

# Materials manipulatius, un camí cap a l'abstracció

Laboratori de Matemàtiques  
09/12/2020

Daniel Ruiz Aguilera  
@druizaguilera

**cesire\***



**Universitat**  
de les Illes Balears

Departament  
de Ciències Matemàtiques  
i Informàtica

# Per començar...

<https://www.menti.com/k778t2aqwq>

[www.menti.com](https://www.menti.com) codi: 7591689

# Laboratori de matemàtiques C\*: propostes amb materials manipulatius



The background is a complex abstract composition of geometric shapes. In the top left, there is a large black circle with a smaller purple circle inside it. Below this, there are several other circles in shades of pink, yellow, and blue. The central area is filled with a dense network of thin, intersecting lines in various colors (grey, black, red, green). Scattered throughout are numerous smaller geometric forms: triangles, squares, rectangles, and circles, some of which are filled with colors like yellow, blue, green, and red. The overall effect is one of dynamic, non-representational geometry.

Què són els materials manipulatius?

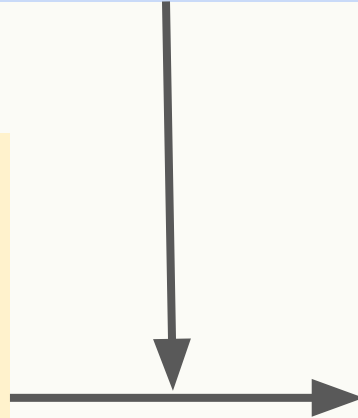
Material manipulatiu:

*Qualsevol objecte que pot ajudar als alumnes a percebre algun concepte matemàtic mitjançant la seva manipulació*

+ activitat

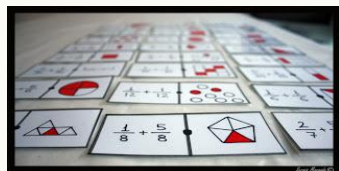
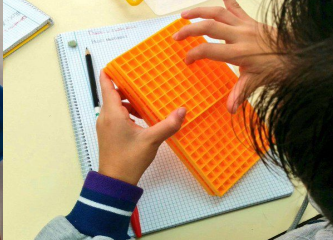
Material

Recurs

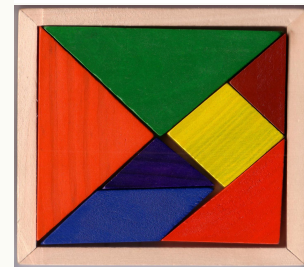
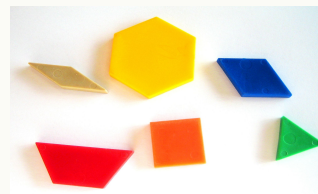
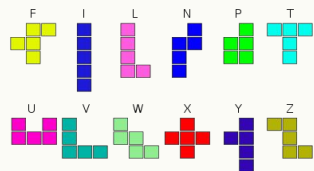
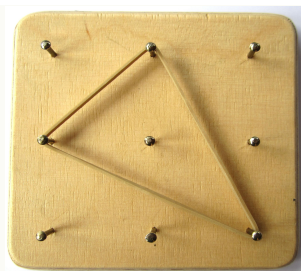


An abstract geometric artwork featuring a variety of shapes and colors. In the top left, there is a large black circle with a purple center. To its right, a yellow triangle is visible. In the top right, a complex geometric pattern with a grid and various colored shapes (blue, red, black, white) is present. The background is filled with numerous thin, intersecting lines in various colors (grey, blue, red, green) and larger, semi-transparent shapes like circles and triangles. The overall composition is dynamic and layered.

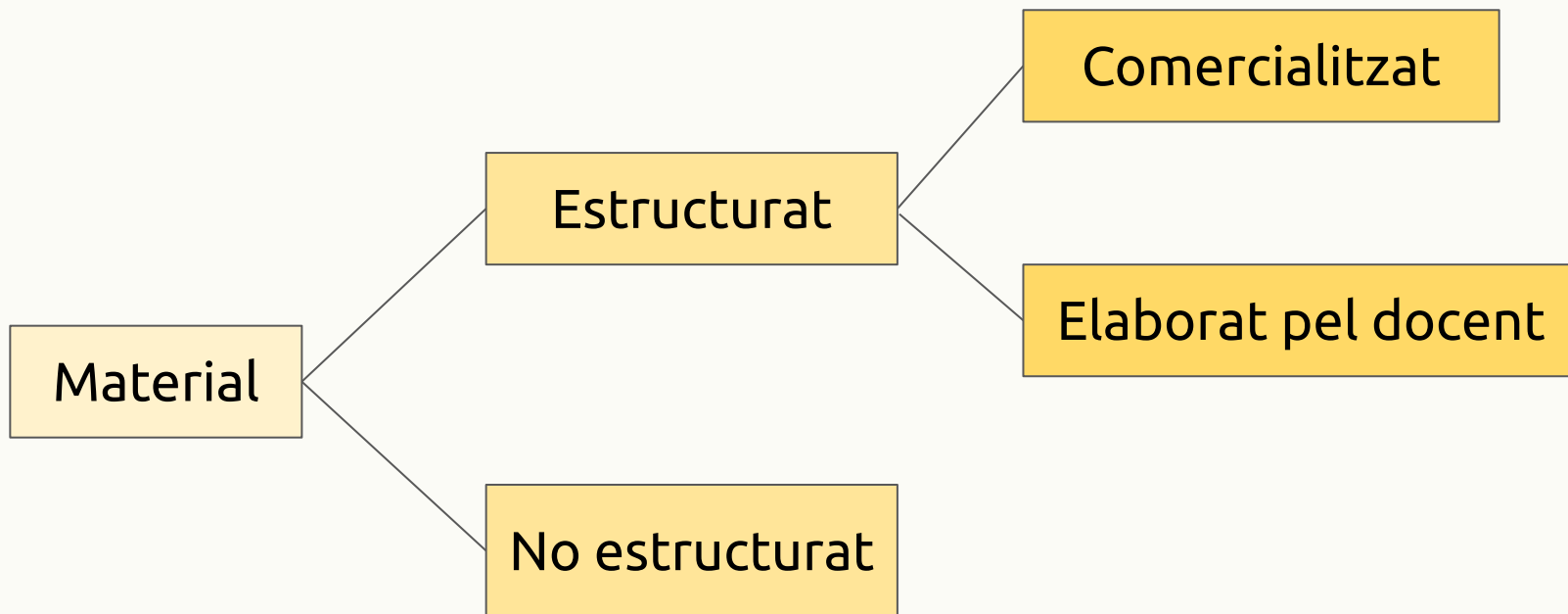
Quins tipus de materials existeixen?



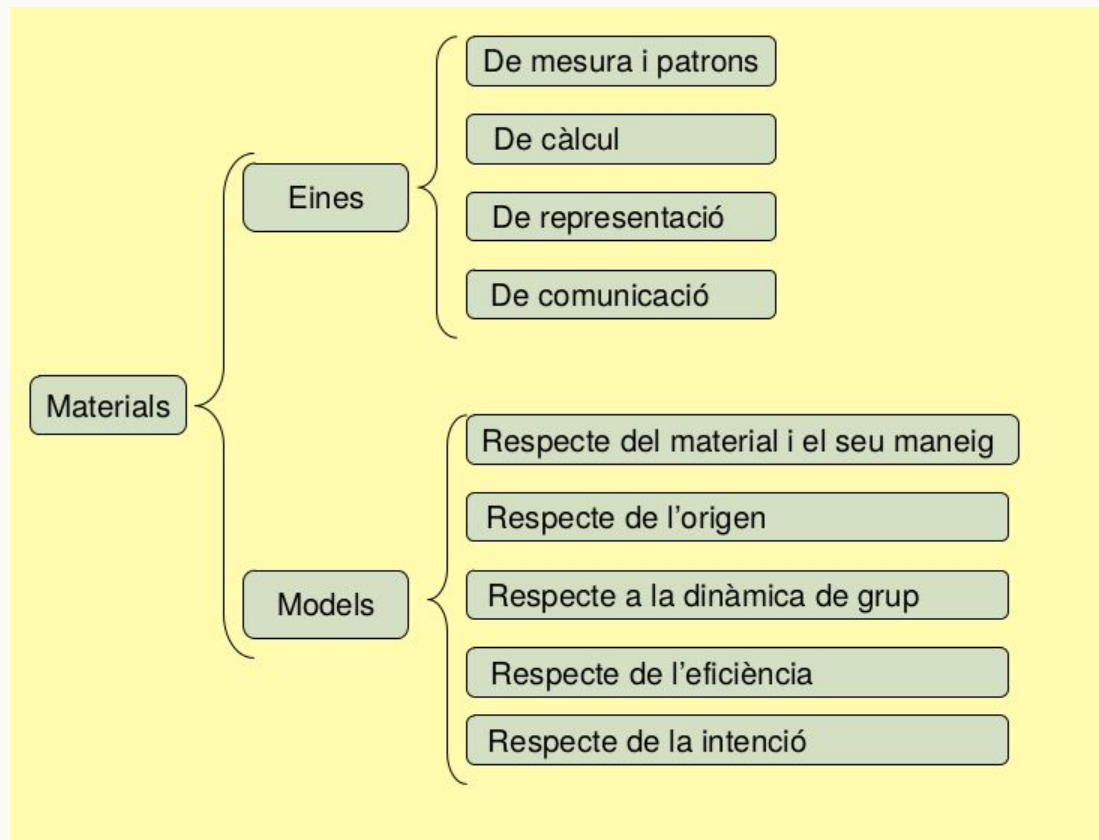
|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |



# Una classificació molt extesa



# Segons Anton Aubanell (Llicència d'Estudi 2006)



# 10 materials per aprendre numeració i càlcul

Cigrons,  
escuradents



Collarets, Línia  
numèrica buida



Blocs base 10



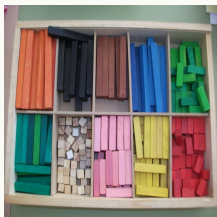
Policubs



Cartrons Montessori



Regletes



Cartes, bingo,  
dòmimos



Graella del 100

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Calculadora



Diners



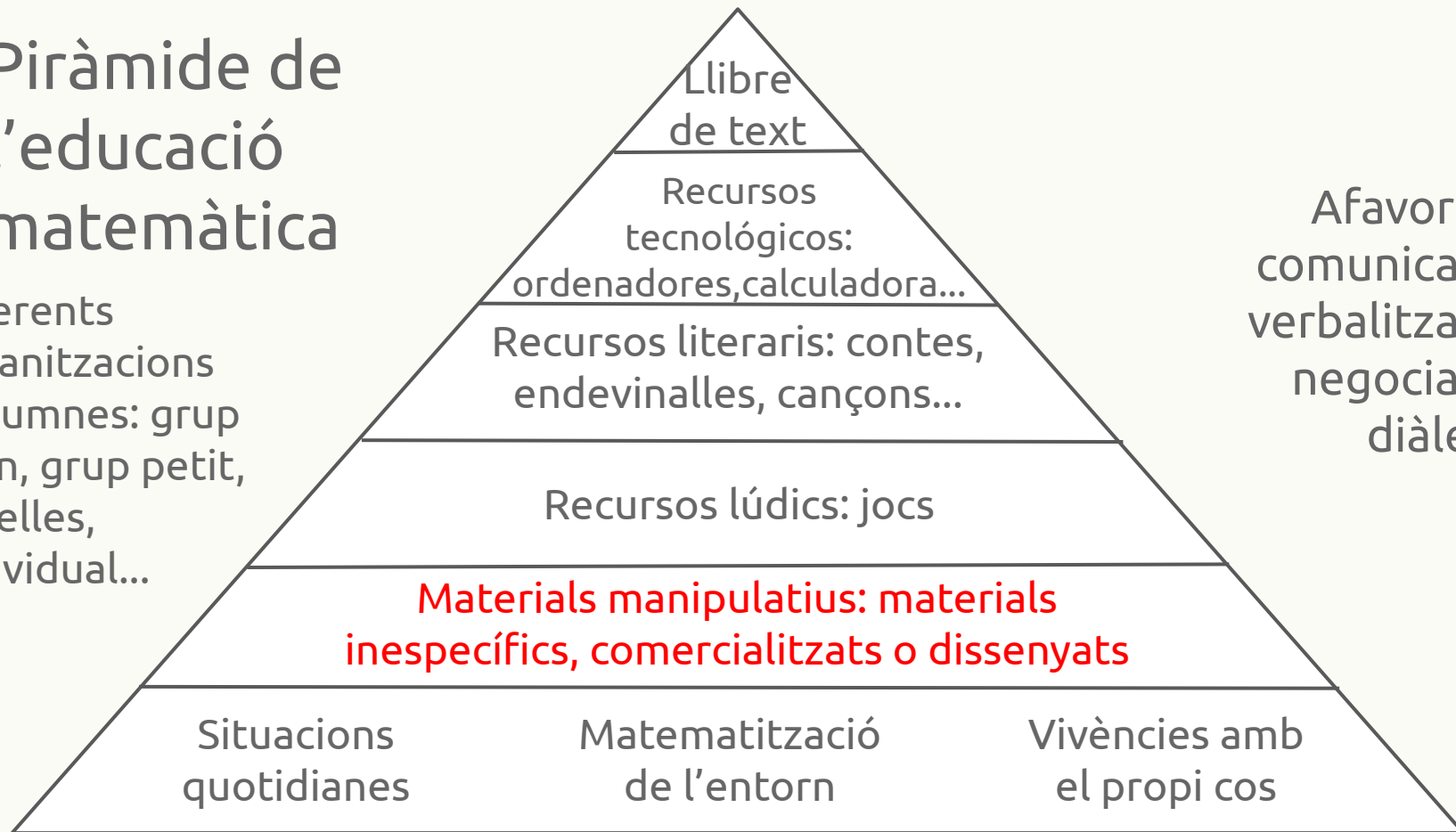
The background is a complex abstract composition of various geometric shapes and colors. In the top left, there is a large black circle with a purple center. To its right, a tilted rectangular area contains a grid of squares in black, white, and yellow, with some squares containing smaller colored circles. In the bottom right, there is a green circle with a yellow triangle overlapping it, and a small red square. The background is filled with thin, light-colored lines and other smaller geometric shapes in shades of blue, yellow, and purple.

# Recomanacions d'ús de materials manipulatius

# Piràmide de l'educació matemàtica

Diferents organitzacions d'alumnes: grup gran, grup petit, parelles, individual...

Afavorir la comunicació: verbalització, negociació, diàleg...



**La pirámide de la educación matemática (Àngel Alsina, 2009)**

# Segons Maria Antònia Canals et al. (Més de 7 materials per a l'Aprenentatge de la Matemàtica, 1988)

## J. PIAGET

1. Joc manipulatiu

2. Expressió oral i  
gràfica

3. Expressió escrita  
i simbòlica

## K. LOWELL

1. Percepció

2. Abstracció

3. Generalització

## G. MIALARET

1. Acció-Manipulació

2. Acció + Llenguatge

3. Conducta narrativa  
4. Material no figuratiu  
5. Traducció gràfica

6. Traducció simbòlica

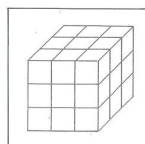
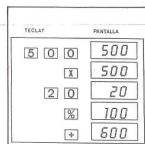
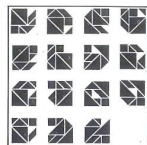
## Z.P. DIENES

1. Joc lliure  
2. Material estructurat  
3. Jocs semblants  
4. Representació gràfica  
5. Descripció  
6. Descripció formal.

# Segons Maria Antònia Canals et al. (Més de 7 materials per a l'Aprenentatge de la Matemàtica, 1988)

## Més de 7 Materials per a l'Aprenentatge de la Matemàtica

Grup Almosa



dossiers  
ROSA SENSAT



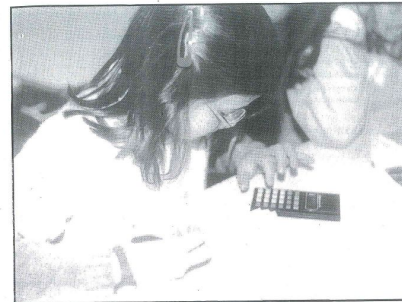
1

### JUSTIFICACIÓ

No és pas perquè sí que, com a grup, hem dedicat una gran part del nostre temps i treball a l'estudi de materials per a l'aprenentatge de la matemàtica, i a la importància de la manipulació en l'adquisició de conceptes.

Tot el nostre treball parteix de la ferma convicció que l'etapa primera de l'aprenentatge de qualsevol concepte matemàtic ha de ser la manipulació.

De fet, si donem un cop d'ull als estudis dels principals especialistes ens trobem que tots ells coincideixen en considerar la manipulació com una de les principals bases de la motivació, com una mani-



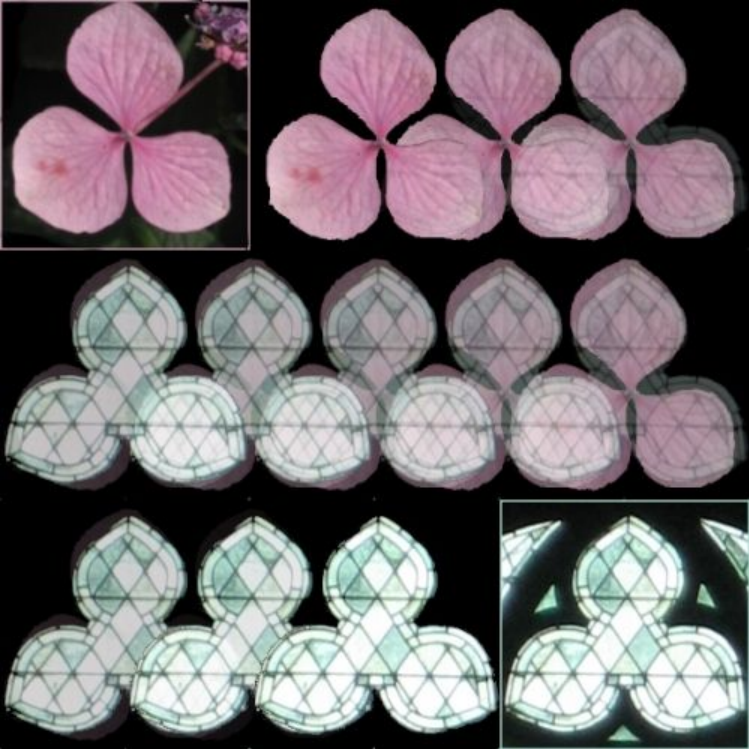
4

### CALCULADORA

#### 4.1. INTRODUCCIÓ I DESCRIPCIÓ

Quan en realitat la calculadora ja hauria de ser totalment integrada a l'escola, com ho està ja totalment en l'ús quotidià, s'observa que encara hi ha una forta reticència per part dels pares i dels mestres en permetre que els nens les utilitzin a la classe.

Cal considerar la calculadora com una eina didàctica que el nen ha de conèixer, ha de saber manejar, ha de veure les limitacions que té, ha d'experimentar amb ella i descobrir les seves prestacions.



# Etapes d'apprentissage

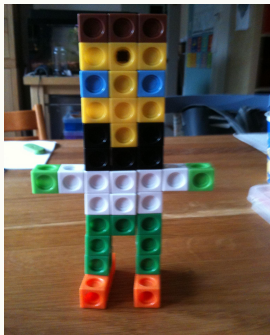
Del més concret al més abstracte

# Etapes d'aprenentatge

## 1. a) Etapa manipulativa lliure

Els alumnes toquen, experimenten, proven, s'equivoquen amb el material presentat

El temps de familiarització depén del curs, del nivell, del material en si mateix (si té colors, formes diferents...)



# Etapes d'aprenentatge

## 1. b) Etapa manipulativa guiada

A partir d'instruccions concretes, proposar situacions a resoldre

Exemples: construir una forma concreta, construir els cubs, patrons...



# Etapes d'aprenentatge

## 2. a) Etapa d'expressió oral

Una vegada resolta la tasca de forma manipulativa, fer una explicació oral del que ha passat... A la parella, al grup petit o a tota la classe

Exemples: patrons, comptar a la línia numèrica...

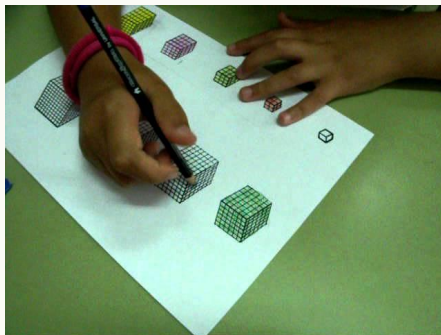


# Etapes d'aprenentatge

## 2. b) Etapa gràfica

Posteriorment fer una representació gràfica d'allò viscut: serveix per reforçar el que s'ha treballat i comprendre el camí seguit

Exemples: representar els cubs



# Etapes d'apprentissage

## 3. Etapa simbòlica

Possibilitat de substituir una acció o objecte per un símbol. Aquí neixen l'abstracció i la conceptualització. Poden "imaginar-se" els conceptes i pensar en les propietats matemàtiques.



# Etapes d'aprenentatge

1. Etapa manipulativa
  - a. Lliure - Familiarització
  - b. Guiada
2. Representació
  - a. Expressió oral
  - b. Expressió escrita
3. Etapa simbòlica



## **Atenció!**

**Diferents etapes poden conviure a la vegada!**

**El temps de dedicació en cada etapa varia segons l'edat i coneixements dels alumnes**



**El material ha de mutar cap a l'abstracció!**

# I... estam al segle XXI!



Imprescindible per a  
l'etapa d'expressió oral

No se simula el material,  
és el material  
directament el que es  
projecta i es manipula

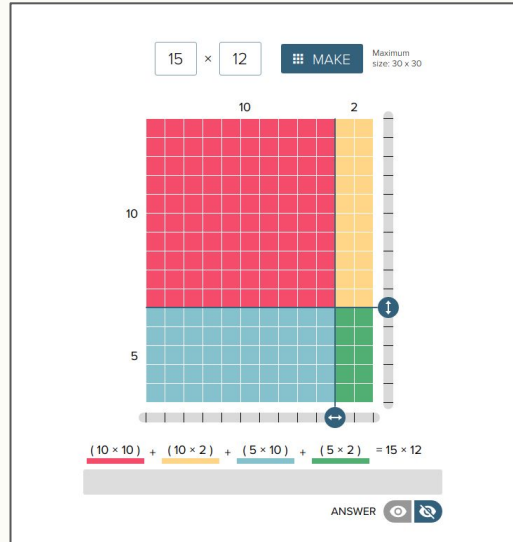
# Un exemple: multiplicació en rajola



Fundació Llor

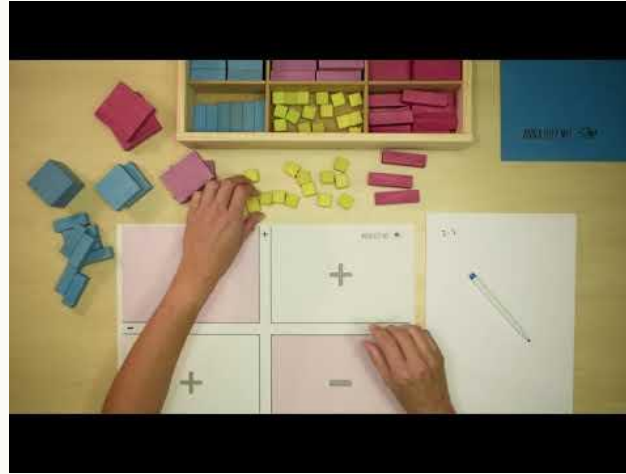
<https://www.youtube.com/watch?v=LrWqAaVNslY>

# el complement digital



<https://apps.mathlearningcenter.org/partial-product-finder/>

# I no acaba aquí...



Àlgebra manipulant l'Algemat  
Anna Vilaró

## Multiplicació de polinomis

# I no acaba aquí...

$$(x^2+3x-5)(2x-8)$$

|       |        |         |
|-------|--------|---------|
|       | $2x$   | $-8$    |
| $x^2$ | $2x^3$ | $-8x^2$ |
| $+3x$ | $6x^2$ | $-24x$  |
| $-5$  | $-10x$ | $40$    |

$$2x^3 - 2x^2 - 34x + 40$$

$(2x-1)^2$  means  $(2x-1)(2x-1)$

|      |        |       |
|------|--------|-------|
|      | $2x$   | $-1$  |
| $2x$ | $4x^2$ | $-2x$ |
| $-1$ | $-2x$  | $+1$  |

$$4x^2 - 4x + 1$$

$(4x+2)^2$  means  $(4x+2)(4x+2)$

|      |         |       |
|------|---------|-------|
|      | $4x$    | $+2$  |
| $4x$ | $16x^2$ | $+8x$ |
| $+2$ | $+8x$   | $+4$  |

$$16x^2 + 16x + 4$$

[https://mathequalslove.blogspot.com/  
@mathequalslove](https://mathequalslove.blogspot.com/@mathequalslove)

## Multiplicació de polinomis

An abstract geometric composition featuring a variety of shapes and colors. In the top left, there is a large black circle with a purple center. Below it, a yellow circle with a blue border. In the bottom left, a small blue circle with a yellow border. In the top right, a complex geometric shape with a grid pattern and various colored sections (yellow, black, blue, green, red). In the bottom right, a green circle with a yellow triangle and a red square. The background is white with faint, light gray lines and shapes, creating a sense of depth and complexity.

# Crítiques i contraindicacions

L'ús dels materials pot enlluernar





Bell (1992)

*“Existeix la creença que la comprensió es produeix a través dels dits, cosa que sembla un dogma”*

*“Una de les raons per les que nosaltres, com a adults, podem exagerar el poder de les representacions concretes per aconseguir missatges matemàtics precisos és que nosaltres estem ‘veient’ conceptes que ja entenem”*

# Passar l'arada davant dels bous





“És que hem  
comprat aquest  
material i volem  
saber com  
emprar-lo amb els  
nostres alumnes”

(any 2019)



“I com es  
multipliquen  
fraccions amb les  
taules perforades?”

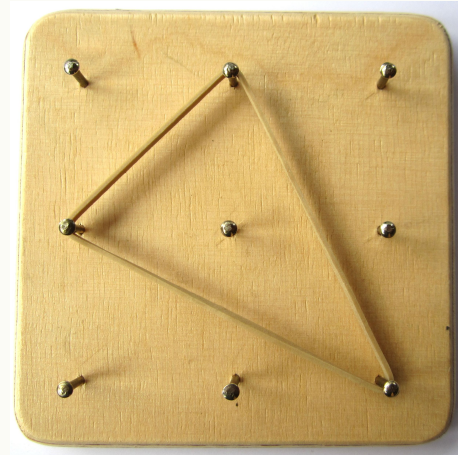
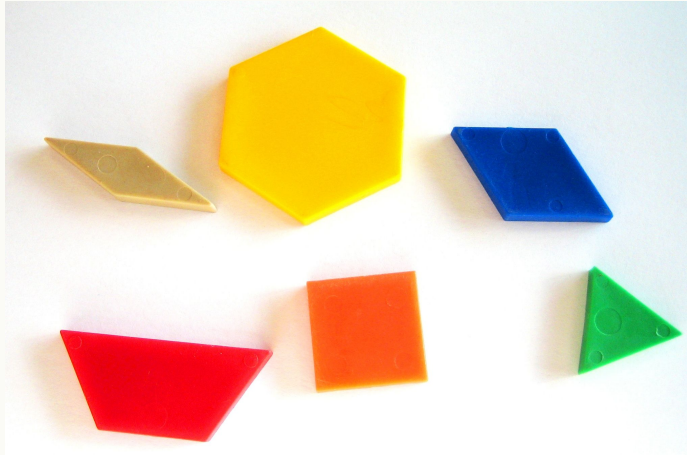
(any 2019)

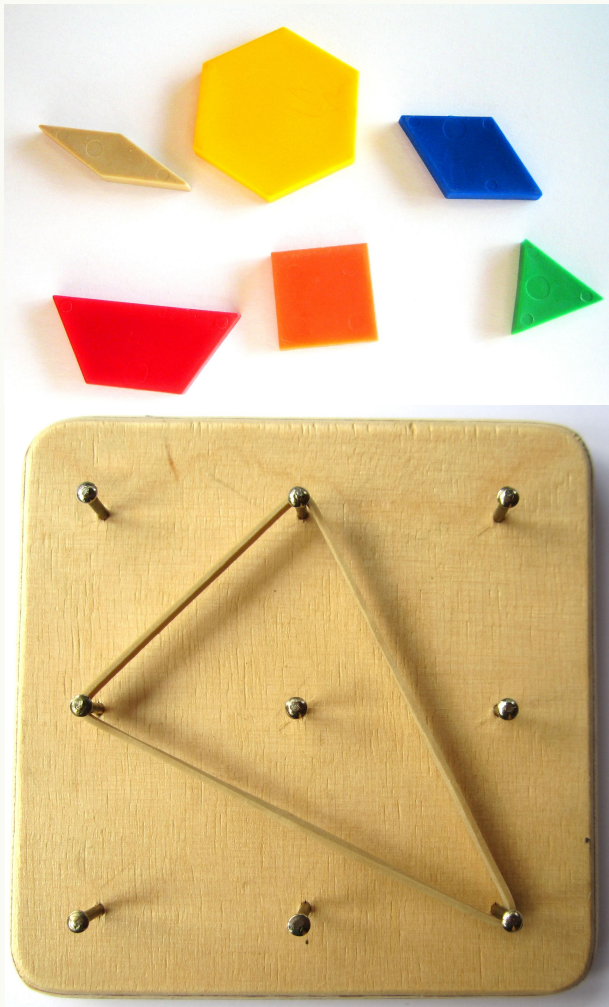


“Si ja saben la  
multiplicació  
manipulativa, ja  
està, no?”

(any 2019)

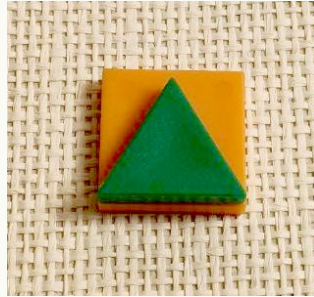
# Els materials tenen limitacions





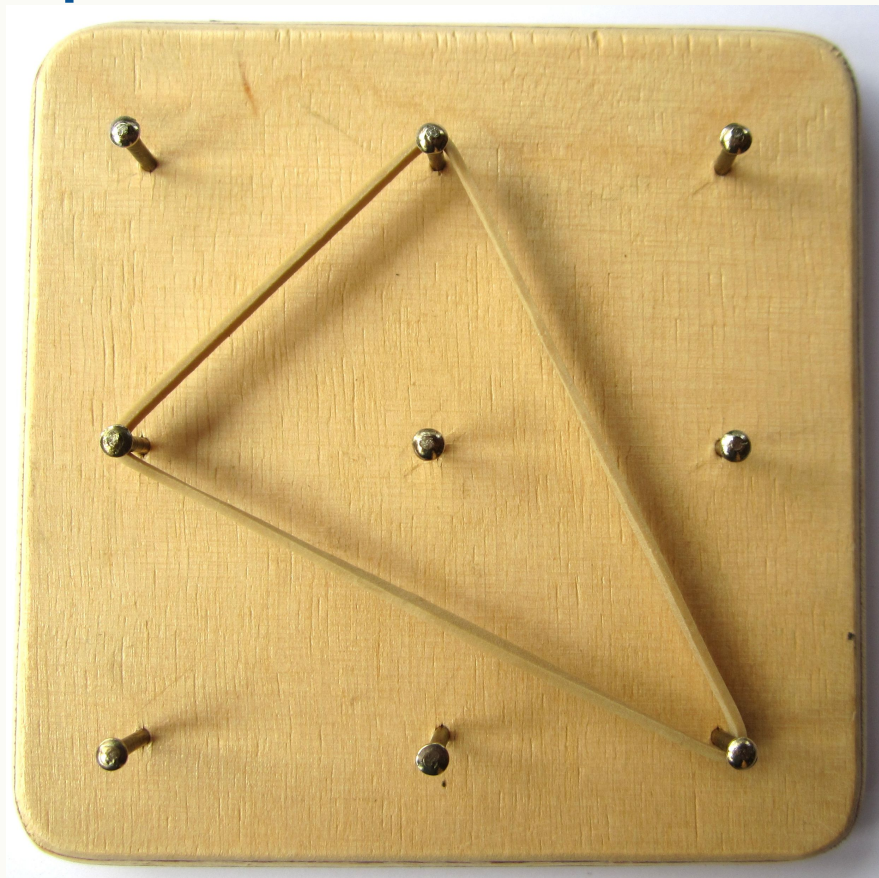
Hem de conèixer les  
limitacions del  
material per saber  
quina pregunta fer  
per arribar a  
conclusions

# Quina relació hi ha entre les àrees?



Si l'àrea del quadrat és 1, la del triangle equilàter és  $\sim 0,433$

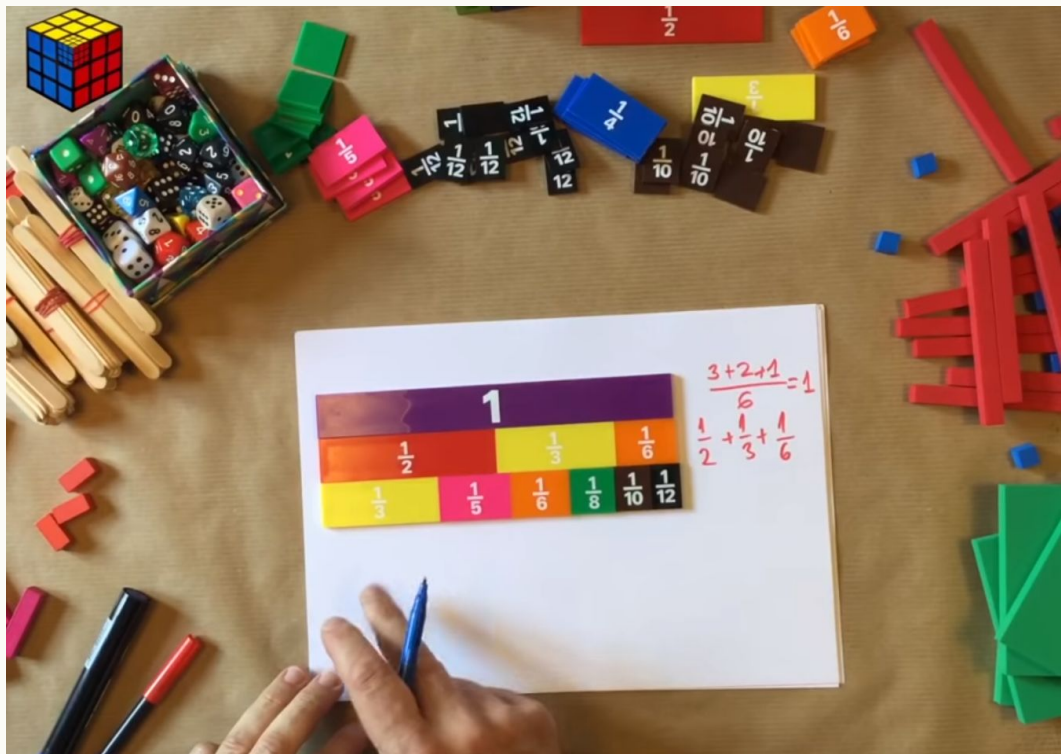
# Quin perímetre té el triangle?



# Pots trobar fraccions que facin 1?



# Pots trobar fraccions que facin 1?



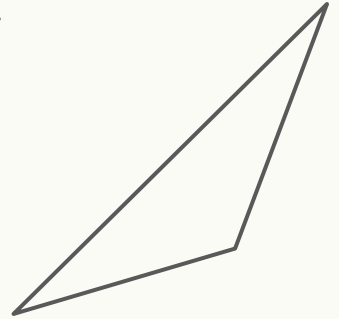
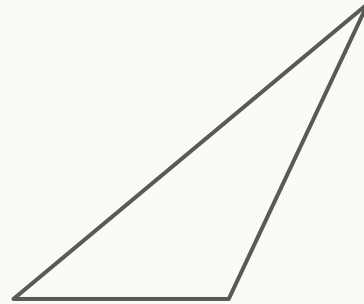
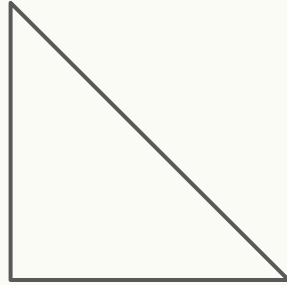
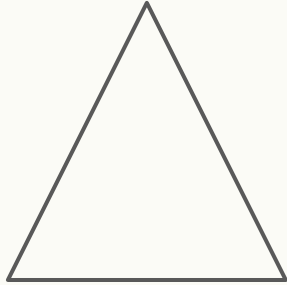
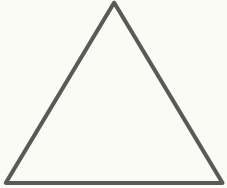
Si sumem:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} =$$

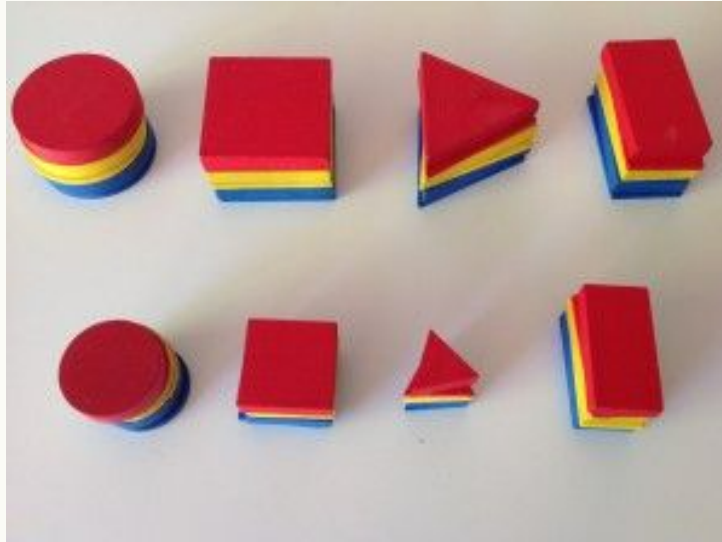
$$\mathbf{\frac{121}{120} (!)}$$

“Hacemos matemáticas con las manos, por la vista, pero también con la cabeza... A veces la manos y la vista también nos pueden engañar”

# Dibuixeu un triangle!

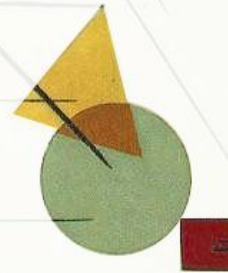
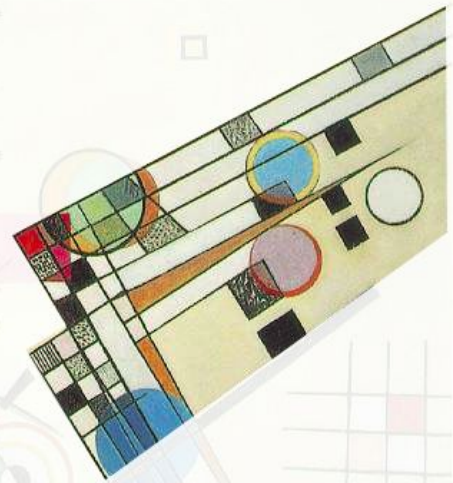
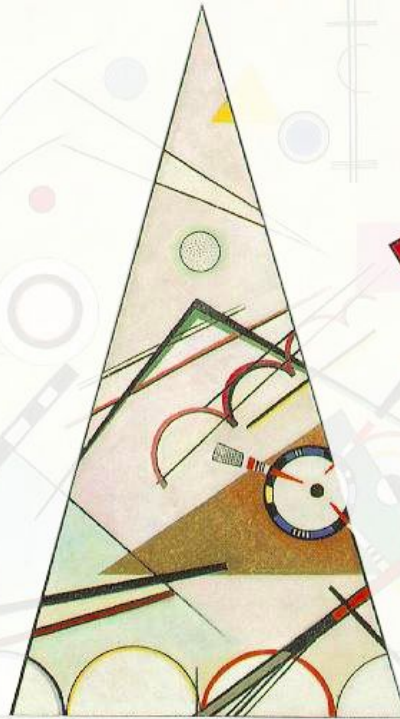


# Dibuixeu un triangle!



Els blocs lògics no són per fer geometria!

Què en diuen  
els estudis?





2º workshop ETEM

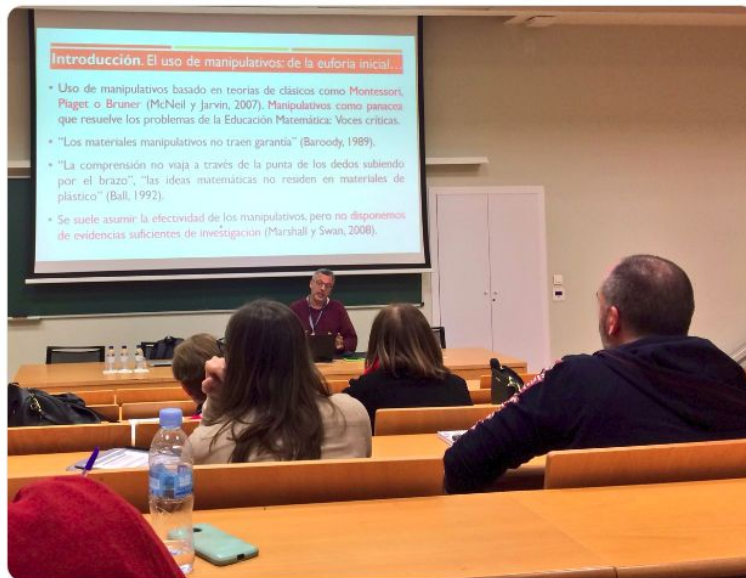
@etem2019

Segueix



[@carlosyedma](#): nos aclaramos con los materiales manipulativos en matemáticas? Resultados de una investigación online [#etem19](#) [#etem2019](#)

Tradueix el tuit



12:59 - 8 d'abr. de 2019

2 retuits 9 agradaments



## Improving Mathematics in Key Stages Two and Three: Evidence Review

March 2018

Jeremy Hodgen (UCL Institute of Education)  
Colin Foster (University of Leicester)  
Rachel Marks (University of Brighton)  
Margaret Brown (King's College London)

Revisió d'evidències  
2018  
Regne Unit  
Key Stages 2-3  
7-14 anys

## Concrete manipulatives and other representations (Section 7.3)

*What are the effects of using concrete manipulatives and other representations to teach mathematics?*

Concrete manipulatives can be a powerful way of enabling learners to engage with mathematical ideas, provided that teachers ensure that learners understand the links between the manipulatives and the mathematical ideas they represent. Whilst learners need extended periods of time to develop their understanding by using manipulatives, using manipulatives for too long can hinder learners' mathematical development. Teachers need to help learners through discussion and explicit teaching to develop more abstract, diagrammatic representations. Number lines are a particularly valuable representational tool for teaching number, calculation and multiplicative reasoning across the age range. Whilst in general the use of multiple representations appears to have a positive impact on attainment, the evidence base concerning specific approaches to teaching and sequencing representations is limited. Comparison and discussion of different representations can help learners develop conceptual understanding. However, using multiple representations can exert a heavy cognitive load, which may hinder learning. More research is needed to inform teachers' choices about which, and how many, representations to use and when.

*Strength of evidence (Manipulatives)* **HIGH**

*Strength of evidence (Representations): MEDIUM*

## Conclusions a partir de 5 metaanàlisis

L'ús dels materials manipulatius és

**molt efectiu**

quan els mestres s'asseguren que els alumnes

**comprenen les relacions**

entre els materials i les idees que representen

# Conclusions a partir de 5 metaanàlisis

Se necessita un

**ús extensiu**

en el temps, encara que

**si és massa perllongat**

pot obstaculitzar el desenvolupament de

l'aprenentatge matemàtic

## Conclusions a partir de 5 metaanàlisis

Els mestres han d'ajudar als estudiants a

través de la

**discussió i ensenyament explícit**

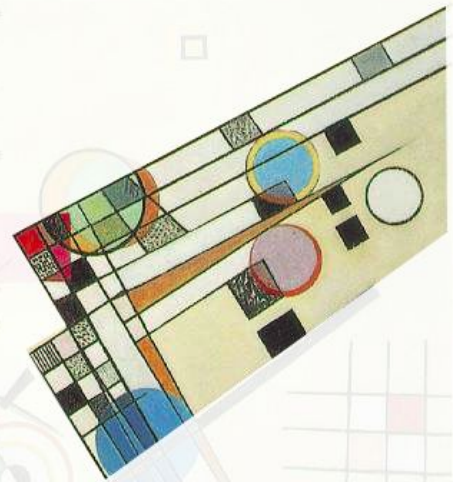
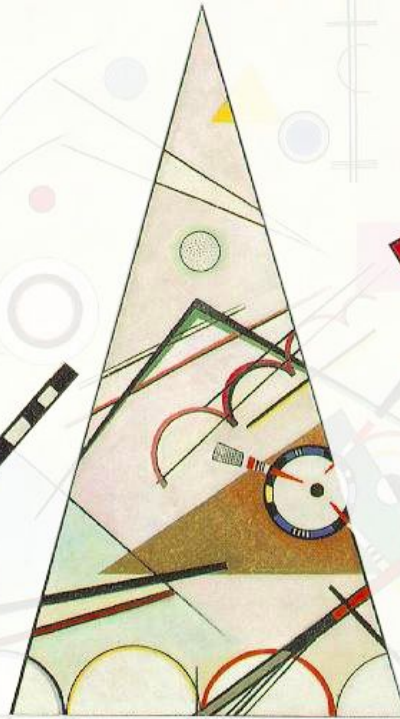
per desenvolupar representacions més

abstractes i esquemàtiques

## Implicacions a l'aula

- Temps extensiu amb materials, passant al llenguatge simbòlic a temps
- Saber connectar els materials amb els conceptes que es treballen
- Afavorir la comunicació i la discussió a partir de l'experiència manipulativa

# Conclusions



# Conclusions

- Els materials manipulatius constitueixen una eina molt poderosa per aprendre matemàtiques
- Quasi tot contingut matemàtic de l'Educació Infantil, Primària i Secundària es pot treballar a partir de materials manipulatius

# Conclusions

- Els estudis han trobat evidència alta en favor del seu ús, amb matisos
- Els materials afavoreixen el clima de resolució de problemes, on els processos s'activen: raonar, representar, connectar i comunicar

# Conclusions

- S'han de tenir en compte:
  - l'objectiu d'aprenentatge que se cerca
  - les limitacions del material
  - les propostes posteriors de representació i simbolització

# Conclusions

- S'han de tenir en compte:
  - l'objectiu d'aprenentatge que se cerca
  - les limitacions del material
  - les propostes posteriors de representació i simbolització



## Pere Puig Adam (1958)

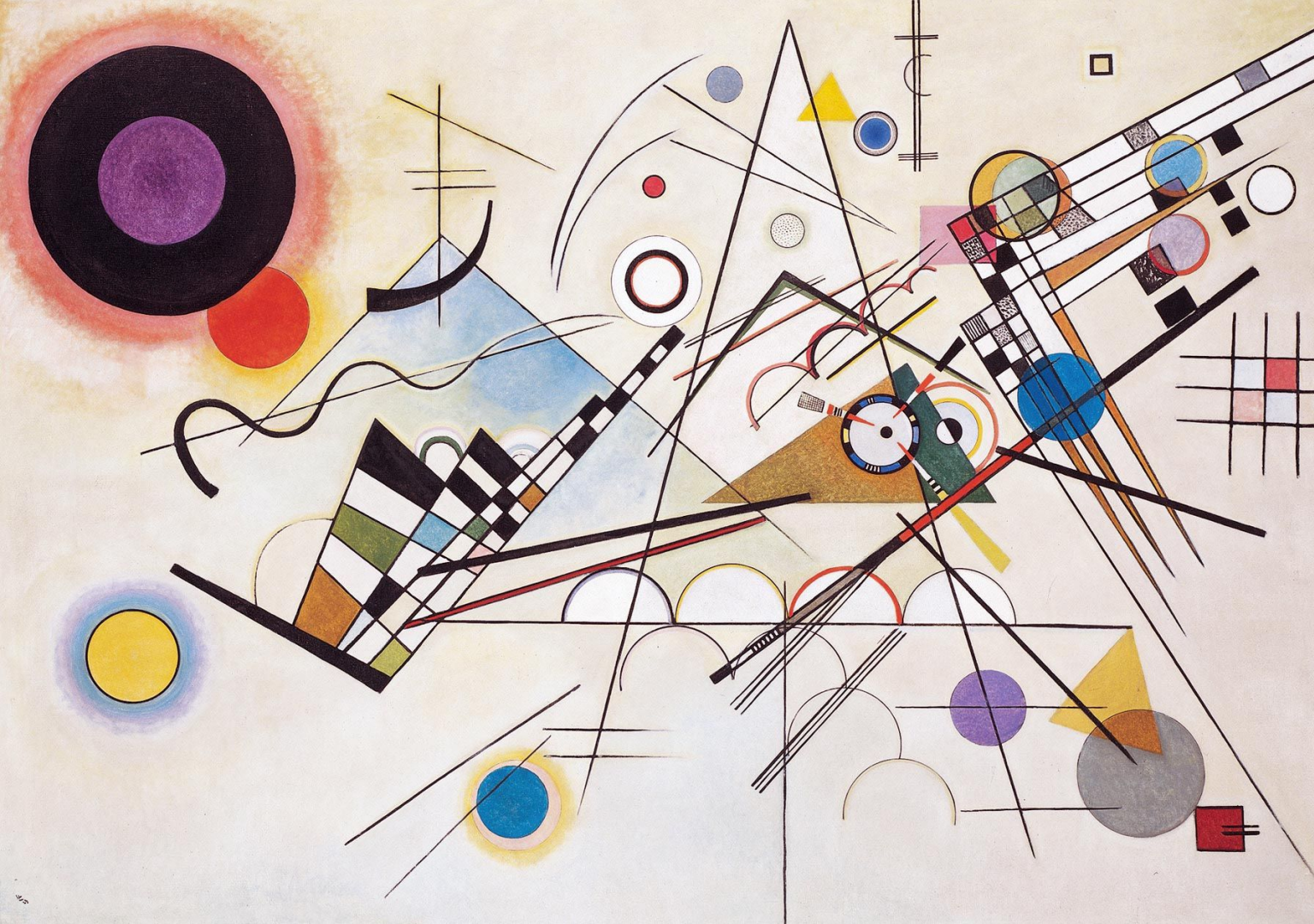


*Per a l'educador matemàtic, que no perd la perspectiva dels processos inicials d'abstracció, aquest material és molt més: representa quelcom substancial amb la seva funció educativa. Aquest material, estructurat en forma de models, té no només la funció de traduir ocasionalment idees matemàtiques, sinó també d'originar-les, suggerir-les. Hem d'estudiar la manera pedagògicament més encertada d'aconseguir-ho i també els materials més dúctils per a la seva realització.*

# Per acabar...

<https://www.menti.com/ki3ysn9m7m>

[www.menti.com](https://www.menti.com) codi: 4367779



GRÀCIES!

Vassili Kandinski  
*Creació VIII (1923)*