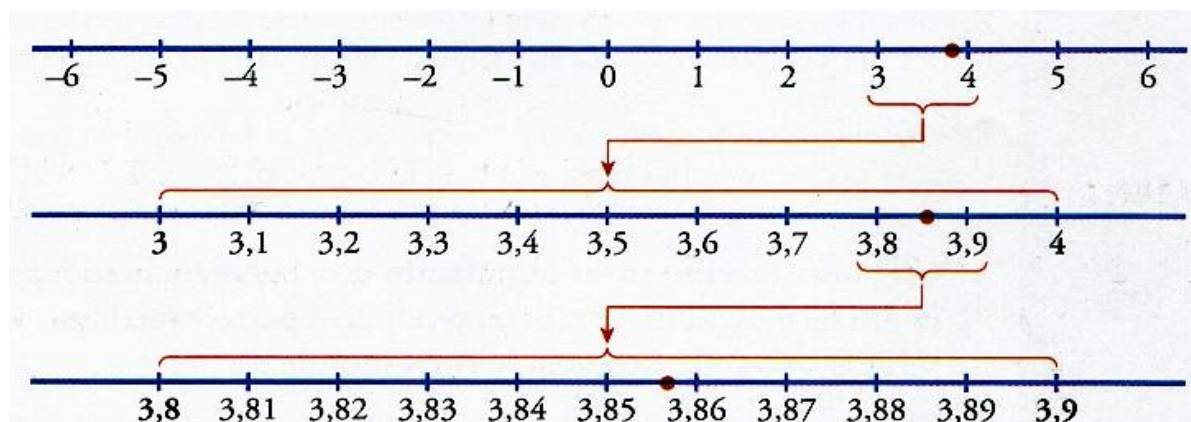
Exercicis:

16.- Calcula la fracció generatriu de:

a) 25,5	b) $1,8\overline{}$	c) $0,7\overline{2}$
d) $0,41\overline{6}$	e) $1,18\overline{5}$	f) $0,159\overline{0}$
Sol: a) $\frac{51}{2}$ b) $\frac{17}{9}$ c) $\frac{8}{11}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{32}{27}$ f) $\frac{7}{44}$		

Representació en la recta de nombres decimals

Exemple:



3.4. Nombres racionals

Un **nombre racional** és el **conjunt format per una fracció i totes les seves fraccions equivalents**. Per tant, diverses fraccions equivalents representen el mateix nombre racional. Se sol prendre com a representant del nombre racional la fracció irreductible o la seva expressió decimal:

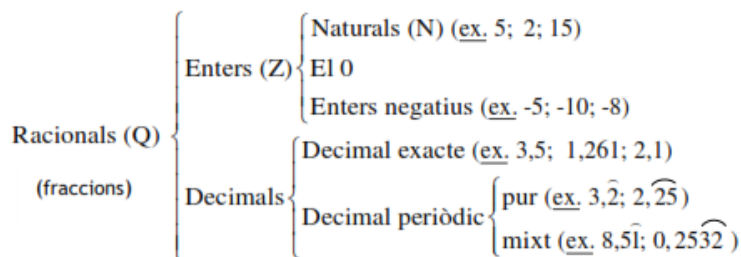
Exemple:

$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20}, \dots \right\}$ és el nombre racional representat per $\frac{1}{4}$ i d'expressió decimal 0,25.

Per simplificar, diem el nombre racional $\frac{1}{4}$ o el nombre racional 0,25.

Així doncs, **tot nombre racional es pot expressar en forma de fracció**.

El conjunt de tots els nombres racionals el simbolitzem amb la lletra $\mathbb{Q}$.



Nota:

La calculadora arrodoneix l'última xifra dels nombres periòdics que li cap a la pantalla. Exemple:

$$\frac{5}{3} = 1,6$$

El resultat que dona la calculadora és:

1,66666667

Exemple: Classifica els nombres següents:

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{4}{9} \rightarrow$ Racional, decimal periòdic pur. | g) $3,3\overline{5} \rightarrow$ Racional, decimal periòdic mixt. |
| b) $-\frac{7}{6} \rightarrow$ Racional, decimal periòdic mixt. | h) $9,161616 \rightarrow$ Racional, decimal exacte. |
| c) $\frac{13}{5} \rightarrow$ Racional, decimal exacte. | i) $3,212121... \rightarrow$ Racional, decimal periòdic pur. |
| d) $-\frac{8}{2} \rightarrow$ Racional, enter negatiu. | j) $\frac{25}{5} \rightarrow$ Racional, enter, natural. |
| e) $9,25356284542 \rightarrow$ Racional, decimal exacte. | |
| f) $3,1256256256... \rightarrow$ Racional, decimal periòdic mixt. | |

Exercicis:

17.- Classifica els nombres següents:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $-\frac{4}{5}$ | i) $-\frac{12}{4}$ |
| b) $\frac{5}{11}$ | j) $-\frac{8}{3}$ |
| c) $\frac{11}{6}$ | k) $\frac{5}{66}$ |
| d) $3,8546953215$ | l) $\frac{5}{7}$ |
| e) $3,\overline{3}$ | m) $541,35222...$ |
| f) $4,555$ | n) $8,\overline{45}$ |
| g) $9,2\overline{53}$ | o) $3,\overline{521}$ |
| h) $3,111...$ | p) $\frac{10}{2}$ |

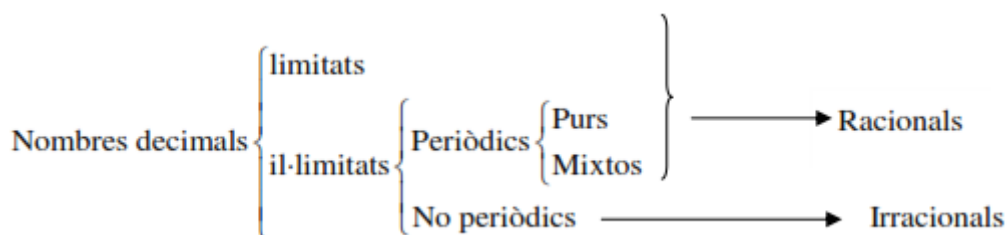
4. NOMBRES REALS

4.1. Nombres irracionals

Diem que un nombre és **irracional** si **no** es pot expressar en forma de **fracció**.

Els nombres irracionals són **nombres decimals il·limitats (amb infinites xifres decimals) no periòdics**.

El conjunt dels nombres irracionals es representa amb la lletra I .



Exemples de nombres irracionals:

- Qualsevol **arrel no exacta** (el resultat de la qual no sigui un nombre enter: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$...)
- El nombre π
- El nombre e
- Qualsevol nombre decimal il·limitat no periòdic

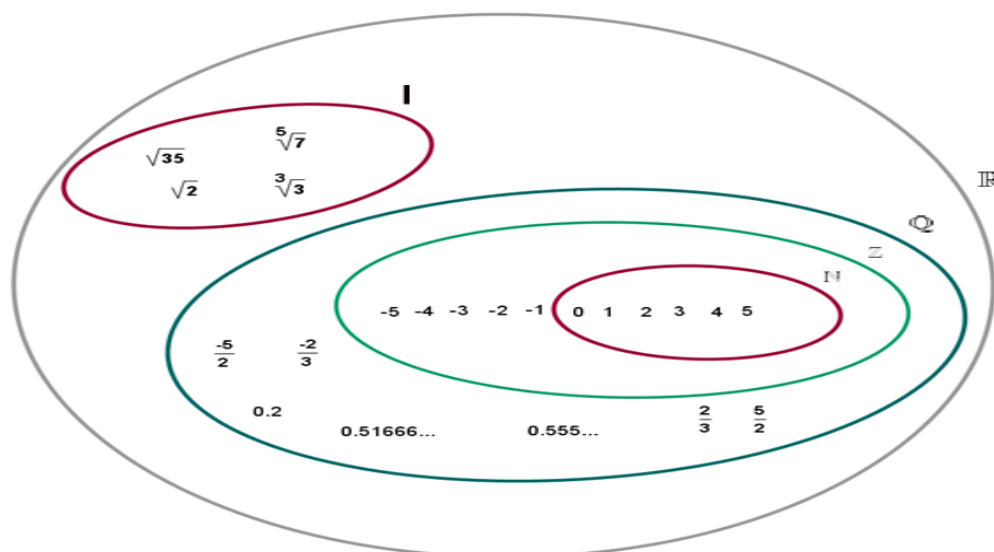
4.2. Nombres reals

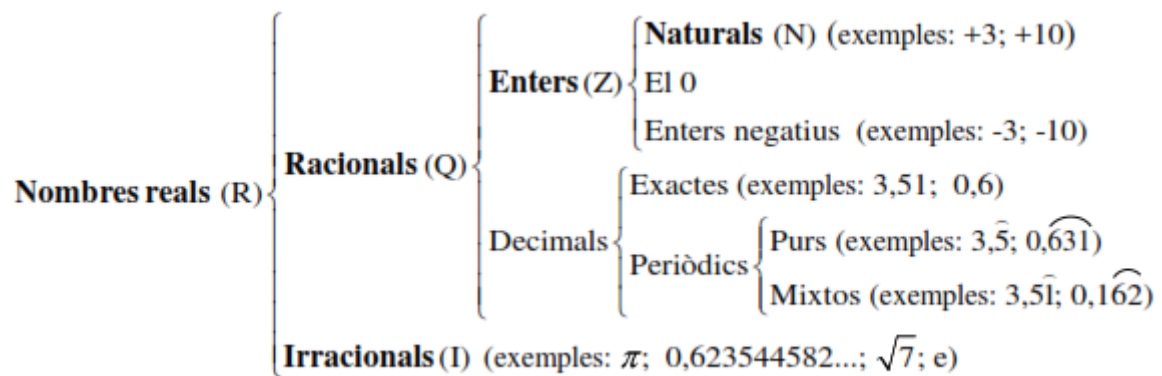
El conjunt dels nombres reals està format per la unió dels nombres racionals i els irracionals. El representem amb la lletra $\mathbb{R}$.

El conjunt dels nombres reals inclou tots els conjunts que hem estudiat fins ara: els racionals, enters i naturals:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Classificació dels nombres reals





Exercicis:

18.- Classifica els nombres següents:

a) $-3,5231\dots$

i) $-\frac{2}{11}$

b) $5,21111\dots$

j) $\frac{7}{6}$

c) $\frac{1}{5}$

k) $\pi + 3$

d) $5,1549122136$

l) $3e + 1$

e) $1,\bar{2}$

m) -5

f) $-\sqrt{3} + 1$

n) $\frac{24}{4}$

g) $\sqrt{9}$

o) $\frac{5}{4}$

h) $1,333\dots$

p) $\sqrt{10}$

Nota: En llenguatge matemàtic escrivim:

- $x \in Q \rightarrow x$ pertany al conjunt dels nombres racionals $\rightarrow x$ és un nombre racional.
- $x \notin Q \rightarrow x$ no pertany al conjunt dels nombres racionals $\rightarrow x$ és un nombre irracional.

La recta real

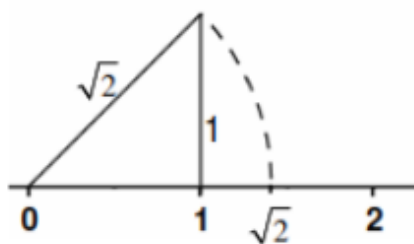
La recta real és una recta on estan representats tots els nombres reals. El conjunt dels nombres reals es correspon amb els punts de la recta, de manera que a cada punt de la recta li correspon un nombre real i a l'inrevés.

Representació en la recta real de nombres irracionals

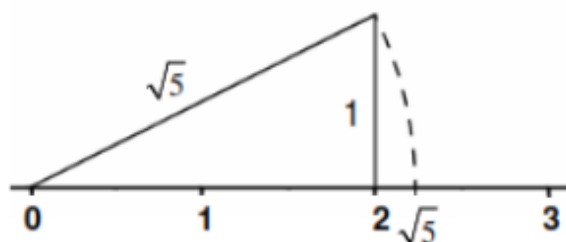
Per representar una arrel quadrada no exacta, utilitzem mètodes geomètrics. Construïm un triangle rectangle de manera que la longitud de la seva hipotenusa sigui igual al nombre que volem representar.

Exemples:

1. $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$



2. $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$



Exercicis:

Exercici 19.- Representa a la recta real:

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt{10}$

c) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{17}$

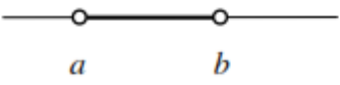
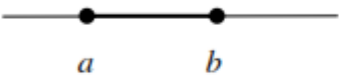
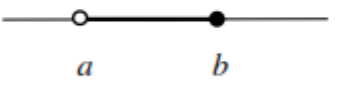
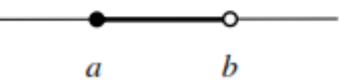
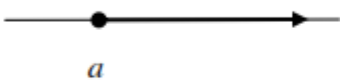
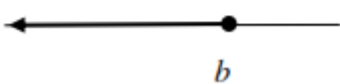
e) $\sqrt{20}$

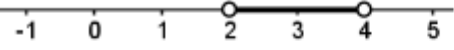
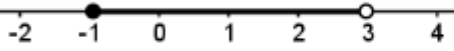
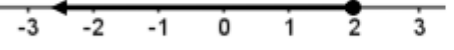
Intervals

Un **interval** és un **conjunt de nombres reals** que es corresponen amb els punts d'un **segment o una semirecta de la recta real**.

Els intervals poden ser **oberts**, si els punts extrems no s'inclouen en l'interval, **semioberts**, si només un dels punts extrems s'inclou en l'interval, o **tancats**, si tots dos punts s'inclouen en l'interval.

En el quadre següent es mostren els diferents tipus d'interval:

Interval obert (a, b)	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre a i b, excloent-ne a i b</u> .
Interval tancat $[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre a i b, incloent-hi a i b</u> .
Interval semiobert $(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre a i b, excloent-ne a i incloent-hi b</u> .
Interval semiobert $[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre a i b, incloent-hi a i excloent-ne b</u> .
Semirecta oberta $(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans que a</u> .
Semirecta tancada $[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans o iguals que a</u> .
Semirecta oberta $(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més petits que b</u> .
Semirecta tancada $(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>més petits o iguals que b</u> .

<u>Exemples:</u> Completa les dues últimes files.			
Interval obert (2,4)	$\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 4\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos</u> entre 2 i 4, <u>excloent-ne</u> 2 i 4.
Interval semiobert [-1,3)	$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 3\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos</u> entre -1 i 3, <u>incloent-hi</u> -1 i <u>excloent-ne</u> 3.
Semirecta tancada $(-\infty, 2]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$		Conjunt format per tots els nombres <u>més petits o iguals</u> que 2.
Interval semiobert $(-3, 0]$			
Semirecta oberta $(5, +\infty)$			

Quan un nombre és dintre d'un interval donat, diem que pertany a l'interval i ho escrivim:

$$x \in (a, b) \rightarrow \text{Exemple: } 2 \in (1, 5]$$

Si el nombre no és dintre de l'interval, diem que no pertany a l'interval i ho escrivim:

$$x \notin (a, b) \rightarrow \text{Exemple: } 2 \notin (3, +\infty)$$

La recta real també la podem representar en forma d'interval infinit: $(-\infty, +\infty)$

4.3. Aproximacions

Aproximacions

Per treballar amb nombres decimals que tenen moltes xifres decimals, o infinites xifres decimals, fem **aproximacions**.

Diem que una aproximació d'un nombre és **per defecte** quan és **més petita** que el valor exacte i **per excés**, quan és **més gran**.

<u>Exemples:</u> Completa l'última fila		
Valor exacte	Aproximació per defecte	Aproximació per excés
$\pi = 3,14159265358...$	3,14	3,15
$e = 2,718182...$	2,718	2,719
5,856712...		

Podem **aproximar un nombre real** per truncament o per arrodoniment:

- Per aproximar un nombre per **truncament**, prenem el nombre de xifres decimals que necessitem i eliminem la resta.

- Per aproximar un nombre per **arrodoniment**, prenem el nombre de xifres decimals que necessitem, eliminem la resta i modifiquem, si cal, l'última xifra decimal de l'aproximació en funció de la regla següent:

- Si la primera xifra que eliminem és **més petita que 5**, deixem igual les xifres anteriors (en aquest cas, el resultat coincideix amb el truncament).
- Si la primera xifra que eliminem és **més gran o igual que 5**, sumem 1 a la xifra anterior (última xifra de l'aproximació).

<u>Exemples:</u> Completa les dues últimes files.			
Valor exacte	Nombre de xifres decimals	Aproximació per truncament	Aproximació per arrodoniment
321,548752...	Dos (fins a les centèsimes)	321,54	321,55
-1,52338...	Tres (fins a les mil·lèsimes)	-1,523	-1,523
$0,2\bar{5}$	Quatre (fins a les deumil·lèsimes)	0,2555	0,2556
1,349612	Tres (fins a les mil·lèsimes)		
9,2548	Dues (fins a les centèsimes)		

L'arrodoniment és la millor aproximació amb un nombre determinat de xifres decimals.

Exercicis de l'apartat:

Exercici 20.- Classifica els nombres següents:

a) $-3,5231111...$

b) $-\sqrt{16}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $5,15151515...$

e) $1,38$

f) $\sqrt{8} + \sqrt{4}$

g) $-\sqrt{15}$

h) $1,312534...$

i) $-\frac{17}{12}$

j) $\frac{7}{2}$

k) $\pi - 1$

l) $e + 1$

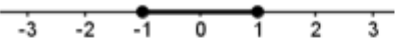
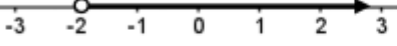
m) -8

n) $-51,324$

o) $\frac{11}{3}$

p) $5,211$

Exercici 21.- Completa el quadre:

Interval tancat $[-1,1]$	$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$		Conjunt format per tots els nombres reals <u>compresos entre -1 i 1, incloent -1 i 1.</u>
			
Semirecta oberta $(-\infty, 0)$			
Interval semiobert $(-5, 0]$			
			Conjunt format per tots els nombres reals <u>més grans que -5 i més petits que -3.</u>
	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$		

Exercici 22.- Completa el quadre:

Valor exacte	Aproximació per defecte (fins a les centèsimes)	Aproximació per excés (fins a les centèsimes)
4,2852614		
$e = 2,718182\dots$		
$5,3\overline{8}$		
$5,\overline{9}$		
3,1237		

Exercici 23.- Completa el quadre:

Valor exacte	Aproximació per truncament		Aproximació per arrodoniment	
	2 xifres decimals	3 xifres decimals	2 xifres decimals	3 xifres decimals
4,2852614				
$e = 2,718182\dots$				
$5,3\overline{8}$				
$5,\overline{9}$				
3,1237				

5 POTÈNCIES I RADICALS

5.1. Potències

Potències d'exponent natural

Si a és un nombre real i n un nombre natural, anomenem **potència de base a i exponent n** el resultat de **multiplicar a per ell mateix n vegades**:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ vegades}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Cal multiplicar la base per ella mateixa} \\ \text{tantes vegades com indiqui l'exponent.} \end{array} \right.$$

a^n ← exponent
 ↑
 base

Exemples:

1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

base: 3

exponent: 2

2. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

base: 2

exponent: 3

3. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

base: 2

exponent: 5

4. $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

base: -2

exponent: 2

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

base: 2/3

exponent: 2

Signe d'una potència d'exponent natural

- Si la **base és positiva**, la potència té **signe positiu**.

- Si la **base és negativa**:

- La potència té signe **positiu** si l'exponent és **parell**.
- La potència té signe **negatiu** si l'exponent és **imparell**.

$$(+a)^n = +$$

$$(-a)^n = \begin{cases} + & \text{si } n \text{ parell} \\ - & \text{si } n \text{ imparell} \end{cases}$$

Exemples:

1. $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

2. $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

3. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$

4. $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{4}{9}$

5. $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$

6. $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Nota:

$$(-2)^2 \neq -2^2 \begin{cases} (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4 \rightarrow \text{la base de la potència és } -2 \\ -2^2 = -2 \cdot 2 = -4 \rightarrow \text{la base de la potència és } 2 \end{cases}$$

Exercicis:

Exercici 24.- Calcula:

a) $(-5)^4 =$ b) $-5^4 =$ c) $(-5)^3 =$ d) $-5^3 =$

Potències i calculadora

Exercici 25.- Resol les següents potències utilitzant la calculadora i apunta't com es fa:

a) $3^4 =$ b) $(-5)^6 =$ c) $-2^{10} =$

Exercici 26.- Resol fent servir la calculadora (si cal) i la regla dels signes d'una potència:

a) $(-5)^4 =$ **d)** $(-3)^5 =$ **g)** $(+6)^7 =$

b) $(+4)^3 =$ **e)** $(-1)^{100} =$ **h)** $(-10)^9 =$

c) $(-8)^6 =$ **f)** $-8^6 =$ **i)** $(-2,5)^{12} =$

Propietats de les potències

	Propietat	Exemples	Desenvolupament
<u>Producte</u> de potències amb la <u>mateixa base</u>	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$	$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} = 2^5$
<u>Quocient</u> de potències amb la <u>mateixa base</u> .	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = 5^4$ $\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4}$ $\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0$	$\frac{5^7}{5^3} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ $\frac{5^3}{5^7} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^4}$ $\frac{5^7}{5^7} = 1$
Potència d'un producte	$*(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$	$(3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$ $3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$
Potència d'un quocient	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{6^2}{2^2}$	$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{6}{2} \cdot \frac{6}{2} = \frac{36}{4} = 9; \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$
Potència d'una potència	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$	$(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 =$ $= \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} = 3^6$
Potència d'exponent 1	$a^1 = a$	$7^1 = 7$	

***Nota:** $(a+b)^n \neq a^n + b^n \rightarrow \text{ex. } \underbrace{(2+3)^2}_{5^2=25} \neq \underbrace{2^2+3^2}_{4+9=13}$

Exercicis:

Exercici 27.- Simplifica (escriu com una sola potència), aplicant les propietats de les potències:

a) $2^5 \cdot 2^3 =$

b) $2^5 : 2^3 =$

c) $(2 \cdot 5)^3 =$

d) $(10 : 5)^3 =$

e) $(2^5)^3 =$

Potències d'exponent 0

Qualsevol potència d'exponent 0 es defineix com la unitat:

$$a^0 = 1$$

Potències d'exponent enter negatiu

Qualsevol potència que té exponent enter negatiu és igual a l'invers de la mateixa potència en exponent negatiu:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Nota:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{a} \text{ és la inversa de } \frac{a}{b}$$

Exemples:

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

3. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

Exercicis:

Exercici 28.- Calcula:

a) $7^{-2} =$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} =$

c) $(-8)^{-2} =$

Quadre resum

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

5.2. Radicals (arrels)

La radicació és l'operació inversa de la potenciació.

Si a és un nombre real i n un nombre natural, anomenem **arrel enèsima (o radical d'índex n) de a** tot nombre real que **elevat a n és igual a a** . Es representa per $\sqrt[n]{a}$. El nombre a s'anomena **radicand** i el nombre n s'anomena **índex**:

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{radical}} \sqrt[n]{a} \xleftarrow{\text{radicand}} \end{array}$$

Si l'índex és 2, no s'indica en l'arrel. Així $\sqrt{a}$, es llegeix **arrel quadrada de a**.

De la definició d'arrel podem deduir que:

- **L'arrel d'índex parell d'un nombre positiu té dues solucions**, que són dos nombres reals **oposats**:

$$\text{Exemples: } \sqrt{25} = \pm 5 \rightarrow \begin{cases} 5^2 = 25 \\ (-5)^2 = 25 \end{cases} \quad \sqrt[4]{16} = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} 2^4 = 16 \\ (-2)^4 = 16 \end{cases}$$

Però si no escrivim cap signe davant de l'arrel considerem que estem prenent el valor positiu (per prendre el negatiu s'escriu el signe - davant de l'arrel). A partir d'ara considerarem:

$$\sqrt{25} = 5$$

$$-\sqrt{25} = -5$$

$$\pm\sqrt{25} = \pm 5$$

- **L'arrel quadrada d'un nombre negatiu no existeix** (no és un nombre real), ja que no hi ha cap nombre real que elevat al quadrat sigui igual a un nombre negatiu.

- En general, podem dir que **l'arrel d'índex parell d'un nombre negatiu no existeix** (no és un nombre real), perquè qualsevol nombre elevat a exponent parell és positiu.

- **L'arrel d'índex imparell d'un nombre negatiu existeix, és única i negativa.**

Exemples:

a) $\sqrt{9} = 3 \rightarrow 3^2 = 9$

radicand: 9
índex: 2

b) $\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2^3 = 8$

radicand: 8
índex: 3

c) $\sqrt[4]{625} = 5 \rightarrow 5^4 = 625$

radicand: 625
índex: 4

d) $\sqrt{-9} \notin R \rightarrow \begin{cases} 3^2 = 9 \\ (-3)^2 = 9 \end{cases}$

radicand: -9 (negatiu)
índex: 2 (parell)

e) $\sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow (-2)^3 = -8$

radicand: -8 (negatiu)
índex: 3 (imparell)

f) $\sqrt[4]{-625} \notin R \rightarrow \begin{cases} 5^4 = 625 \\ (-5)^4 = 625 \end{cases}$

radicand: -625 (negatiu)
índex: 4 (parell)

Exercicis:

Exercici 29.- Resol:

a) $\sqrt[3]{27} =$ b) $\sqrt[3]{-27} =$ c) $\sqrt[4]{81} =$
d) $\sqrt[4]{-81} =$ e) $-\sqrt{81} =$ f) $\sqrt{-81} =$

Radicals i calculadora

Exercici 30.- Resol els següents radicals utilitzant la calculadora i apunta't com es fa:

a) $\sqrt[6]{64} =$ b) $\sqrt[4]{2401} =$ c) $\sqrt[5]{10} =$

Exercici 31.- Resol els següents radicals utilitzant la calculadora. Si no és exacte, arrodoneix fins a les centèsimes:

a) $\sqrt[3]{27} =$ b) $\sqrt[10]{1024} =$ c) $\sqrt[3]{-9} =$

El radical com a potència d'exponent fraccionari

Un **radical és una potència en la qual l'exponent és una fracció**. El numerador de l'exponent és la potència del radicand i el denominador de l'exponent és l'índex del radical:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Exemples:

1.- Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ c) $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$
d) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$ e) $-\sqrt[3]{5^6} = -5^{\frac{6}{3}} = -5^2$

2.- Expressa en forma de radical:

a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ b) $12^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{12^5}$ c) $(-2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-2}$
d) $-20^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{20}$ e) $6^{\frac{7}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{6^7}}$

Exercicis:

Exercici 32.- Expressa en forma de potència:

a) $\sqrt[8]{2} =$ b) $\sqrt[3]{-4} =$ c) $\sqrt[5]{5^3} =$
d) $\sqrt[15]{5^5} =$ e) $\sqrt[3]{5^{-1}} =$

Exercici 33.- Expressa en forma de radical:

a) $7^{\frac{3}{8}} =$

b) $11^{\frac{1}{4}} =$

c) $(-9)^{\frac{1}{2}} =$

d) $-6^{\frac{2}{5}} =$

e) $2^{\frac{1}{3}} =$

Propietats dels radicals

	Propietat	Exemple	Demostració passant a potències
Arrel d'un producte	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} *$	$\sqrt[3]{9 \cdot 4} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{36=6}$ $\sqrt[3]{3 \cdot 2=6}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$ $= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Arrel d'un quocient	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Arrel d'una arrel	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}} = \sqrt[12]{64}$ $\sqrt[4]{2=2}$ $\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$ $= a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
Potència d'una arrel	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64}$ $\frac{2^2=4}{2^2=4}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
Arrels equivalents	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$	$\sqrt[3]{9} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[12]{9^3}$ $\sqrt[4]{81=3}$ $\sqrt[12]{729=3}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
Arrel com a inversa de la potència	$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt{3^2} = (\sqrt{3})^2 = 3$ $\sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{2})^3 = 2$	$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

***Nota:** $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \rightarrow \text{ex. } \sqrt[3]{9+16} \neq \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{16}$
 $\sqrt[3]{25=5}$ $\sqrt[3]{3+4=7}$

Quadre resum

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$

Exercicis:

Exercici 34.- Aplica les propietats de les arrels per resoldre:

a) $\sqrt[3]{27 \cdot 8} =$

b) $\sqrt{\frac{16}{25}} =$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{10}} =$

Exercici 35.- Calcula 3 arrels equivalents a $\sqrt[5]{3^2} =$

Introducció de factors en un radical

Per introduir un factor dintre d'un radical, elevem el factor a l'índex de l'arrel:

$$b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a} \quad (\text{Demostració: } b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a})$$

Exemples:

a) $5 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$

b) $2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$

c) $3 \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{486}$

Exercicis:

Exercici 36.- Introdueix el factor dintre del radical:

a) $10 \sqrt{3} =$

b) $3 \sqrt[6]{3} =$

Extracció de factors d'un radical

Per **extreure factors d'un radical**, actuem de manera inversa al cas exterior. **Factoritzem** el radicand i quan **l'exponent d'un factor del radicand és més gran que l'índex** del radical, extraïem aquest factor fora del radical, tal com s'indica en l'exemple següent:

$$\sqrt[n]{b^n \cdot a} = b \cdot \sqrt[n]{a} \rightarrow \text{ex. } \sqrt[5]{5^{13}} = \sqrt[5]{5^5 \cdot 5^5 \cdot 5^3} = \sqrt[5]{5^5} \cdot \sqrt[5]{5^5} \cdot \sqrt[5]{5^3} = 5^2 \cdot \sqrt[5]{5^3} = 25 \cdot \sqrt[5]{125}$$

Una altra manera de fer-ho és **dividir l'exponent del factor entre l'índex del radical**:

- El **quocient** de la divisió ens indica el **nombre de factors que hem d'extreure**.
- El **residu** de la divisió ens indica el **nombre de factors que hem de deixar dins del radical**.

Així, l'exemple anterior quedaria:

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 5} \\ 3 \quad 2 \end{array} \quad \sqrt[5]{5^{13}} = 5^2 \cdot \sqrt[3]{5^3} \rightarrow \text{Extraiem 2 cincs i en deixem 3 a dins.}$$

Exemples:

$$\underline{1.} \sqrt{24} = \sqrt{2^3 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{6} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2^3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} \\ 3 \overline{) 2} \quad \text{extraiem 1 factor i en deixem 1 a dins} \\ 1 \quad 1 \end{array} \right.$$

$$\underline{2.} \sqrt[3]{16000} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 5^3} = 2^2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2} = 20 \cdot \sqrt[3]{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 5^3} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{2} \\ 7 \overline{) 3} \quad 3 \overline{) 3} \rightarrow \text{Extraiem 2 dosos i en deixem 1 a dins} \\ 1 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad \text{Extraiem 1 cinc i no en deixem cap a dins} \end{array} \right.$$

$$\underline{3.} \sqrt[3]{2^8 \cdot 5^3 \cdot 3^2 \cdot 7^{10}} = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7}$$

$$\underline{4.} \sqrt[7]{11^{25}} = 11^3 \cdot \sqrt[7]{11^4}$$

Exercicis:

Exercici 37.- Extreu factors:

a) $\sqrt{864} =$

b) $\sqrt[9]{3^{30} \cdot 5^{25}} =$

Simplificació de radicals

Per **simplificar radicals**, dividim l'índex del radical i l'exponent del radicand pel m.c.d. de tots dos, aplicant la propietat:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

Exemples: Simplifica:

a) $\sqrt[10]{3^5} = \sqrt{3}$

b) $\sqrt[9]{7^{15}} = \sqrt[3]{7^5}$

Exercicis:

Exercici 38.- Simplifica:

a) $\sqrt[15]{3^{25}} =$

b) $\sqrt[4]{7^{12}} =$

Reducció a índex comú

Reduir dos o més radicals a índex comú és trobar radicals equivalents a aquests amb el mateix índex. L'índex comú serà el m.c.m. dels índexs i per calcular els radicals equivalents usarem la propietat:

També podem passar els radicals a potència d'exponent fraccionari i reduir a denominador comú els exponents:

Exemples: Redueix a índex comú $\sqrt[4]{5^3}$ i $\sqrt[6]{7}$:

$$mcm(4,6)=12 \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3 \cdot 4]{5^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{5^9} \quad i \quad \sqrt[2 \cdot 6]{7^{2 \cdot 1}} = \sqrt[12]{7^2} \\ \sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{5^9} \quad i \quad \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{7^2} \end{array} \right.$$

Exercicis:

Exercici 39.- Redueix a índex comú $\sqrt[6]{5}$ i $\sqrt[15]{2^2}$

5.3. Operacions amb radicals

Suma i resta de radicals

Només podem **sumar i restar radicals** si, després de simplificar-los i extreure'n els factors, **tenen el mateix índex i el mateix radicand**, és a dir, si **són semblants**.

Per sumar o restar radicals semblants, sumem o restem els nombres que multipliquen els radicals (els que hi ha davant dels radicals) i deixem invariant el radical.

Exemples:

1. $7\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \boxed{5\sqrt{2}}$

2. $\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{200} = \sqrt{2^5} + \sqrt{2 \cdot 3^2} - \sqrt{2^3 \cdot 5^2} = 2^2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 \cdot 5\sqrt{2}$
 $= 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = \boxed{-3\sqrt{2}}$

3. $3\sqrt{5} + 5\sqrt{20} + \sqrt{125} = 3\sqrt{5} + 5\sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{5^3} = 3\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = \boxed{18\sqrt{5}}$

Producte i divisió dels radicals

Per **multiplicar o dividir radicals amb el mateix índex**, multipliquem o dividim els **radicands**, aplicant les propietats:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Si no tenen el mateix índex, cal reduir-les a índex comú (el m.c.m. dels índexs) i després realitzar l'operació.

Exemples:

$$\underline{1.} \quad \sqrt{7} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{42}$$

$$\underline{3.} \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{675}$$

$$\underline{2.} \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{5}$$

$$\underline{4.} \quad \frac{\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[12]{3^4}}{\sqrt[12]{5^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{5^3}} = \sqrt[12]{\frac{81}{125}}$$

Exercicis:

Exercici 40.- Realitza les operacions següents:

a) $5\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 2\sqrt{2} =$

b) $2\sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{147} - 5\sqrt{20} =$

c) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{45} - 5\sqrt{75} =$

d) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{10} =$

e) $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{10} =$

f) $\frac{\sqrt[10]{3^3}}{\sqrt[15]{5}} =$

Productes notables

Els **productes notables** són multiplicacions de binomis que es poden realitzar utilitzant fórmules que faciliten molt els càlculs.

Quadrat de la suma

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Quadrat de la resta

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b - b \cdot a + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Suma per diferència

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 + a \cdot b - b \cdot a - b^2 = a^2 - b^2$$

Nota: $a-b$ s'anomena conjugat de $a+b$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\(a-b)^2 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\(a+b) \cdot (a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Exemples: Desenvolupa:

1. $(5+\sqrt{3})^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 25 + 10\sqrt{3} + 3 = \boxed{28+10\sqrt{3}}$

2. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3 = \boxed{8-2\sqrt{15}}$

3. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = \boxed{2}$

Exercicis:

Exercici 41.- Desenvolupa:

a) $(1+\sqrt{7})^2 =$

b) $(1-\sqrt{7})^2 =$

c) $(1+\sqrt{7}) \cdot (1-\sqrt{7}) =$

d) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 =$

e) $(3-\sqrt{6})^2 =$

f) $(\sqrt{10}+\sqrt{3})(\sqrt{10}-\sqrt{3}) =$



Racionalització

Racionalitzar una fracció que tingui radicals en el denominador és **trobar una fracció equivalent a aquesta que no n'hi tingui**. A la pràctica, diem que **suprimim els radicals del denominador**. Estudiarem els casos més freqüents de racionalització:

Racionalització d'una fracció amb una arrel en el denominador

Per suprimir una **arrel quadrada** del denominador, **multipliquem numerador i denominador per la mateixa arrel**, operem i simplifiquem el resultat.

Exemples: Racionalitza:

$$1. \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

$$2. \frac{8}{3\sqrt{6}} = \frac{8 \cdot \sqrt{6}}{3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{3 \cdot 6} = \frac{8\sqrt{6}}{18} = \boxed{\frac{4\sqrt{6}}{9}}$$

Racionalització d'una fracció amb una arrel enèsima en el denominador

Per suprimir una **arrel enèsima** del denominador del tipus $\sqrt[n]{a^m}$, multipliquem numerador i denominador per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$. Així obtenim una potència enèsima en el radicand de l'arrel del denominador.

Exemples: Racionalitza:

$$1. \frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{25}}{5}}$$

$$2. \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \boxed{\frac{3\sqrt[5]{4}}{2}}$$

Racionalització d'una fracció amb un binomi en el denominador, en què almenys un dels dos termes és una arrel quadrada

Per suprimir les **arrels quadrades d'una suma o resta de dos termes (binomi)** en el denominador, **multipliquem numerador i denominador pel conjugat del denominador**:

- Si el denominador és del tipus $a+b$, multipliquem per $a-b$
- Si el denominador és del tipus $a-b$, multipliquem per $a+b$

Exemples: Racionalitza:

$$\frac{3}{4+\sqrt{10}} = \frac{3(4-\sqrt{10})}{(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10})} = \frac{3(4-\sqrt{10})}{4^2 - (\sqrt{10})^2} = \frac{3(4-\sqrt{10})}{6} = \boxed{\frac{4-\sqrt{10}}{2}}$$

Exercicis:

Exercici 42.- Racionalitza:

a) $\frac{3}{2\sqrt{3}} =$

b) $\frac{2}{\sqrt[4]{3}} =$

c) $\frac{4}{3\sqrt[5]{8}} =$

d) $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} =$

e) $\frac{5}{\sqrt{2}+1} =$

Exercici 43.- Simplifica usant les propietats de les potències (donant el resultat com una sola potència) i calcula:

a) $5^5 \cdot 5^3 =$

g) $3^2 \cdot 3^6 \cdot 3^7 =$

m) $(-4)^3 \cdot (-4)^2 =$

b) $(-4)^3 \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^2 =$

h) $3^5 \cdot 3^{-2} =$

n) $4^2 \cdot 7^2 =$

c) $5^3 \cdot (-3)^3 \cdot 2^3 =$

i) $2^5 \cdot 4^3 \cdot 16^2 =$

o) $2^3 \cdot 5^2 =$

d) $\frac{11^7}{11^3} =$

j) $\frac{6^7}{6^9} =$

p) $\frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^{-1}}{2^2 \cdot 2^5} =$

e) $\frac{8^5 \cdot 3^8 \cdot 8 \cdot 7^5 \cdot 7^{-2}}{3^5 \cdot 7^4 \cdot 8^4} =$

k) $\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^6}{(-3)^{10}} =$

q) $\frac{18^3}{3^3} =$

f) $(6^2)^5 =$

l) $\left(\left((-5)^2\right)^3\right)^2 =$

r) $\left((-2)^{-1}\right)^5 =$

Exercici 44.- Treu els parèntesis:

a) $(8yx)^2 =$

c) $(x^3 \cdot b^5 \cdot c)^3 =$

e) $(2 \cdot b^5 \cdot c^{-1})^4 =$

b) $\left(\frac{2}{11}\right)^5 =$

d) $\left(\frac{a^2 \cdot x}{y \cdot z^3}\right)^5 =$

f) $\left(\frac{2a}{7b}\right)^2 =$

Exercici 45.- Calcula les arrels següents, en cas que sigui possible:

a) $\sqrt{60} =$

c) $\sqrt{-49} =$

e) $\sqrt[3]{-729} =$

b) $-\sqrt{64} =$

d) $\sqrt[3]{1000} =$

f) $\sqrt[5]{-\frac{1}{100000}} =$

Exercici 46.- Expressa en forma d'arrel:

a) $5^{\frac{1}{4}}$

e) $(-3)^{\frac{1}{5}} =$

i) $6^{\frac{1}{2}} =$

m) $(-6)^{\frac{1}{2}} =$

b) $5^{\frac{3}{4}} =$

f) $(-3)^{\frac{2}{5}} =$

j) $6^{\frac{3}{2}} =$

n) $(-6)^{\frac{4}{2}} =$

c) $-5^{\frac{1}{4}} =$

g) $-(-3)^{\frac{2}{5}} =$

k) $6^{-\frac{1}{2}} =$

o) $(-6)^{-\frac{5}{3}} =$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} =$

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{5}} =$

l) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} =$

p) $\left(-\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}} =$

Exercici 47.- Expressa en forma potència:

a) $\sqrt[5]{3^6} =$

d) $\sqrt{8} =$

g) $\sqrt[3]{5} =$

b) $\sqrt[3]{4^6} =$

e) $\sqrt{5^4} =$

h) $\sqrt[3]{-2} =$

c) $\sqrt[3]{(-6)^2} =$

f) $\sqrt{2^2} =$

i) $\sqrt{-5^2} =$

Exercici 48.- Aplicant les propietats de les arrels, posa el resultat com una sola arrel:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} =$

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{-4} =$

e) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} =$

g) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} =$

b) $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{-15}} =$

d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} =$

f) $\sqrt{\sqrt{7}} =$

h) $(\sqrt{2})^3 =$

Exercici 49.- Simplifica aplicant les propietats de les arrels i calcula:

a) $\sqrt{\frac{169}{64}} =$

c) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} =$

e) $\sqrt{7^4 \cdot 5^2 \cdot 3^8} =$

b) $\sqrt{25 \cdot 144} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{2^{15} \cdot 3^6}{5^9 \cdot 7^{12}}} =$

Exercici 50.- Simplifica els radicals següents:

a) $\sqrt[4]{4} =$

c) $\sqrt[10]{243} =$

e) $\sqrt[12]{1024} =$

b) $\sqrt[6]{625} =$

d) $\sqrt[9]{64} =$

f) $\sqrt{81} =$

Exercici 51.- Redueix els radicals següents a índex comú:

a) $\sqrt[4]{5}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[5]{5^2}, \sqrt{7}, \sqrt[15]{3^4}$

c) $\sqrt[4]{11^3}, \sqrt[8]{2^7}, \sqrt[6]{7}$

Exercici 52.- Extreu fora del radical els factors que sigui possible:

a) $5\sqrt{32} =$

d) $\sqrt[5]{384} =$

b) $\sqrt{\frac{9}{20}} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{72}{250}} =$

c) $5\sqrt[3]{128} =$

f) $\sqrt[4]{7^8 \cdot 5^3 \cdot 2^{11}} =$

Exercici 53.- Introduueix els factors sota el signe radical:

a) $5\sqrt{3} =$

c) $3\sqrt[3]{2} =$

e) $5\sqrt[4]{3} =$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{2} =$

d) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} =$

Exercici 54.- Efectua els productes següents, simplificant el resultat si és possible:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4} =$

c) $\sqrt[15]{3} \cdot \sqrt[6]{7} =$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{2} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{2}{3}} =$

Exercici 55.- Efectua les sumes i les restes següents:

a) $2\sqrt{54} - \sqrt{216} + 5\sqrt{24} =$

b) $5\sqrt{3} + \sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{27} =$

c) $\sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{135} + 3\sqrt[3]{5} =$

d) $3\sqrt{50} - 2\sqrt{98} + \sqrt{32} =$

e) $\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{81} =$

f) $\sqrt{98} + \sqrt{300} - 2\sqrt{72} + \sqrt{50} - 5\sqrt{3} =$

Exercici 56.- Desenvolupa i digues si el resultat és racional o irracional:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 =$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 =$

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$

d) $(2\sqrt[3]{7})^3 =$

Exercici 57.- Racionalitza:

a) $\frac{12}{\sqrt{2}} =$ b) $\frac{2}{3\sqrt{2}} =$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} =$ d) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} =$ e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} =$

Exercici 58.- Realitza les operacions següents, racionalitzant les expressions prèviament:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} =$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} =$ c) $\frac{1}{3+\sqrt{7}} + \frac{1}{3-\sqrt{7}} =$ d) $\frac{1}{\sqrt{5}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}-1} =$

6 NOTACIÓ CIENTÍFICA

6.1. Notació científica

Els nombres molt grans o molt petits se solen escriure en **notació científica**, és a dir, **com a producte decimal més gran o igual que 1 i més petit que 10 multiplicat per una potència de 10**:

$$a \cdot 10^n \quad \text{on} \quad a \in [1, 10) \quad i \quad n \in \mathbb{Z} \quad (n \text{ és un nombre enter})$$

Si el nombre és gran, l'exponent és positiu i si és petit, l'exponent és negatiu.

Per **passar de notació científica a la forma decimal habitual**, fem servir la regla pràctica següent:

$$a \cdot 10^n \rightarrow \text{fem córrer la coma del nombre } a \text{ } n \text{ llocs cap a la dreta.}$$

$$a \cdot 10^{-n} \rightarrow \text{fem córrer la coma del nombre } a \text{ } n \text{ llocs cap a l'esquerra.}$$

Per **escriure un nombre en notació científica**, posem la coma **darrera de la primera xifra diferent de 0** i escrivim una potència de 10 d'exponent igual al nombre de llocs que hem fet córrer la coma.

Exemples:

1. $5.250.000.000.000 = 5,25 \cdot 10^{12}$

2. $0,000000000035 = 3,5 \cdot 10^{-11}$

3. $8 \cdot 10^{-3} = 0,008$

4. $1,5483 \cdot 10^{10} = 15.483.000.000$

5. Massa del Sol: $2 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 2.000.000.000.000.000.000.000.000 \text{ kg}$

6. Càrrega d'un electró: $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ coulombs} = 0,00000000000000000016 \text{ coulombs}$

7. Nombre d'estrelles que hi ha en una galàxia: $10^{11} = 100.000.000.000$

8. Nre. d'àtoms que conté un mol (Nre. d'Avogadro):

$$6,02 \cdot 10^{23} = 602.000.000.000.000.000.000$$

Exercicis:

Exercici 59.- Passa de forma decimal habitual a notació científica:

a) $27.500.000.000 =$

b) $0,000000000000000000081 =$

c) $1.000.000 =$

d) $0,0032 =$

Exercici 60.- Passa de notació científica a forma decimal habitual:

a) $8,123 \cdot 10^{17} =$

b) $3 \cdot 10^{-10} =$

c) $2,16 \cdot 10^{-6} =$

d) $10^{-3} =$

Notació científica i calculadora

Quan operem amb una calculadora científica i el resultat té més xifres de les que caben en la pantalla o hi ha molts zeros a la dreta de la coma, la calculadora expressa aquest resultat directament en notació científica.

Exemple: Efectua l'operació 2^{100} amb la teva calculadora i apunta el que surt a la pantalla:

$$\boxed{} = 1,2676506 \cdot 10^{30}$$

Nota: En moltes calculadores no apareix el 10. No t'oblides d'escriure'l tu.

També podem **introduir a la calculadora valors en notació científica** i operar amb ells. Per fer aquesta operació s'utilitza, en la majoria de calculadores, la tecla **EXP**.

Exemples: Introdueix a la calculadora i apunta com es fa:

$$1,6,02 \cdot 10^{23} =$$

2. $1,6 \cdot 10^{-19} =$

Exercicis de l'apartat:

Exercici 61.- Escribe los nombres siguientes en notación decimal habitual:

a) $3 \cdot 10^8 =$

c) $8,31 \cdot 10^{-10} =$

e) $5,2 \cdot 10^{-5} =$

g) $3,5 \cdot 10^{12} =$

b) $1,325 \cdot 10^9 =$

d) $6,345821 \cdot 10^{25} =$

f) $7,25 \cdot 10^{-4} =$

h) $6 \cdot 10^{-1} =$

Exercici 62.- Escribe los números siguientes en notación científica

a) $3.526.498.889.500 =$

d) 350.000.000.000 =

b) 0,0005 =

e) $0,00000000000000000000000025 =$

c) $0,01 =$

f) 453.000 =

Exercici 63.- Calcula l'expressió decimal de:

a) $10^6 =$

c) $10^{-3} =$

e) $10^{-2} =$

b) $10^{-1} =$

d) $10^{10} =$

f) $10^{-6} =$

Exercici 64.- Expressa en notació científica:

a) 100.000.000 =

c) $10.000 =$

b) $0,001 =$

d) $0,000001 =$

Exercici 65.- Calcula quants quilòmetres equivalen a un any llum (distància que recorre la llum en un any) i expressa el resultat en notació científica (la velocitat de la llum és de 300.000 km/s)