

ACTIVITATS RIQUES I COMPETÈNCIES MATEMÀTIQUES A L' AULA DE SECUNDÀRIA (IV): **Resolucio de problemes**

Formadors/es: **Jordi Deulofeu**
jordi.deulofeu@uab.cat
@DeulofeuJordi
Abraham de la Fuente
abrahamfp@gmail.com
@srdelafu

Sessió 4: 25/06/2020

DIMENSIONS DE LA COMPETÈNCIA MATEMÀTICA

- Un dels principals objectius del curs és:
 - Proposar activitats riques i analitzar-les des del punt de vista de les dimensions i de les competències que poden contribuir a desenvolupar.
- Per què hem posat la Resolució de Problemes a la darrera sessió, quan en el llistat de les dimensions del currículum és la primera?

RESOLUCIÓ DE PROBLEMES



It is better to solve one problem
in five different ways than to
solve five problems in one way.

George Polya

Guió de la sessió: Resolució de problemes

1. Introducció a la dimensió de Resolució de problemes. La resolució de problemes com a objecte d'aprenentatge i com a eina per desenvolupar competències
2. Què entenem per problema. Anàlisi de la tasca. Els vostres exemples
3. Discussió de tres problemes:
 - 3.1. Un problema de PISA. La representació del problema. Per quin curs és?
 - 3.2. El problema de l'ós. Nombre de solucions?
 - 3.3 El problema dels consecutius. Experimentar, conjecturar i demostrar
4. Aprendre a resoldre problemes: sobre la gestió de l'activitat a l'aula
 - 4.1. El context de joc. Experimentar, aplicar heurístiques, generalitzar
5. Acabem el curs amb un nou problema i una petita síntesi final

Competències del currículum de secundària relacionades amb la Resolució de Problemes:

Competència 1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats. (**Acció clau: Traduir**).

Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes. (**Acció clau: Utilitzar**)

Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses. (**Acció clau: Experimentar**)

Competència 4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes (**Acció clau: Qüestionar-se**).

1. LA DIMENSIÓ DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Plantejar i resoldre problemes, analitzar diferents resolucions, valorar les pròpies resolucions i les d'altres, fer-se noves preguntes i plantejar problemes, ha de ser una activitat central en el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques a tots els nivells.

1. LA DIMENSIÓ DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Plantejar i resoldre problemes, analitzar diferents resolucions, valorar les pròpies resolucions i les d'altres, fer-se noves preguntes i plantejar problemes, ha de ser una activitat central en el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques a tots els nivells.



- Per què la resolució de problemes hauria de ser el cor de l'ensenyament de les matemàtiques?
- Quins problemes esdevenen activitats d'aprenentatge competencialment riques?
- Com es poden plantejar i gestionar a l'aula les activitats centrades en la resolució de problemes?
- Quines actituds cal afavorir en relació amb aquestes activitats?
- Com avaluar les produccions dels alumnes quan resolen problemes, de manera que aquesta avaluació contribueixi a millorar el seu aprenentatge?

Sobre la resolució de problemes i les matemàtiques

El 1980, Paul Halmos va publicar un article: “The Heart of Mathematics”, *American Mathematical Monthly*, 87(7), en què destaca el paper dels problemes en el desenvolupament de les Matemàtiques.

A l'inici de l'article diu:

“En què consisteix realment la matemàtica? En axiomes (com el postulat de les paral·leles)? En teoremes (com el teorema fonamental de l'àlgebra?) En conceptes? En definicions? En teories? En fórmules? En mètodes?

La matemàtica segurament no existiria sense tots aquests ingredients, tots són essencials. Però cap d'ells és el cor de la disciplina ja que la principal raó d'existir d'un matemàtic és resoldre problemes i per tant, en el que **realment** consisteix la matemàtica és en [plantejar] problemes i [trobar les seves] solucions” (p. 519).

El cor de l'ensenyament de les matemàtiques:

Plantejar i resoldre problemes, per a què?

- Per ajudar als nostres alumnes a fer-se autònoms, a prendre decisions, a comprendre les informacions que rep, a fer-se preguntes, a ser crítics amb allò que se'ls presenta i amb allò que fan.
- Per col·laborar al desenvolupament del conjunt de dimensions que constitueixen la competència matemàtica (resolució de problemes, raonament, connexions i comunicació) així com contribuir a la construcció de les matemàtiques pròpies.
- Per mostrar el que realment són les matemàtiques i fer que s'interessin per elles, ja que són una part important del coneixement generat per la humanitat, interessant tant per ell mateix com per les seves aplicacions.
- Per aconseguir que trobin sentit al fet de plantejar-se problemes i al repte que suposa la seva resolució.

Sobre els vostres exemples i justificacions

Cal recordar el que sabem
dels triangles i pensar de
manera imaginativa tot
visualitzant relacions.

Sobre els vostres exemples i justificacions

Es tracta d'una situació contextualitzada relacionada amb continguts del currículum. L'alumnat ha d'analitzar la situació, matematitzar-la i extreure'n conclusions que ha d'argumentar posteriorment.

Sobre els vostres exemples i justificacions

No ens dóna dades tancades i per tant cada resolutor agafarà el seu camí per respondre'l, camí que en principi es desconeix. Es necessita utilitzar conceptes i eines matemàtiques. La resposta no és única.

Sobre els vostres exemples i justificacions

Un bon problema ha de despertar l'interès per resoldre'l i a la solució s'ha d'arribar mitjançant alguna estratègia de raonament que sigui assequible (adequat per a l'edat o nivell) però que comporti relacionar alguns conceptes claus que ja hagin vist. En aquest cas cal recórrer al concepte de proporcionalitat i el concepte de funció i la seva anàlisi gràfica.

Sobre els vostres exemples i justificacions

UN BON PROBLEMA ÉS AQUELL QUE... permet diferents graus de resolució, que fomenta la discussió, que es pot anar replantejant, que parteix d'una situació global que es pot anar particularitzant, que unex diferents conceptes a l'hora, que genera experimentació, que obliga a raonar i donar arguments, que permet fer conjetures, que es pot representar de diferents maneres i que permet desenvolupar les competències matemàtiques.

Sobre els vostres exemples i justificacions

Cal recordar el que sabem dels triangles i pensar de manera imaginativa tot visualitzant relacions.	Es tracta d'una situació contextualitzada relacionada amb continguts del currículum. L'alumnat ha d'analitzar la situació, matematitzar-la i extreure'n conclusions que ha d'argumentar posteriorment.	No ens dóna dades tancades i per tant cada resolutor agafarà el seu camí per respondre'l, camí que en principi es desconeix . Es necessita utilitzar conceptes i eines matemàtiques. La resposta no és única .
Un bon problema ha de despertar l'interès per resoldre'l i a la solució s'ha d'arribar mitjançant alguna estratègia de raonament que sigui assequible (adequat per a l'edat o nivell) però que comporti relacionar alguns conceptes claus que ja hagin vist. En aquest cas cal recórrer al concepte de proporcionalitat i el concepte de funció i la seva anàlisi gràfica.	UN BON PROBLEMA ÉS AQUELL QUE... permet diferents graus de resolució , que fomenta la discussió, que es pot anar replantejant, que parteix d'una situació global que es pot anar particularitzant, que unex diferents conceptes a l'hora, que genera experimentació , que obliga a raonar i donar arguments , que permet fer conjetures, que es pot representar de diferents maneres i que permet desenvolupar les competències matemàtiques.	

Sobre els vostres exemples i justificacions

HEURÍSTIQUES	CONTEXT CONTINGUTS	OBERT SUBJECTIU
TERRA BAIX I SOSTRE ALT CONNEXIONS ENTRE CONCEPTES	MATEMATITZAR INCLUSIÓ EXPERIMENTACIÓ ARGUMENTAR - DEMOSTRAR	

2. Què entenem per problema?

La idea de problema que tenim i proposem és àmplia (a vegades tant, que es pot arribar a confondre amb una activitat matemàtica competencialment rica).

Tanmateix, té varies característiques que defineixen què és un problema:

- És un enunciat (no necessàriament verbal) en el qual es proposa: construir alguna cosa, respondre una pregunta, realitzar una conjectura i/o demostrar (una propietat, una conjectura, la validesa d'un raonament,...).
- L'objectiu del que es demana -pregunta- es pot assolir emprant conceptes i eines matemàtiques
- El resolutor, entén i vol resoldre allò que se li proposa / demana, però al mateix temps no té, d'entrada, un camí a seguir per intentar resoldre-ho.

Un aspecte rellevant és que la definició de problema és subjectiva ja que depèn del resolutor: allò que és un problema per algú, pot no ser-ho per un altre.

Característiques d'un bon problema

Accessible: Enunciat comprensible, ofereix oportunitats d'èxit inicial a la majoria, possibilita nivells d'abordatge i de resolució diferents

Significativa: Incita a la curiositat (pel context o la formulació), manté interès pel repte durant el treball, la resolució no és evident d'entrada

Varietat d'enfocaments: És una tasca amb una certa obertura (no tancada en tots els sentits), admet representacions, camins d'abordatge i resolucions diverses.

Matemàticament rellevant: Implica continguts clau, porta a construir continguts, promou l'aplicació de continguts a contextos nous, implica l'ús de raonaments matemàtics, i/o promou l'ús de connexions (internes i/o externes)

Activa el pensament matemàtic: potencia el cicle: Experimentació - estudi de casos particulars - conjectura - verificació - generalització. Potencia la creativitat matemàtica (flexibilitat, intuïció, originalitat, organització,...). Promou la planificació i la presa de decisions amb sentit crític.

Fomenta col·laboració, reflexió i discussió: provoca la conversa matemàtica i la confrontació d'idees entre iguals, promou explicació i justificació del procés, l'anàlisi i la recerca d'altres resolucions.

Extensible: Ja sigui de la propia activitat (possibilitat de formular noves preguntes, d'estendre la tasca, de generalitzar, millorar i optimitzar el procés), com de la creació d'altres activitats similars a partir d'aquesta

3. Analitzem problemes

Us proposem analitzar i resoldre tres problemes. Els dos primers (que són més breus) els treballarem ara, i el 3er forma part de les tasques prèvies que us hem demanat i també el comentarem. El que ens interessa és analitzar què es treballa (competències i continguts) quan els proposem a l'aula.

- 3.1. Un problema de PISA. La representació del problema. Expressió de la solució
- 3.2. El problema de l'ós. Informació. Nombre de solucions
- 3.3 El problema dels consecutius. Experimentar, fer-se preguntes, conjecturar i demostrar

3.1. Analitzem problemes: Un problema de PISA

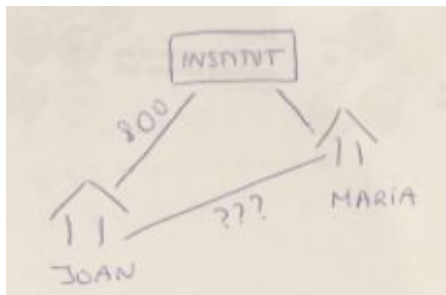
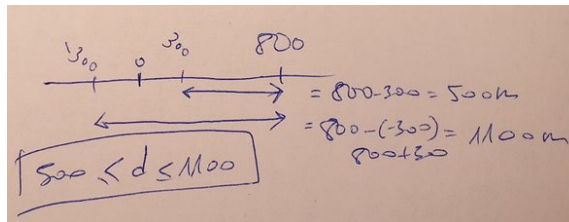
En Joan viu a 800 metres de l'institut i la Maria viu a 300 metres del mateix institut. Què podem dir de la mesura de la distància entre la casa d'en Joan i la casa de la Maria?

Resoleu el problema.

3.1. Analitzem el problema: representacions (I)

Quina de les 5 opcions següents s'acosta més al que has fet:

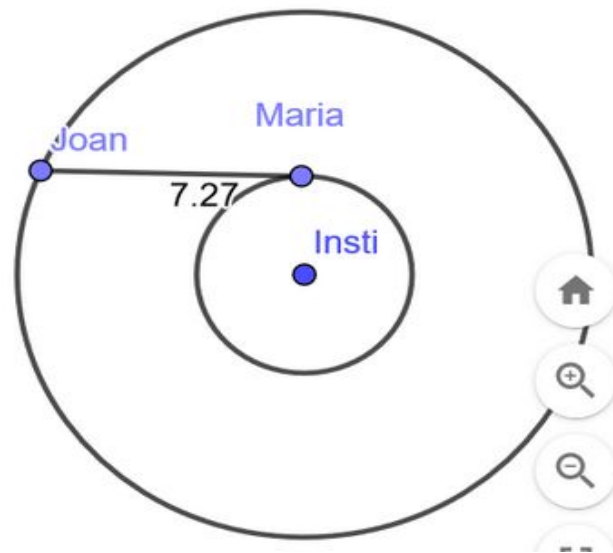
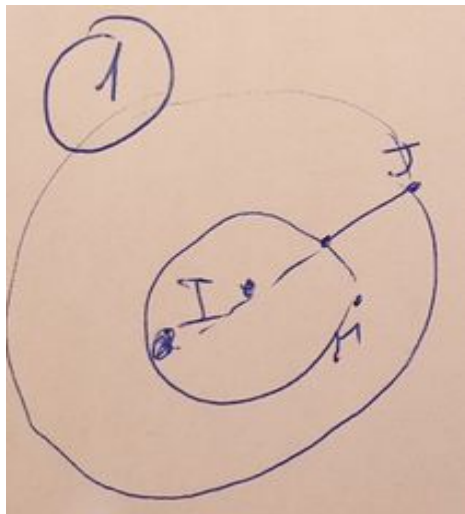
1. No he fet cap representació
2. He fet una representació lineal
3. He representat algun triangle



3.1. Analitzem el problema: representacions (II)

Quina de les 5 opcions següents s'acosta més al que has fet (II):

4. He fet una representació emprant cercles



5. He fet una representació diferent

3.1. Analitzem problemes: Un problema de PISA

Alguns aspectes clau de les resolucions del problema:

1. Comprensió de l'enunciat: autorestriccions degudes a les creences sobre què és un problema de matemàtiques (solució única, que pot ser 500 o 1100 metres) o sobre la representació del problema: sobre una recta que porta a trobar dues solucions: 500m i 1100m, en lloc d'una representació en el pla que porta a moltes solucions, però al mateix temps a cap valor concret.
2. Importància de les representacions: Una representació plana útil per arribar a una resolució completa del problema necessita connectar la relació dades - pregunta amb la idea de circumferència com a lloc geomètric.
3. La distància entre les dues cases es pot interpretar en termes de la desigualtat triangular (d'aquí el màxim com a suma i el mínim com a resta)

3.1. Analitzem problemes: Un problema de PISA

4. Dificultat per expressar la solució del problema com un interval (qualsevol valor de 500 a 1100 metres).
5. Determinació d'altres resultats concrets possibles: per exemple, si l'angle és de 90° podem aplicar Pitàgores i conèixer la mesura de la distància.
6. L'extensió de la idea anterior porta a determinar la distància conegut l'angle (trigonometria: aplicació del teorema del cosinus)
7. Per a quin nivell és el problema? Des de 5è de primària fins a batxillerat: tot depèn del que es vulgui treballar.

3.2. Analitzem problemes: El problema de l'ós

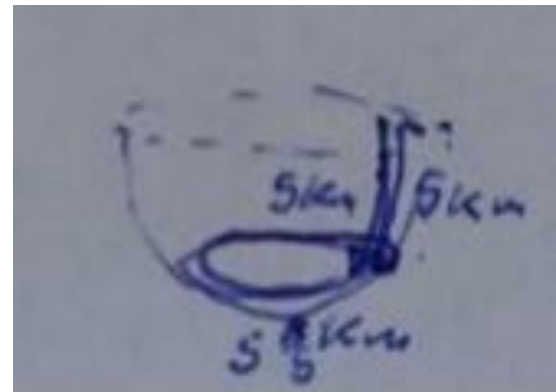
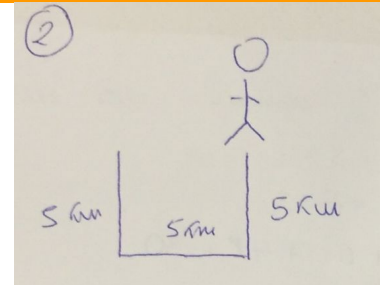
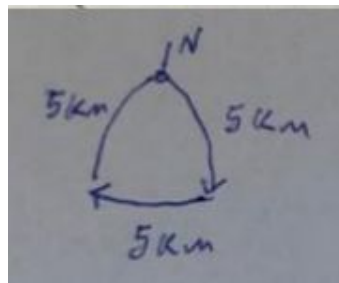
Una persona viatja 5 km cap al sud, després 5 km cap a l'oest i després 5 km cap al nord i resulta que, després de fer aquest recorregut, es troba de tornada en el lloc on havia començat. Durant el viatge, veu un ós. A quin lloc es troba?

Resoleu el problema

3.2. Analitzem problemes: El problema de l'os

Quantes solucions heu trobat?

- Cap
- Una (pol Nord)
- Dues (pol Nord i lloc proper al pol Sud)
- Infinites (una al pol Nord, una infinitud prop del pol Sud)



3.2. Analitzem problemes: El problema de l'os

Sobre la resolució del problema

- Enunciat: Què té d'especial? (informació “estranya”: l'os)
- Representació de la situació: una representació plana fa pensar que no és possible, però podem representar-ho com un triangle sobre l'esfera - llavors, què passa?
- Primera solució possible: situar l'inici-final just al pol Nord
- Quin sentit té la informació de l'os? És irrellevant?
- Potser hi ha més solucions en algun altre lloc de la Terra
- Quantes solucions té el problema? Podem dir que en té una clara i una infinitud amagades.

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

Només hi ha dos tipus de problemes, els de construir (o conjecturar) i els de validar (o demostrar). Els millors son aquells en què primer has de trobar i després demostrar

George Polya

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

Alguns nombres naturals es poden expressar com a suma de dos o més nombres naturals **consecutius**.

Per exemple:

$$3 + 4 = 7$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

Caracteritza els nombres naturals que es poden escriure com a suma de dos o més nombres consecutius.

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

$$1 = \text{No}$$

$$2 = \text{No}$$

$$3 = 1 + 2$$

$$\textcircled{4} =$$

$$5 = 2 + 3$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$7 = 3 + 4$$

$$\textcircled{8} =$$

$$9 = 4 + 5$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$11 = 5 + 6$$

$$12 = 3 + 4 + 5$$

$$13 = 6 + 7$$

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5$$

$$15 = 4 + 5 + 6 + \textcircled{7 + 8}$$

$$\textcircled{16} =$$

$$17 = 8 + 9$$

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

$$1 = \text{No}$$

$$2 = \text{No}$$

$$3 = 1 + 2$$

$$\textcircled{4} =$$

$$5 = 2 + 3$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$7 = 3 + 4$$

$$\textcircled{8} =$$

$$9 = 4 + 5$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$11 = 5 + 6$$

$$12 = 3 + 4 + 5$$

$$13 = 6 + 7$$

$$14 = 2 + 3 + 4 + 5$$

$$15 = 4 + 5 + 6 + \textcircled{7 + 8}$$

$$\textcircled{16} =$$

$$17 = 8 + 9$$

$$3 + 4 = 7$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

Cas A: Sumem 2

$$\begin{array}{lcl} 1+2=3 & \downarrow +4 & \\ 3+4=7 & & \\ 5+6=11 & \downarrow +4 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{la distància} \\ \text{és } 2^2 \end{array}$$

Sumem 3

$$\begin{array}{lcl} 1+2+3=6 & \downarrow +9 & \\ 4+5+6=15 & & \\ 7+8+9=24 & \downarrow +9 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{la distància} \\ \text{és } 3^2 \end{array}$$

Sumem 4

$$\begin{array}{lcl} 1+2+3+4=10 & \downarrow +16 & \\ 5+6+7+8=26 & & \\ 9+10+11+12=42 & \downarrow +16 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{la distància} \\ \text{és } 4^2 \end{array}$$

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

- Suma de dos nombres consecutius : $n+n+1=2n+1$; per tant tots els nombres senars es poden escriure com a suma de dos nombres consecutius. Exemples: $3=1+2$; $5=2+3$; $71=35+36$.
- Suma de tres nombres consecutius : $n+n+1+n+2=3n+3=3\cdot(n+1)$; per tant, tots els nombres múltiples de 3 es poden expressar com a suma de tres nombres consecutius. Ex: $6=1+2+3$; $18=5+6+7$.

⋮

- Suma de $K+1$ nombres consecutius :

$$\begin{aligned} & n+n+1+n+2+n+3+\dots+n+K = \\ & = n\cdot(K+1) + \underbrace{1+2+3+\dots+K} = \\ & = n\cdot(K+1) + \frac{K\cdot(1+K)}{2} = \\ & = \boxed{(K+1) \cdot \left(n + \frac{K}{2}\right)}^2 \rightarrow \text{Nombres que es poden expressar com a suma de} \\ & \quad K+1 \text{ nombres consecutius} \end{aligned}$$

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

- 2 nombres $a + a + 1 = 2a + 1 \Rightarrow$ imparells a partir (3)
de 3.
- 3 nombres $a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3 \Rightarrow$ múltiples de 3 (6)
- 4 nombres $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = 4a + 6 \Rightarrow$ múltiples de 4 (10)
més 2
- 5 nombres $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 = 5a + 10 \Rightarrow$ múltiples de 5 (15)
- 6 nombres $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + a + 5 = 6a + 15 \Rightarrow$ múltiples de 6 + 3 (21)
- 7 $7a + 21 \Rightarrow 7 (28)$
- 8 $8a + 28 \Rightarrow 8 (36) \quad 8 + 4$
- 9 $9a + 36 \Rightarrow 9 (45)$
- 10 $10a + 45 \Rightarrow 10 (55) \quad 10 + 5$
- 11 $11a + 55 \Rightarrow 11 (66)$
- 12 $12a + 66 \Rightarrow 12 (78) \quad 12 + 6$
- n nombres si n senar $\Rightarrow$ múltiples de n
- n nombres si n parell $\Rightarrow$ múltiples de $n + \frac{n(n-1)}{2}$

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

2 nombres	$a + a + 1 = 2a + 1 \Rightarrow$ imparells a partir (3) és 3.
3 nombres	$a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3 \Rightarrow$ múltiples de 3 (6)
4 nombres	$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = 4a + 6 \Rightarrow$ múltiples de 4 (10) més 2
5 nombres	$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 = 5a + 10 \Rightarrow$ múltiples de 5 (15)
6 nombres	$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 + a + 5 = 6a + 15 \Rightarrow$ múltiples de 6 + 3 (21)
7	$7a + 21 \Rightarrow 7$ (28)
8	$8a + 28 \Rightarrow 8$ (36) $8 + 4$
9	$9a + 36 \Rightarrow 9$ (45)
10	$10a + 45 \Rightarrow 10$ (55) $10 + 5$
11	$11a + 55 \Rightarrow 11$ (66)
12	$12a + 66 \Rightarrow 12$ (78) $12 + 6$

n nombres si n senar $\Rightarrow$ múltiples
n nombres si n parell $\Rightarrow$ múltiples
En mirar quins nombres de 1 al 100 es poden escriure com a
suma de n nombres consecutius m'he trobat que són tots menys les
potències de 2.

Tots els naturals menys 2^x

3.3. Analitzem problemes: Nombres consecutius

Preguntes que ens hem fet	Tenim resposta? Quina?	L'hem demostrat? Com?
Ho entenc?   	Ho entenc?   	Ho entenc?   
Ho entenc?   	Ho entenc?   	Ho entenc?   

Enunciat (classe de 3r d'ESO): https://docs.google.com/document/d/15a3-KDoMzYN3c78NZ_ibtGfJ5zT-L2zV1d6tsQWUPOc/edit
Quines preguntes ens hem fet? <https://docs.google.com/document/d/1hoae5WJRK0bm5fbLOKwGWUhSSQVmwN1rMvD2VYGJbJs/edit>

Sobre l'ensenyament de la resolució de problemes

Dos aspectes complementaris

- **La resolució de problemes com a procés o dimensió competencial:**
 - Comprendre i representar el problema
 - Dissenyar plans de resolució (conèixer, triar i aplicar heurístiques)
 - Aplicar un pla (mètodes de resolució, conceptes, tècniques)
 - Visió retrospectiva (cap enrere -validació- i cap endavant -nous problemes-)
- **La resolució de problemes com a metodologia per ensenyar/aprendre matemàtiques:**
 - Crear un ambient de resolució de problemes a l'aula (interrogació)
 - Mostrar la necessitat d'introduir nous conceptes / tècniques, proporcionar contextos per a construir-los i nous contextos per aplicar-los
 - Adonar-se que resolent un problema es poden treballar totes les dimensions
 - Tenir en compte les creences dels alumnes sobre les matemàtiques / els problemes / els mètodes / les solucions

4. Aprendre a resoldre problemes: sobre la gestió de l'activitat a l'aula

Dissenyar una bona activitat a partir d'un problema és una tasca important i necessària, però gestionar aquesta activitat a l'aula, per tal que proporcioni oportunitats d'aprenentatge reals, encara ho és més.

4. La gestió de l'activitat a l'aula: La presa de decisions

Quan ensenyem matemàtiques, cal prendre moltes decisions, sovint per trobar un equilibri entre principis en conflicte:

- Matemàtiques – contextos – interessos
- Homogeneïtat – heterogeneïtat / diversitat
- Promoure mètodes: informals – formals
- Llenguatges: oral – escrit / verbal - simbòlic
- Tècniques i rutines – processos d'ordre superior
- Intuïció i experimentació / argumentació i prova
- Formes de resolució – resultats
- Reptes complexos – assegurar èxits a tothom

4. La gestió de la contingència a l'aula

En un ambient de resolució de problemes a classe, amb interacció elevada, tant entre professor i alumnes com entre iguals, es produeixen contingències.

Les principals tenen a veure amb intervencions dels alumnes de diferents tipus:

- Preguntes no esperades
- Errors no esperats dels alumnes
- Propostes de resolució (vàlides o no) no esperades
- Comentaris d'un alumne a una realització d'un altre

Cal aprendre a actuar i prendre decisions davant aquestes contingències

4.1. Resoldre problemes en un context de joc

El context de joc (petits jocs d'estratègia o d'atzar) és un bon context per a plantejar i resoldre problemes.

El treball al voltant d'un joc té molta relació amb resoldre un problema, si el gestionem de manera que els alumnes:

- coneguin el joc (entenguin l'objectiu i les regles),
- juguin (experimentin),
- apliquin heurístiques que portin a plantejar conjectures sobre l'estratègia guanyadora,
- facin raonaments i connexions per validar la conjectura,
- generalitzin, si s'escau.

El context de joc. Experimentació

JOC PER A DOS JUGADORS: Tenim 14 fitxes sobre la taula. Al seu torn cada jugador retira 1 o 2 fitxes. El jugador que retira la darrera fitxa és el guanyador del joc. Com s'ha de fer per guanyar?

Si ja coneixeu el joc, generalitzeu-lo: tenim un cert nombre de fitxes (m) i al seu torn cada jugador en pot retirar de 1 a n ($n < m$). Com s'ha de fer per guanyar.

Fem varies partides: Tenim idees? Les practiquem (Experimentació)

Heurístiques, conjectures, validacions

En el 14 guanya. Diferents heurístiques: Reduir el nombre de fitxes. Anar enrera o començar pel final. Canviar l'objectiu del joc.

Idea general: A partir de les heurístiques emprades, realitzar una conjectura i experimentar la possible validesa.
Ser capaç de desestimar heurístiques no productives (paritat)

Altres jocs. generalitzacions: Què passa quan canviem el nombre de fitxes inicials? I si en lloc d'agafar-ne una o dues, se'n poden agafar una, dues, tres o quatre?

Algunes heurístiques per a resoldre problemes

- Visualitzar relacions (amb dibuixos, i/o esquemes)
- Organitzar les dades (amb taules) i/o elaborar diagrames (arbre, altres)
- Triar un llenguatge adequat i/o una codificació
- Realitzar proves, experimentar amb les dades i condicions
- Emprar assaig i error
- Realitzar un treball sistemàtic
- Cercar pautes o regularitats
- Estudiar casos particulars / Particularització: simplificació dades
- Generalitzar / Estudiar un problema més general
- Dividir el problema en parts / subdivisió dels objectius
- Procedir per analogia / Relacionar el problema amb un anàleg conegut
- Introduir elements auxiliars / graons intermedis
- Començar pel final / suposar el problema resolt
- Emprar idees matemàtiques com la paritat, la simetria, principi del colomar,...

How to Solve it. Polya (1945)

Fem connexions? Un altre petit joc d'estratègia

Joc per a dos jugadors. En el tauler posem una fitxa a la casella inicial. Al seu torn cada jugador mou la fitxa a una casella adjacent, amunt, avall o en la mateixa línia, però sempre endavant (cap a la dreta). El jugador que posa la fitxa al final (casella A -arribada-) guanya la partida.

Com s'ha de fer per guanyar?

Quina relació hi ha entre aquest joc i l'anterior?



Un joc més complex: EL JOC DE WITHOFF

El joc de Withoff. Tenim dues piles de fitxes amb 16 i 9 fitxes. Cadascun dels dos jugadors, al seu torn, pot agafar les fitxes que vulgui d'una de les piles, o el mateix nombre de les dues piles. Qui agafa la darrera guanya.

Experimentar (jugar), per descobrir què cal fer per guanyar.

Analitzar: Estudiar casos particulars. Cercar posicions guanyadores pel 2on jugador (en té poques). Cercar un patró recurrent. Canviar de representació.

Generalitzar: Què passa quan variem les fitxes de les dues piles? Trobar una estratègia recurrent. Una vegada trobada la recurrència, analitzar les seves característiques. A partir d'aquí deduir una estratègia guanyadora

Jocs i més jocs, per divertir-se i crear problemes

Si voleu més jocs, fàcils de fer, a VilaWeb trobareu 23 capítols de la serie “Jocs d’estar per casa” amb moltes propostes:

<https://www.dailymotion.com/video/x7tc3jv>

5. Fonts de situacions generadores de problemes

Tot problema sorgeix d'un determinat context:

- Context quotidià (real i proper a l'alumnat)
- Context real (socialment rellevant, altres ciències)
- Context lúdic (joc, entreteniment, repte)
- Context històric (matemàtiques d'ahir i d'avui)
- Context matemàtic (intern, repte)

Segons el que es pretengui treballar, un context serà millor que un altre. Tanmateix, a vegades són possibles diversos contextos.

5.1. Una darrera situació / problema

Fa pocs dies un titular de *La Vanguardia* deia això:

(En el desconfinament) Cal mantenir una distància mínima entre persones de 1,5 metres, o bé, una superfície de 2,5 metres quadrats per persona.

Suposem que les persones son punts que situem en un pla.

Com podriem analitzar si les dues afirmacions són (o no son) equivalents?

Cal formular el problema de manera més abordable? Com?

Una consideració final

- Els problemes són la font principal per a l'elaboració d'activitats d'aprenentatge de les matemàtiques, i en particular activitats competencialment riques.
- Determinar què és un “bon” problema per a l'aula és difícil, però algunes característiques que hauria de complir són:
 - Que possibiliti experimentar, construir, conjecturar, argumentar, demostrar
 - Que admeti diferents nivells de resolució
 - Que es pugui emmarcar en una situació més àmplia
 - Que possibiliti la discussió i la reelaboració
 - Que es relacioni amb idees clau o grans idees matemàtiques del currículum i també amb les diferents dimensions de la competència matemàtica
- **Moltes d'aquestes característiques depenen del problema però també de la seva formulació**

Moltes gràcies, bon
estiu i molta salut!

Abraham de la Fuente abrahamfp@gmail.com
@srdelaflu

Jordi Deulofeu jordi.deulofeu@uab.cat
@DeulofeuJordi