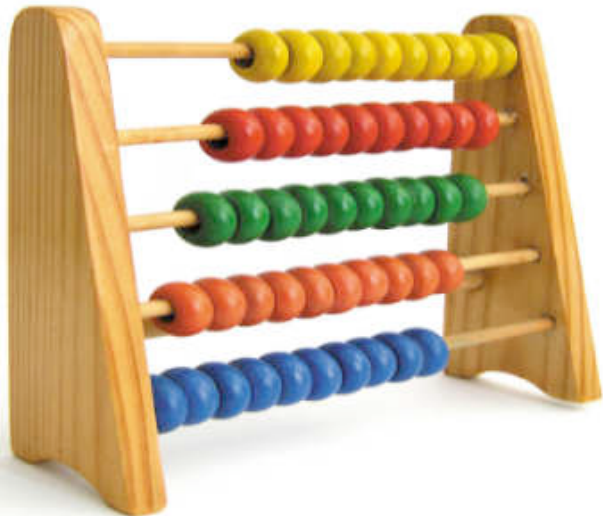


---

# Reflexions sobre el càlcul a Primària (III)



David Barba  
Cecilia Calvo  
OCT-NOV 2011  
CREAMAT

# EN LES TROBADES ANTERIORS

- el treball amb les operacions aritmètiques és independent del treball amb els seus algorismes
- abans de presentar aquests algorismes aspirem a que els alumnes calculin “sense comptar”
- creiem en la importància de treballar amb algorismes a l'escola i en el cas dels algorismes aritmètics, creiem que s'han de construir amb els alumnes en un ambient de resolució de problemes

Aritmètica més enllà dels  
algorismes estàndard:  
Càlcul a Cicle Superior

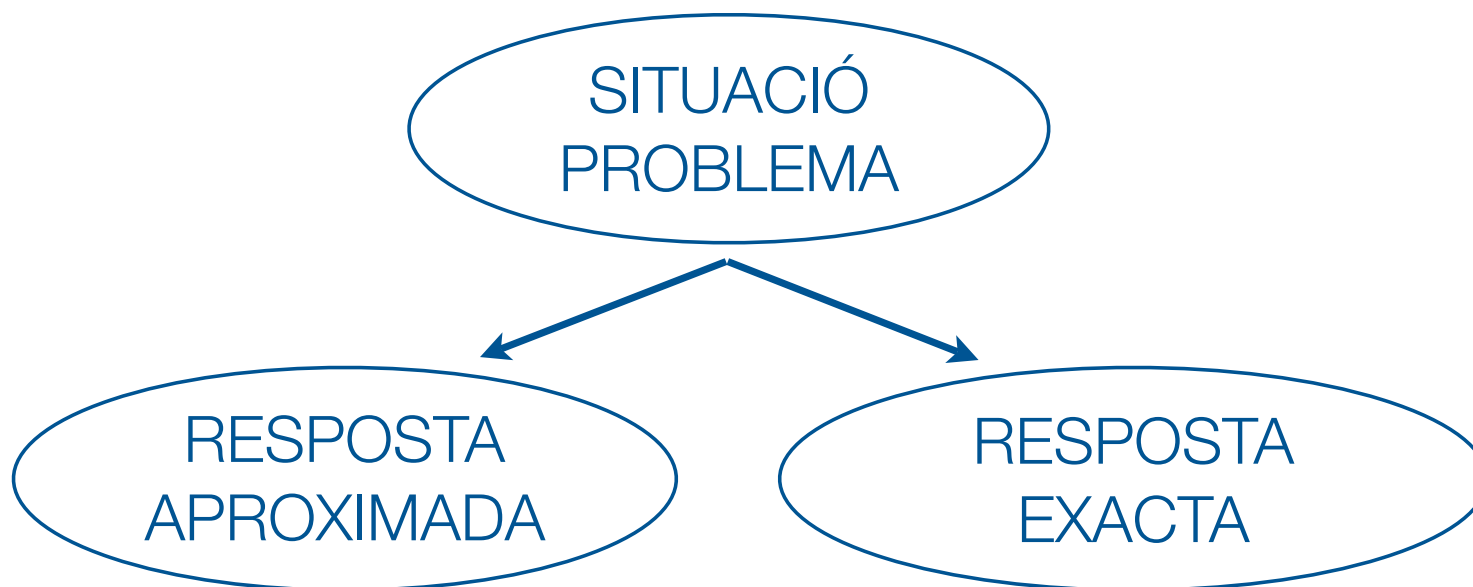
23-11-2011



# programa

- quan esperem que els alumnes facin servir el càlcul mental en lloc de la calculadora? i quan han d'utilitzar els algorismes?
- els temes aritmètics propis d'aquesta etapa: decimals, divisibilitat, percentatges, fraccions
- la resolució de problemes com a ambient quotidià de les classes de matemàtiques
- què els demanaran de tot això a l'ESO?

# capacitat de decidir



CÀLCUL MENTAL

CÀLCUL ESCRIT

CALCULADORA

ORDINADOR

# resposta aproximada



En tindrà prou?  
El resultat és correcte?  
Aproximadament, quant dóna?

# en tindrà prou?

He comprat 5 llibretes a 2   
cadascuna. Quant em costaran?



Qu  parlin ells!



He comprat 5 llibretes a 1,98   
cadascuna. En tindrà prou amb un  
bitllet de 10 ?

# el resultat és correcte?



# operacions, decimals i aproximació

Algorimitzar el que no és un algorisme: còrrer la coma

|                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| $3,048 \times 4,53 =$ | $23,57 \times 0,25 =$ |
| $678,45 : 82 =$       | $4536,94 : 957 =$     |

$$3,048 \times 4,53$$

$$23,57 \times 0,25$$

$$678,45 \div 82$$

$$4536,94 \div 957$$

# aproximadament, quant dóna?

$$3,048 \times 4,53 =$$

$$3\,048 \times 453 = 1\,380\,744$$

$$3, \text{🍏🍏🍏} \times 4, \text{🍏🍏}$$

$$4 \times 5$$

$$20$$

$$3 \times 4$$

$$12$$

13,81

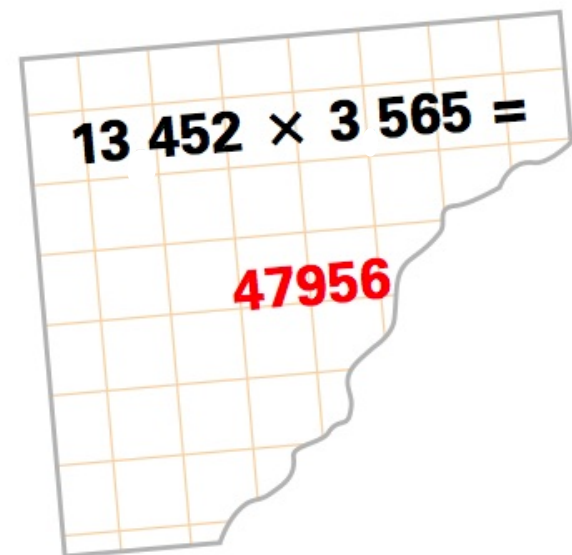
# aproximadament, quant dóna?

**3.** Vull saber quin és el resultat de **134,52 × 3,565**.

Tinc apuntat en un paper el resultat de la multiplicació entre 13 452 i 3 565, però en mirar-lo trobo que el paper s'ha estripat i no veig els nombres finals. On va la coma?

Ho pots saber?

$$134,52 \times 3,565 = 47956... \boxed{\phantom{0000}}$$



aproximadament, quant dóna?

$$23,57 \times 0,25$$

$$678,45 \div 82$$

# context

Cal repartir 365L d'aigua en ampolles d'1,5L. Quantes en necessitaré?

Passo tot a decilitres



Fer la divisió equivalent  $3650 : 15$

Quants litres sobraran?

# context

He de tallar 14,5 m de corda en tres parts iguals.  
Quan mesurarà cada tros?

$$\begin{array}{r|l} 14,5 & 3 \\ \hline 25 & 4,8 \\ 1 & \end{array}$$

$$3 \times 4,8 = 14,4$$

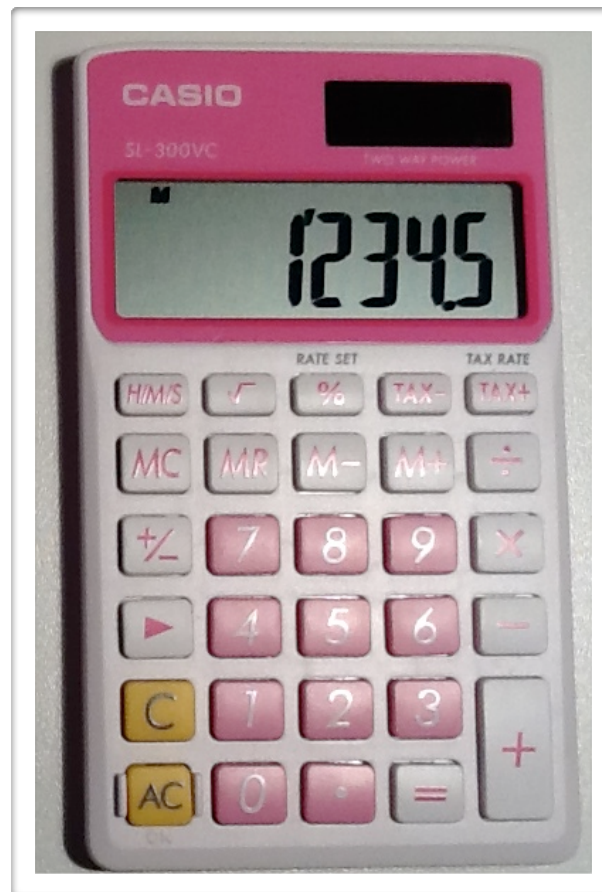
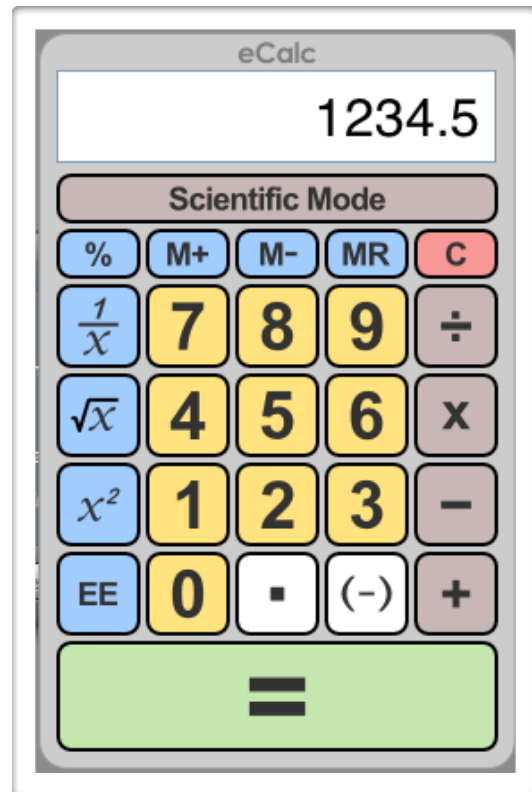
Sobra corda?

# calculadora

Podeu fer totes les operacions amb decimals a mà o amb la calculadora, el que passa és que la tecla del punt està trencada.



# calculadora



# càlcul mental, calculadora i algorismes

- Un patinador completa una volta en 2 minuts i 11 segons anant a velocitat constant. Quant temps tardarà en completar 60 voltes?

CÀLCUL MENTAL

☐

CALCULADORA

☐

ALGORISME

☐

- Una bossa de patates de 2,5 kg costa 1,50€. Quant costa cada kg?
- Si tot els habitants d'un país de 16 milions d'habitants donen 25€ a una institució benèfica. Quant hauran donat en total?

# càlcul mental, calculadora i algorismes

Hem parlat de com treballar els algorismes a classe però:

- atès que els algorismes estàndard no són els adequats pel càlcul mental, què fem a classe per desenvolupar estratègies de càlcul mental?
- quins càlculs específics proposem als alumnes per realitzar amb calculadora? Per exemple, els demanem que calculin el residu d'una divisió?

# sens dubte: calculadora

- problemes amb nombres grans
- petites investigacions
- activitat en les que la calculadora és un instrument didàctic (ex: prioritat d'operacions)
- problemes d'estadística (ex: mitjana d'alçades de la classe)
- situacions tipus "Pitàgores"

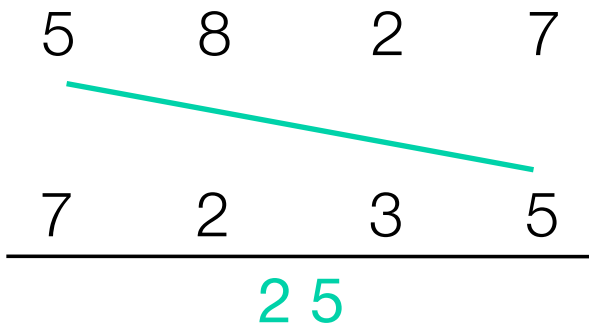
# algorismes històrics

- és bo desmistificar el caràcter estàndard dels algorismes que s'utilitzen avui i aquí: els algorismes varien segons el lloc i segon l'època.
- els algorismes actuals són el resultat de segles de evolució, millora i compressió de l'enregistrament de càlcul però hi ha característiques interessants en els algorismes d'altres èpoques.

# DIAMANT

$$\begin{array}{rcccc} 5 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$$

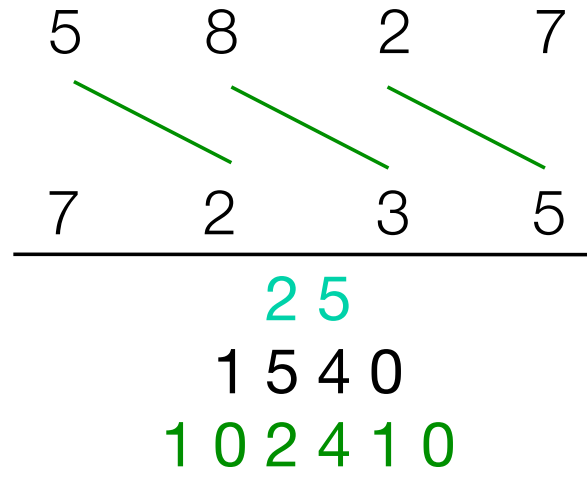
# DIAMANT



# DIAMANT

|       |         |   |   |
|-------|---------|---|---|
| 5     | 8       | 2 | 7 |
| 7     | 2       | 3 | 5 |
| <hr/> |         |   |   |
|       | 2 5     |   |   |
|       | 1 5 4 0 |   |   |

# DIAMANT



# DIAMANT

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 | 7 |
|   |   |   |   |
| 7 | 2 | 3 | 5 |

---

2 5

1 5 4 0

1 0 2 4 1 0

3 5 1 6 0 6 3 5

# DIAMANT

|                                                                                    |   |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 5                                                                                  | 8 | 2 | 7 |
|  |   |   |   |
| 7                                                                                  | 2 | 3 | 5 |
| <hr/>                                                                              |   |   |   |
| 2 5                                                                                |   |   |   |
| 1 5 4 0                                                                            |   |   |   |
| 1 0 2 4 1 0                                                                        |   |   |   |
| 3 5 1 6 0 6 3 5                                                                    |   |   |   |
| 5 6 0 4 2 1                                                                        |   |   |   |

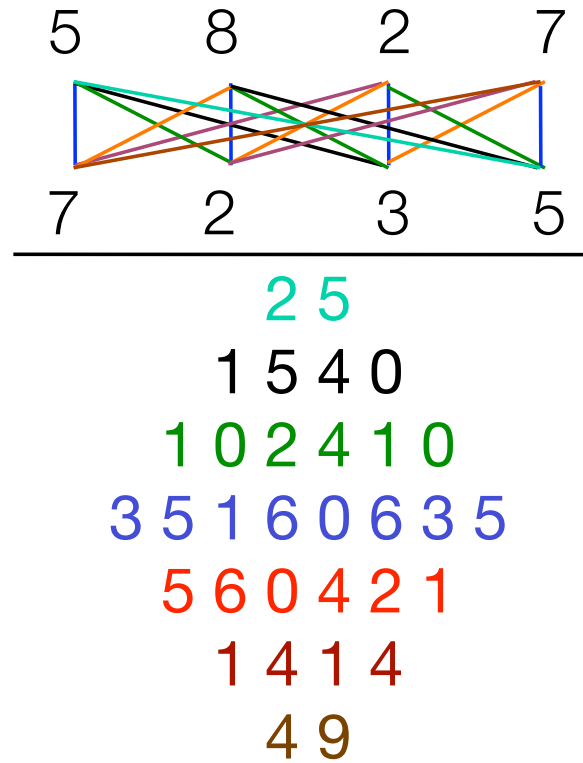
# DIAMANT

|       |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5     | 8 | 2 | 7 |   |   |   |   |   |
| 7     | 2 | 3 | 5 |   |   |   |   |   |
| <hr/> |   |   |   |   |   |   |   |   |
|       | 2 | 5 |   |   |   |   |   |   |
|       | 1 | 5 | 4 | 0 |   |   |   |   |
|       | 1 | 0 | 2 | 4 | 1 | 0 |   |   |
|       | 3 | 5 | 1 | 6 | 0 | 6 | 3 | 5 |
|       | 5 | 6 | 0 | 4 | 2 | 1 |   |   |
|       | 1 | 4 | 1 | 4 |   |   |   |   |

# DIAMANT

|                                                                                    |   |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 5                                                                                  | 8 | 2 | 7 |
|  |   |   |   |
| 7                                                                                  | 2 | 3 | 5 |
| <hr/>                                                                              |   |   |   |
| 2 5                                                                                |   |   |   |
| 1 5 4 0                                                                            |   |   |   |
| 1 0 2 4 1 0                                                                        |   |   |   |
| 3 5 1 6 0 6 3 5                                                                    |   |   |   |
| 5 6 0 4 2 1                                                                        |   |   |   |
| 1 4 1 4                                                                            |   |   |   |
| 4 9                                                                                |   |   |   |

# DIAMANT



# DIAMANT

$$\begin{array}{r} 5 \quad 8 \quad 2 \quad 7 \\ 7 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \\ \hline 25 \\ 1540 \\ 102410 \\ 35160635 \\ 560421 \\ 1414 \\ 49 \\ \hline \end{array}$$

# DIAMANT

$$\begin{array}{r} 5 \quad 8 \quad 2 \quad 7 \\ 7 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \\ \hline 25 \\ 1540 \\ 102410 \\ 35160635 \\ 560421 \\ 1414 \\ 49 \\ \hline 42158345 \end{array}$$

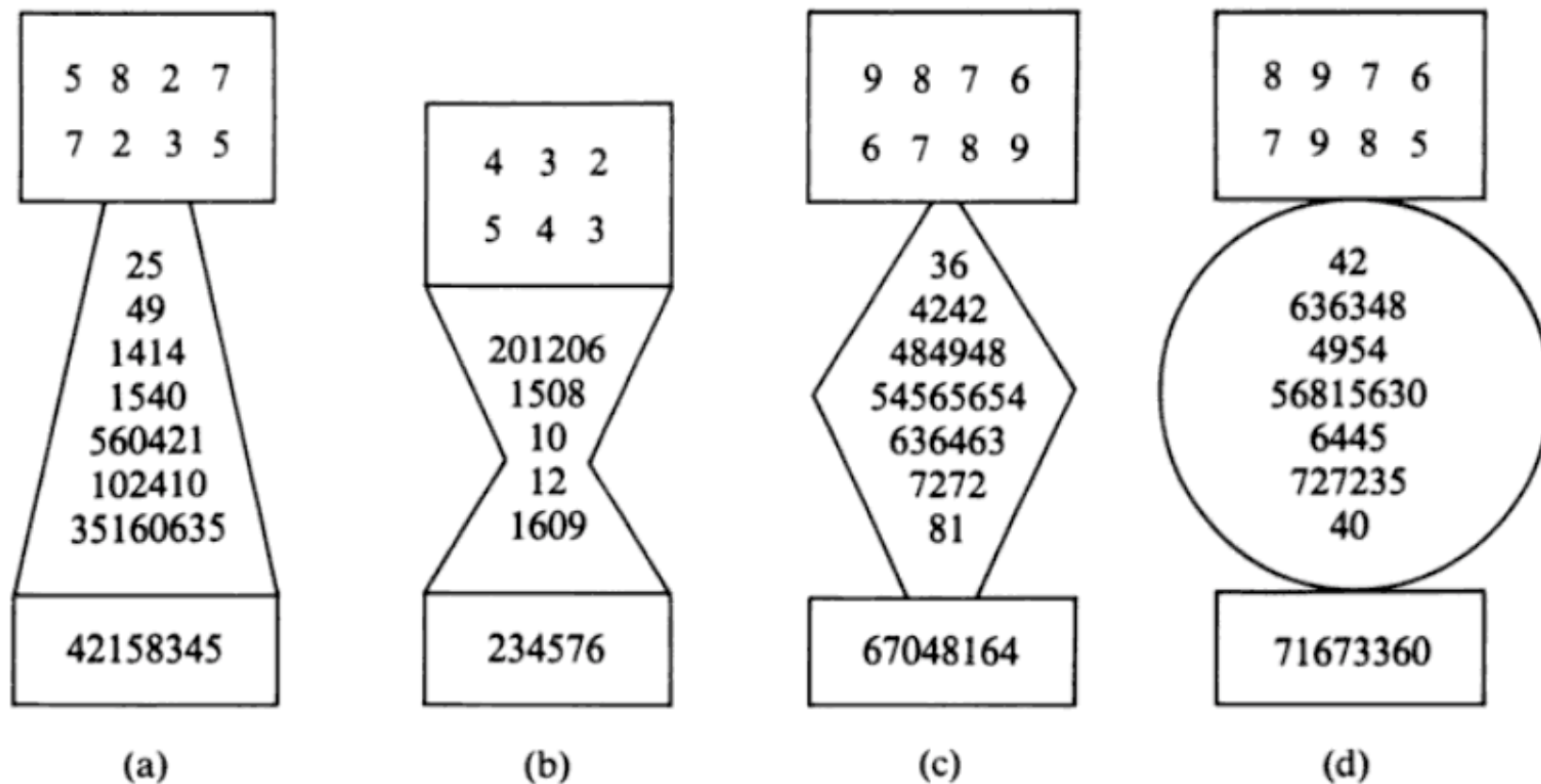


Figure 3 Multiplication (a) *per campana*, (b) *per coppa*, (c) in the pattern of a diamond and (d) in the pattern of a circle

Imatge extreta del capítol “Abacus Arithmetic” del llibre “Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences” editat per Grattan-Guinness. Aquí es parla de que aquest mètode va ser fet servir per Fibonacci al voltant de l’any 1200

# GRAELLA

Per calcular **231** × **57** els hindús  
seguien els següents passos:  
Primer, construïen una graella  
com la de la figura:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |   |
|   |   |   | 5 |
|   |   |   | 7 |

# GRAELLA

Després omplien cadascuna de les caselles posant a dins el resultat de la multiplicació entre el nombre que està a dalt i el que està a la dreta:

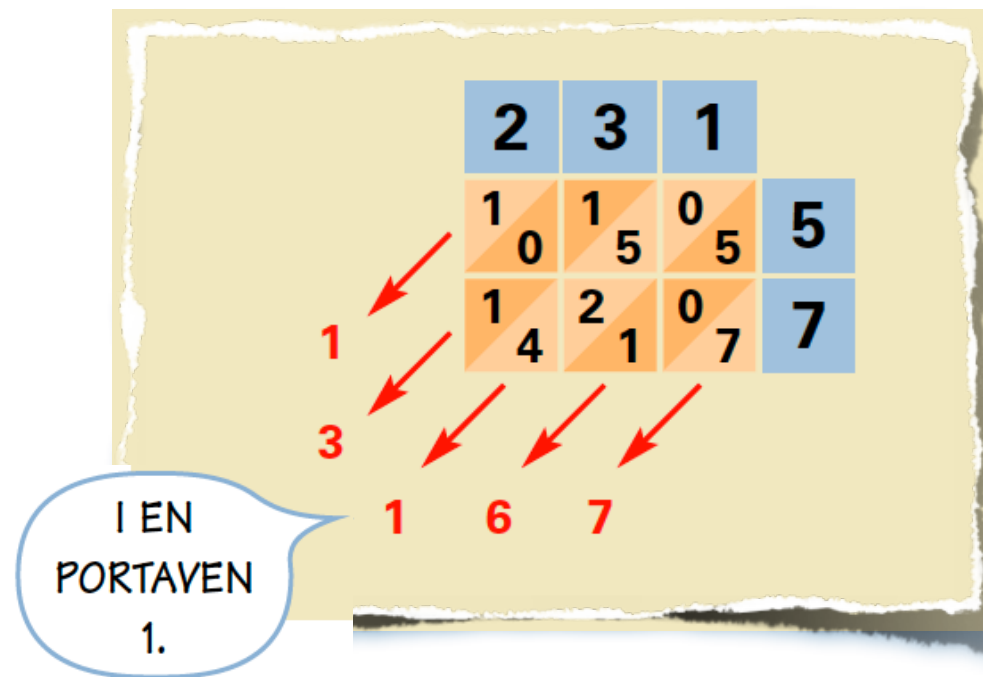
|   |   |
|---|---|
| 3 |   |
| 2 | 7 |
| 1 |   |

$3 \times 7 = 21$   
 POSO EL 2 A LA PART DE  
 DALT I L'1 A LA DE BAIX.

Si el resultat era un nombre més petit que 10, per exemple 8, escrivien 08.

D'aquesta manera la graella plena quedava així:

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 |   |
| 1 | 1 | 0 | 5 |
| 0 | 5 | 5 |   |
| 1 | 2 | 0 | 7 |
| 4 | 1 | 7 |   |



$$231 \times 57 = 13167$$

## Com calcular $23 \times 9$ quan només saps la taula del 2

|               |     |
|---------------|-----|
| 1 cop 23 és   | 23  |
| 2 cops 23 són | 46  |
| 4 cops 23 són | 92  |
| 8 cops 23 són | 184 |

Per tant,

9 cops 23 són  $23 + 184 = 207$

$$11 \cdot 456$$

Veces

Dobles

1

456

2

912

4

1824

8

3648



$$8+2+1=11$$

$$456+912+3648= 5016$$

# algorismes i decimals

La multiplicació amb nombres decimals en un ambient de resolució de problemes

Multipliquem el nombre que està en el punt vermell per el nombre que està en el punt verd, on queda el resultat?



# algorismes i decimals

## Divisions enteres

En repartir 14 llibres entre 4 alumnes, quants en toquen a cadascun?

$$\begin{array}{r} 14 \quad | \quad 4 \\ - 12 \quad | \quad 3 \\ \hline 2 \end{array}$$



R: Tocaran 3 llibres a cada alumne i sobran 2 llibres sense repartir.

## Divisions decimals

En repartir 14 euros entre 4 alumnes, quants en toquen a cadascun?

Ja sabem que:  $14 : 4 = 3 \text{ r } 2$

Però els 2 € que sobren es poden repartir entre els 4 alumnes

donant 0,50 € a cadascun:  $14 : 4 = 3,50$

R: Tocaran 3,50 euros a cada alumne.

EN AQUESTES  
DIVISIONS POTS FER  
SERVIR DECIMALS  
AL QUOCIENT.



# algorismes i decimals

$$\boxed{0,50} + \boxed{\phantom{00}} = \text{€0,50}$$

$$\boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} = \text{€1,00}$$

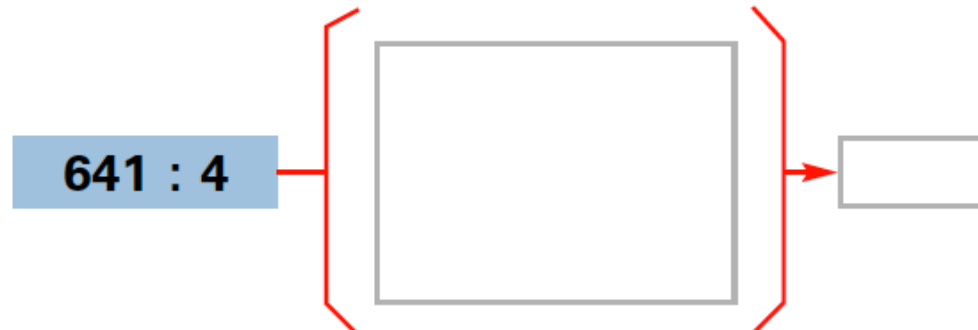
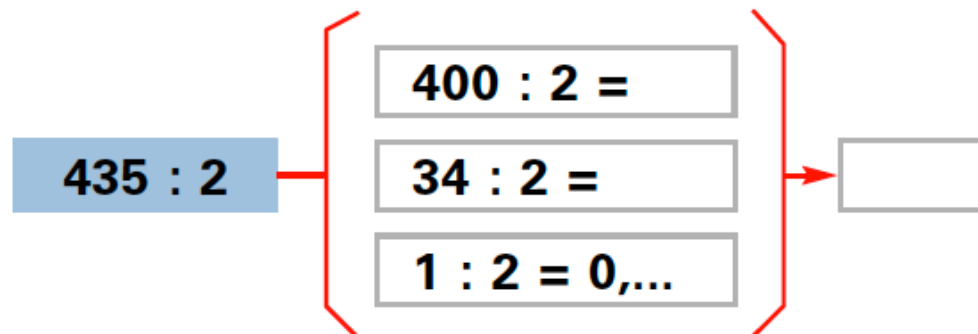
$$\boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} = \text{€1,50}$$

$$\boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} = \text{€2,00}$$

$$\boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} = \text{€2,50}$$

# algorismes i decimals

**2.** Reparteix els diners de manera que en cada bossa n'hi hagi la mateixa quantitat, utilitzant la descomposició i comptant mentalment.

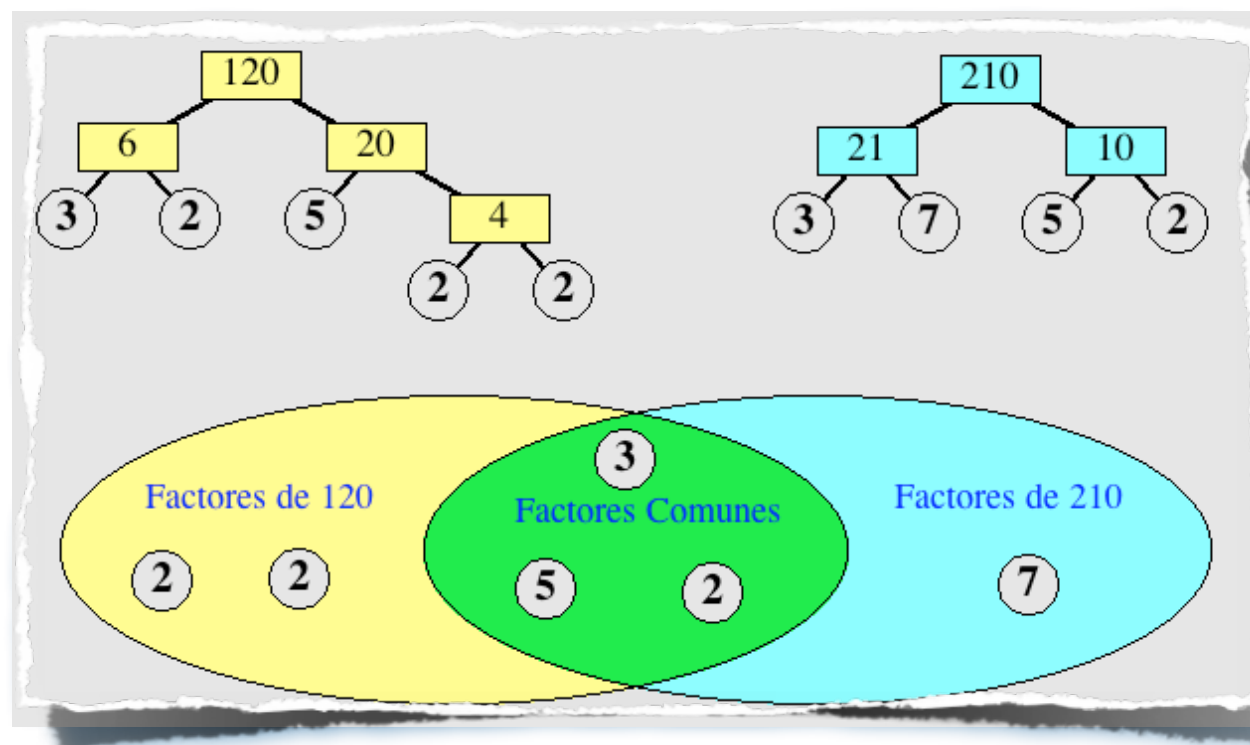


# algorismes i divisibilitat

- aquest tema també hauria de presentar-se en un **ambient de resolució de problemes**
- la divisibilitat és molt més que el càlcul del MCD i el mcm de **dos** nombres
- un itinerari
  - decidir si un nombre és divisor d'un altre
  - trobar alguns divisors d'un nombre
  - tots els divisors d'un nombre
  - ...

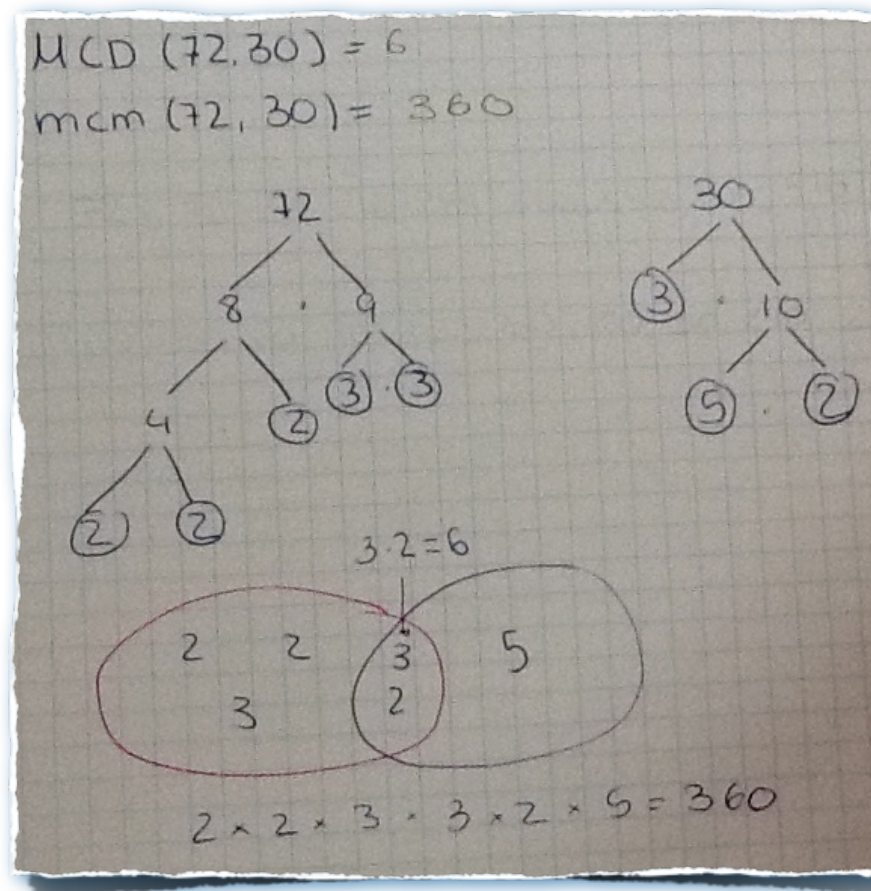
# algorismes i divisibilitat

- Un algorisme transparent per calcular MCD i mcm:  
[un post del bloc del PuntMat](#)



# algorismes i divisibilitat

- la importància de treballar explícitament l'enregistrament escrit per part dels alumnes del treball realitzat amb l'ordinador.



# algorismes i divisibilitat

Un nombre és divisible entre 2 si...

Un nombre és divisible entre 3 si...

Un nombre és divisible entre 4 si...

Un nombre és divisible entre 5 si...

Un nombre és divisible entre 6 si...

Un nombre és divisible entre 8 si...

Un nombre és divisible entre 9 si...

Un nombre és divisible entre 10 si...

Un nombre és divisible entre 11 si...

# algorismes i divisibilitat

Un nombre és divisible entre 2 si...

Un nombre és divisible entre 3 si...

Un nombre és divisible entre 4 si...

Un nombre és divisible entre 5 si...

Un nombre és divisible entre 6 si...

Un nombre és divisible entre 8 si...

Un nombre és divisible entre 9 si...

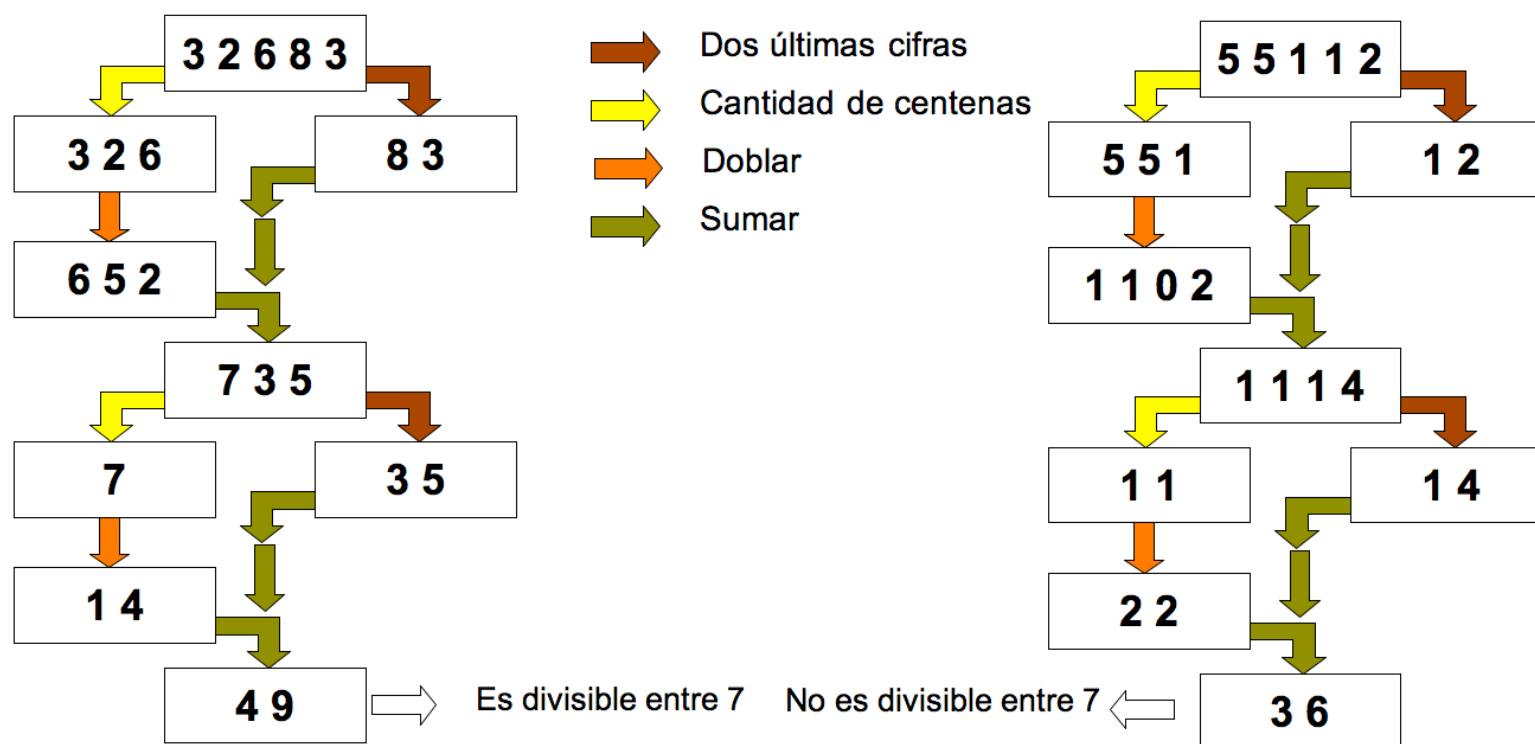
Un nombre és divisible entre 10 si...

Un nombre és divisible entre 11 si...

7?

# algorismes i divisibilitat

Un nombre és divisible entre 7 si...

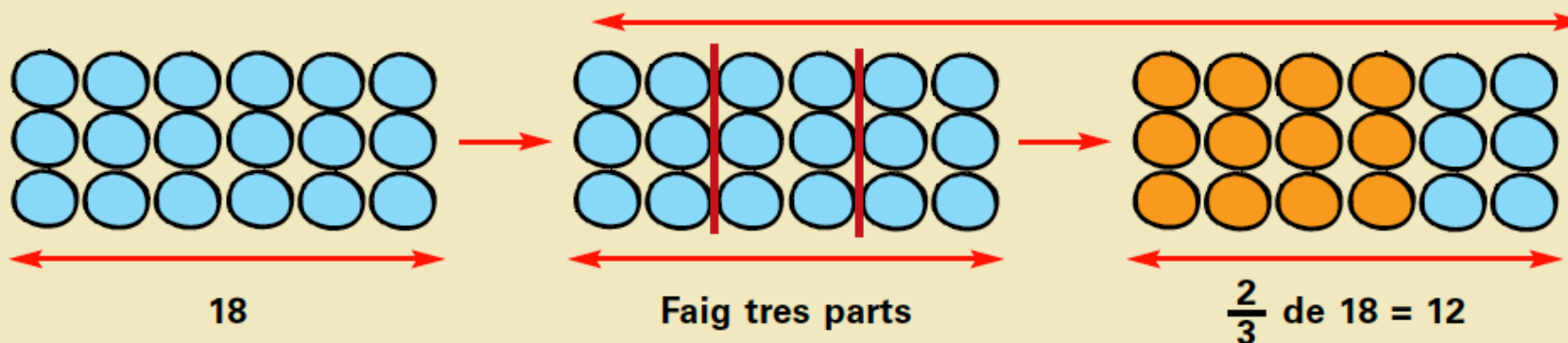


# algorismes i fraccions

## Fraccions com a operadors

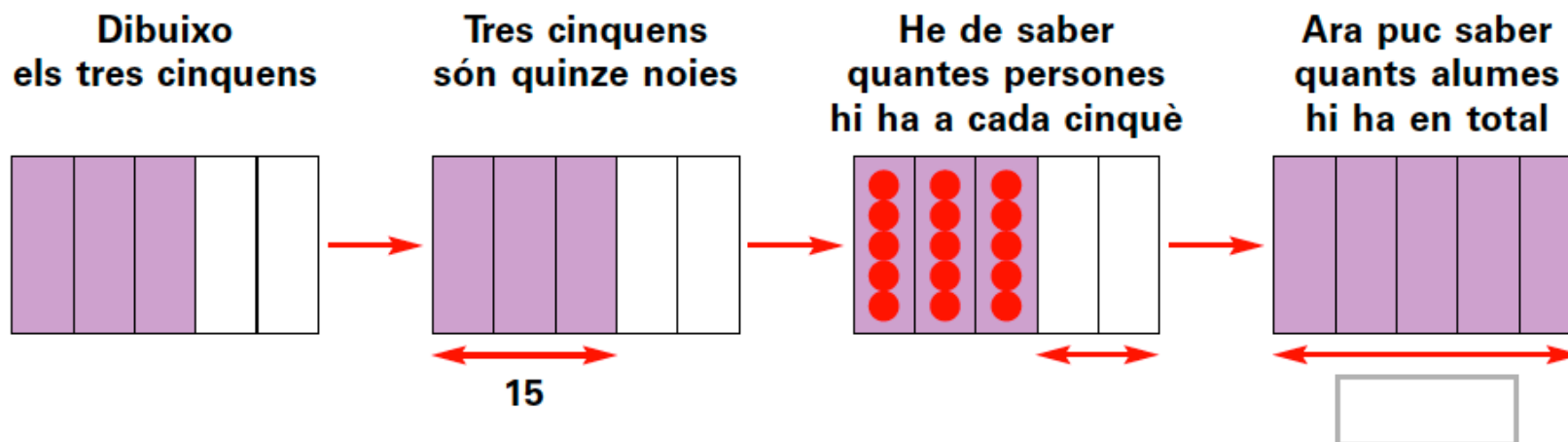
Hi ha 18 pilotes, i les dues terceres parts són de bàsquet.  
Quantes pilotes de bàsquet hi ha?

FAIG LES  
DUES TERCERES  
PARTS I COMPTO  
QUANTS N'HI HA.



# algorismes i fraccions

- 2.** En una classe els tres cinquens dels alumnes són noies. Hi ha 15 noies. Quants alumnes hi ha en total?



# algorismes i fraccions

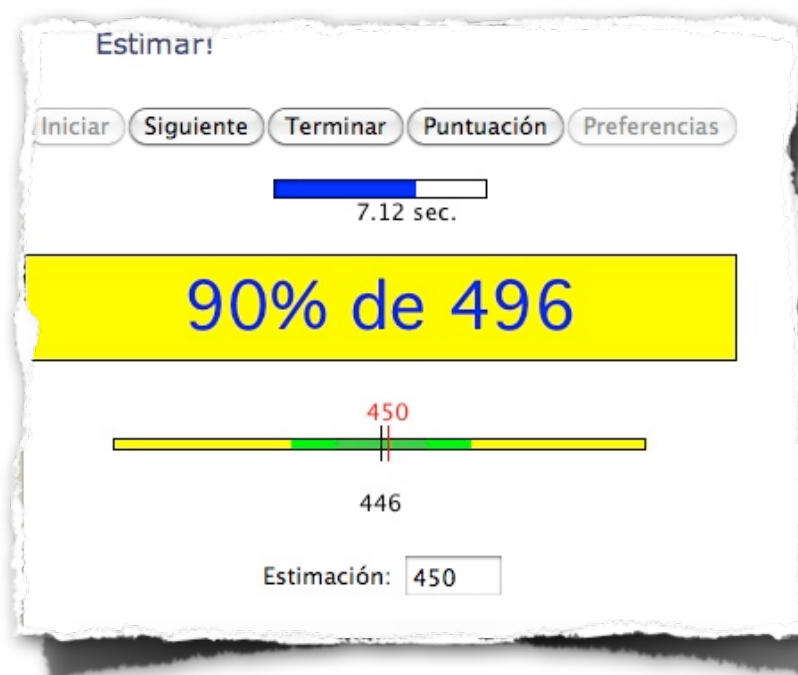
- $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$  és més gran o més petit que 1?



# algorismes i percentatges

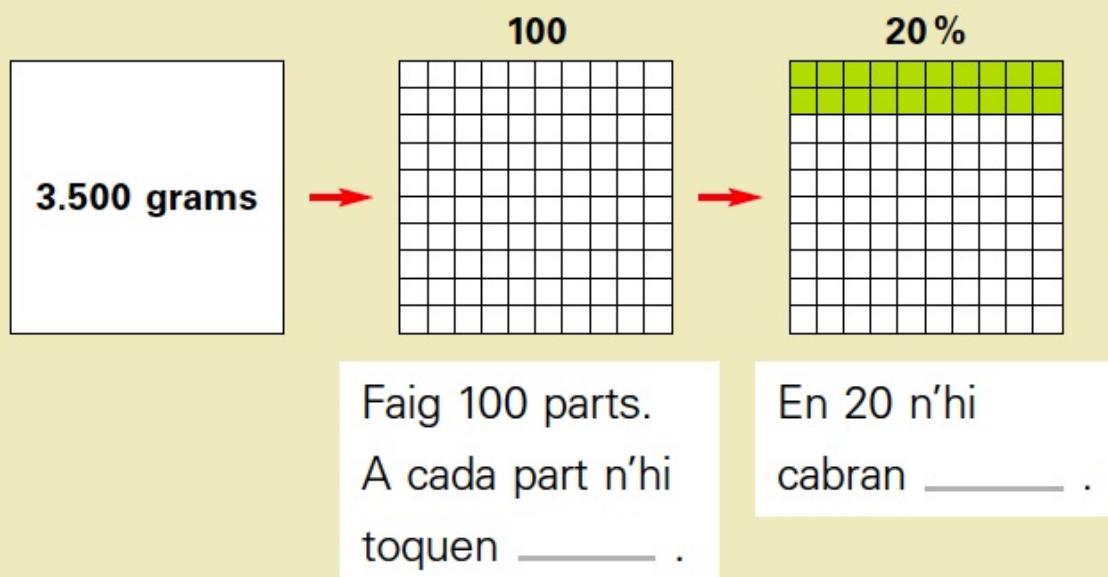
- aquest tema també hauria de presentar-se en un ambient de resolució de problemes
  - no oblidant la proposta d'activitats de càlcul mental
  - ni la proposta d'activitats en les que és suficient una resposta aproximada

[http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00062/schatten/leerling\\_es.html](http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00062/schatten/leerling_es.html)



# algorismes i percentatges

El 20 % d'un producte és aigua. Quina quantitat d'aigua hi haurà en 3.500 grams?



FIXA'T QUE 20 %  
DE 3.500 ÉS EL MATEIX  
QUE  $\frac{20}{100}$  DE 3.500  
I PODEM FER EL MATEIX  
QUE ABANS.

El 20 % de 3.500 són \_\_\_\_\_ grams.

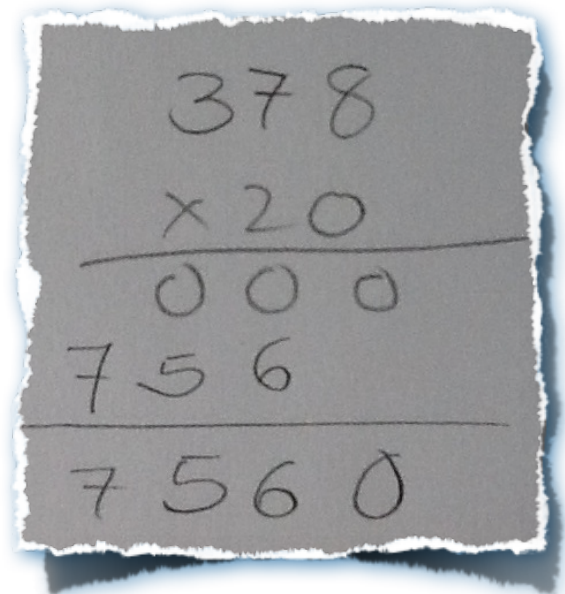


# algorismes i percentatges



# pràctica reproductiva amb algorismes

- quan diem que un alumne ja sap els algorismes?  
I a partir d'aquí, què?
- avaluem el domini d'algorismes a través de quaderns de càlcul?
- què fem si un alumne de 6è ens fa això?

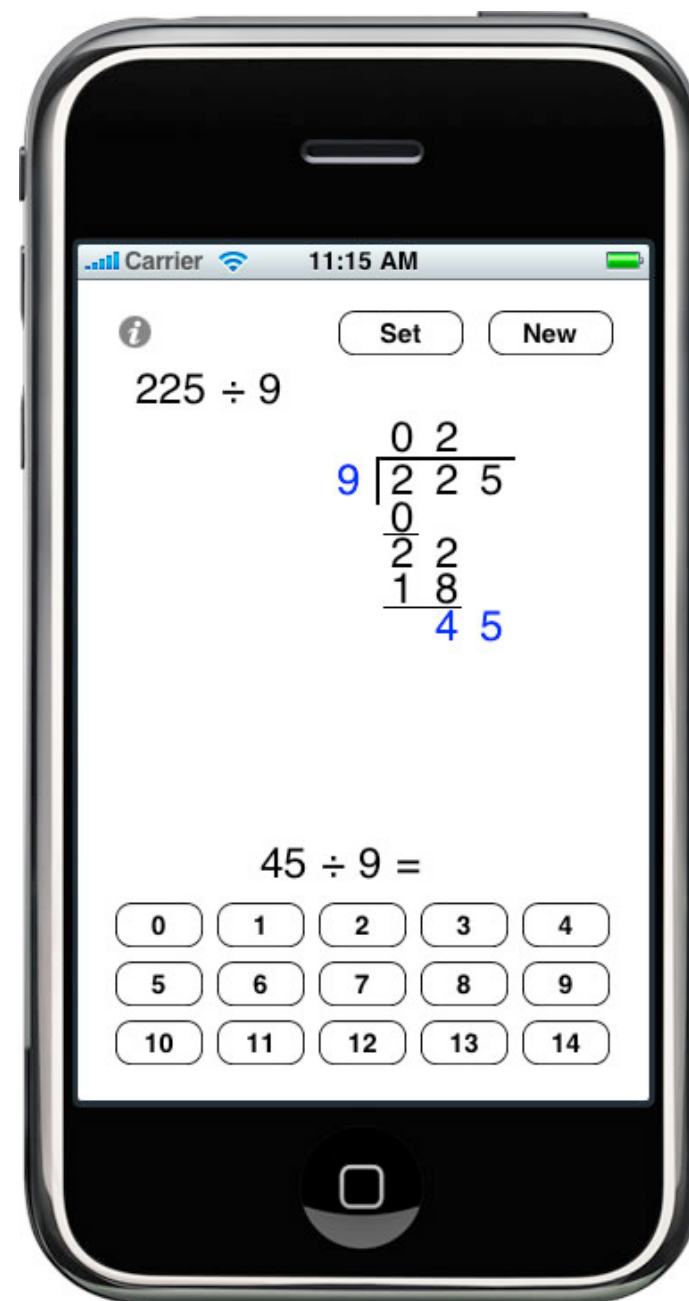


Handwritten multiplication on a torn piece of paper:

$$\begin{array}{r} 378 \\ \times 20 \\ \hline 000 \\ 756 \\ \hline 7560 \end{array}$$

The student has written 378 multiplied by 20. They have correctly calculated 378 times 2 as 756, but they have incorrectly placed the result 756 in the tens column instead of the hundreds column, leading to the final answer 7560.

El paper de les TICs en la pràctica reproductiva dels algorismes



# EN AQUEST CICLE

- hem defensat que el treball amb les operacions aritmètiques ha d'independitzar-se del treball amb els seus algorismes associats
- hem parlat de la resolució de problemes com l'ambient quotidià de les classes de matemàtiques i la construcció d'algorismes com una manera més de resoldre un problema matemàtic

# Ens podeu trobar a:

- twitter: @puntmat
- bloc: <http://puntmat.blogspot.com/>