



Noviembre 2008

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

entonces $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = \infty$

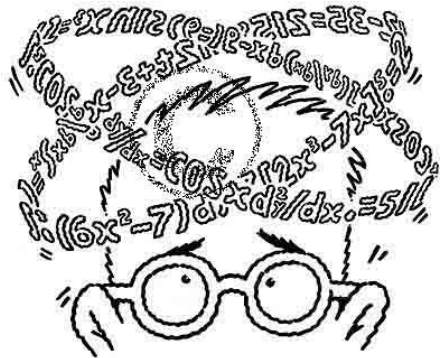
$$\frac{1}{\pi} \sin x = ?$$

$$\frac{1}{\pi} \sin x = ?$$

Si $x = 6$

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

Sentido, ¿en qué sentido?



El sentido de los números

El sentido de los números

Habilidad de entender y utilizar los números tanto en un contexto puramente matemático como en su relación con el mundo que nos rodea.

Para evaluar si sus alumnos sabían como encontrar un todo dada una parte, Eva les dio a sus alumnos la siguiente pregunta:
“ $\frac{3}{5}$ de un número es 12, ¿cuál es el número?
Explica tu respuesta.

Ron escribió:

“ $12 * 2 = 24$, $24:6=4$, $24-4=20$ ”.

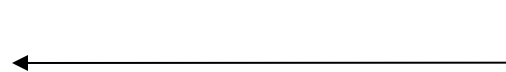
- Es correcto?
- Si Ron fuera tu alumno, ¿cómo lo evaluarías?

$$130 \div 3.25 \longrightarrow 130 \div 6.50$$



$$130 \div 13 = 10$$

$$130 \div 3.25 = 40$$



$$\frac{15}{16} + \frac{7}{8}$$

12. א. כתבו במשבצת את הסימן המתאים $<$ או $>$ או $=$

$$750 - 13 \quad \square \quad 750 - 25$$

ב. האם אפשר לענות על השאלה בלי לחשב תוצאות?

הסבירו:

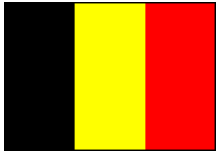
12. א. כתבו במשבצת את הסימן המתאים $<$ או $>$ או $=$

$$750 - 13 \quad \boxed{>} \quad 750 - 25$$

ב. האם אפשר לענות על השאלה בלי לחשב תוצאות? כן

הסבירו: כן 13 יותר קטן מ-25

אלו הוא מוריד בהור



BELGICA

30,528 km²

10,160,800 habitantes

333 hab/ km²



ISLANDIA

103,000 km²

267,000 habitantes

2.6 hab/ km²



PALAU MÚSICA CATALANA
BARCELONA
1908-2008

català
castellano
english



Programació
i Venda d'entrades

Visites Guiades

Visites Guiades

L'Orfeó Català
i la Fundació

Cercador



Portada > **Visites Guiades**

Horaris | Preus i venda d'entrades | Condicions de compra | Visita virtual |

Visites Guiades



Venda de Tiquets



50'

El Palau de la Música Catalana organitza cada dia una visita guiada a la Sala de Concerts modernista i, segons la disponibilitat, a la Sala de Música de Cambra.

Les places són limitades: 55 persones per visita.

Les entrades es posen a la venda a partir d'un dia de la visita. Es recomana adquirir-les amb antelació.

No es fan reserves.

55 persones
per visita

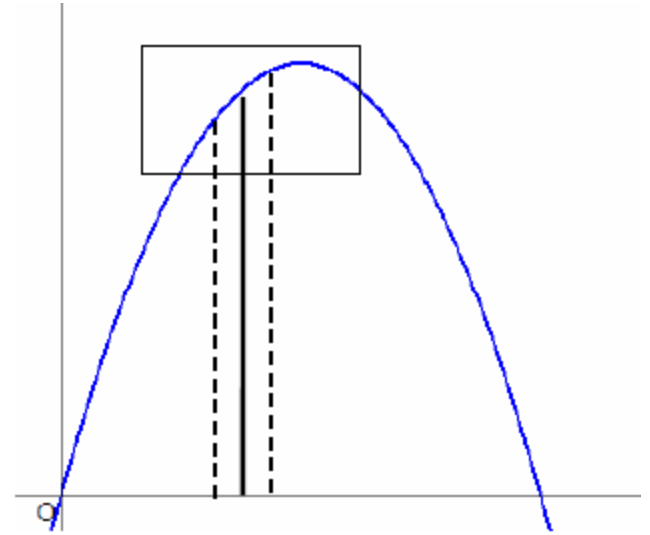
~1' per
personne?



$$55 \times 85$$

$$50 \times 90 = 4500$$

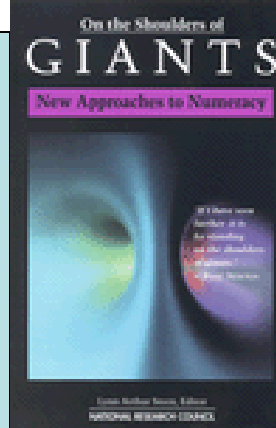
$$60 \times 80 = 4800$$



El sentido de los números - Habilidades

- ✓ *Modificar una operación para facilitar su cálculo*
- ✓ *Estimar resultados/órdenes de magnitud*
- ✓ *Relacionar operaciones y entender su esencia*
- ✓ *Buscar, comprender, relacionar, crear representaciones distintas de fenómenos numéricos*
- ✓ *Entender datos en contexto*
- ✓ *Ser crítico con los datos*

¿El sentido de los símbolos?



Contents

~~~~~

PATTERN / 1

Lynn Arthur Steen

DIMENSION / 11

Thomas F. Banchoff

QUANTITY / 61

James T. Fey

UNCERTAINTY / 95

David S. Moore

SHAPE / 139

Majorie Senechal

CHANGE / 183

Ian Stewart

BIOGRAPHIES / 219

INDEX / 223

calculator produces an exact answer, it is important for users to check that the displayed results are “in the right ball park.” This means, for instance, determining by quick rounding and mental arithmetic that  $345 + 257 + 1254$  is approximately 1850 or that  $85 \times 2583$  is approximately 200,000. Skillful mental calculation of this sort is *not* achieved by extensive training in mental execution of traditional written algorithms, but in flexible application of place value understanding and single-digit arithmetic—a very different agenda than the goals of traditional school arithmetic. Since there has been considerable attention given to informal arithmetic and computational estimation over the past decade, there now are clear goals, creative curriculum materials, and effective teaching suggestions for this important but long-neglected topic.

### Symbol Sense

There is almost certainly a comparable informal skill required to deal effectively with symbolic expressions and algebraic operations—to cultivate student *symbol sense*—but ideas and instructional materials in this area are not as fully developed. A reasonable set of goals for teaching symbol sense would include at least the following basic themes:

- Ability to scan an algebraic expression to make rough estimates of the patterns that would emerge in numeric or graphic representation. For example, given  $f(x) = 50 \cdot 2^x$ , a student with symbol sense could sketch the graph of this function and realize that function values will be positive and monotonically increasing—with small values of  $f(x)$  for negative  $x$  and rapidly increasing values for positive  $x$ .
- Ability to make informed comparisons of orders of magnitude for functions with rules of the form  $n$ ,  $n^2$ ,  $n^3$ , ..., and  $k^n$ . This skill, a bridge between number and symbol sense, plays an important role in judging the computational complexity of algorithms for mathematical and information-processing tasks that are at the heart of computer science.
- Ability to scan a table of function values or a graph or to interpret verbally stated conditions, to identify the likely form of an algebraic rule that expresses the appropriate pattern. For example, given the following table, a student with symbol sense could predict that the rule for the best-fitting function is likely to be of the form  $f(x) = mx + b$  with  $m$  approximately 15 and  $b$  about 500:

|       |        |     |     |     |     |      |      |
|-------|--------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| Sales | $x$    | 0   | 10  | 20  | 30  | 40   | 50   |
| Costs | $f(x)$ | 510 | 675 | 825 | 960 | 1100 | 1240 |

- Ability to inspect algebraic operations and predict the form of the result or, as in arithmetic estimation, to inspect the result and judge the likelihood that it has been performed correctly. For instance, a student should realize almost without thinking that the product of linear and quadratic polynomials will be a cubic polynomial.
- Ability to determine which of several equivalent forms might be most appropriate for answering particular questions. For instance, good symbol sense should allow students to realize that the factored form of a polynomial readily yields information about its zeroes but makes very difficult calculation of derivatives or integrals.

Promising work from current projects shows how numerical and graphic computer tools can be used effectively to build student intuition about algebraic symbolic forms. Nevertheless, the development of more general symbol sense remains an important research task on the path to new approaches for developing conceptual and procedural knowledge of quantity.

### NUMBER SYSTEMS

For a great many students mathematics is a vast, loosely connected collection of facts, procedures, and routine word problems. However, it is important to remember that the unique power of mathematical concepts depends on abstract meaning, which lies at the heart of any specific embodiment. Learning the fundamentals of any branch of mathematics should include recognition of those deep structural principles that determine the relations among its concepts and methods. For number systems a rather small collection of big and powerful ideas determine the structure of each system. When one steps back from specific details, it becomes clear that a few central principles govern all algebraic and topological properties of numbers. These principles can be used to derive all specific facts of various number systems and to guide the match between formal systems and significant quantitative problems.

In the historical development of number systems, the progression began with the natural numbers. Extensions over many centuries added fractions, then negative numbers, and, finally, a rigorous characterization of real numbers. From a perspective near the end of the twentieth century it is possible to organize all those structures from the top down:



$$S = 6$$

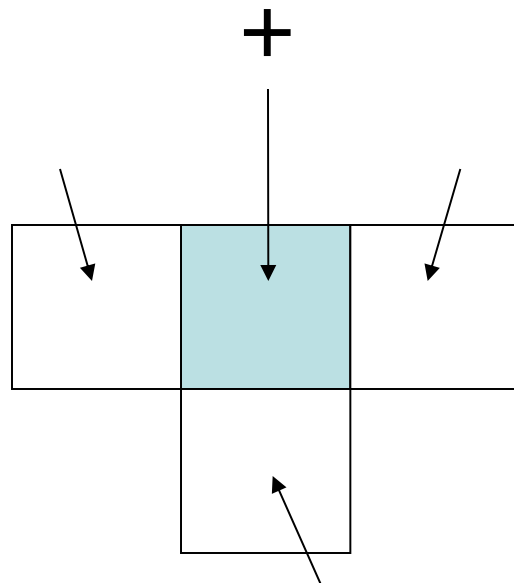
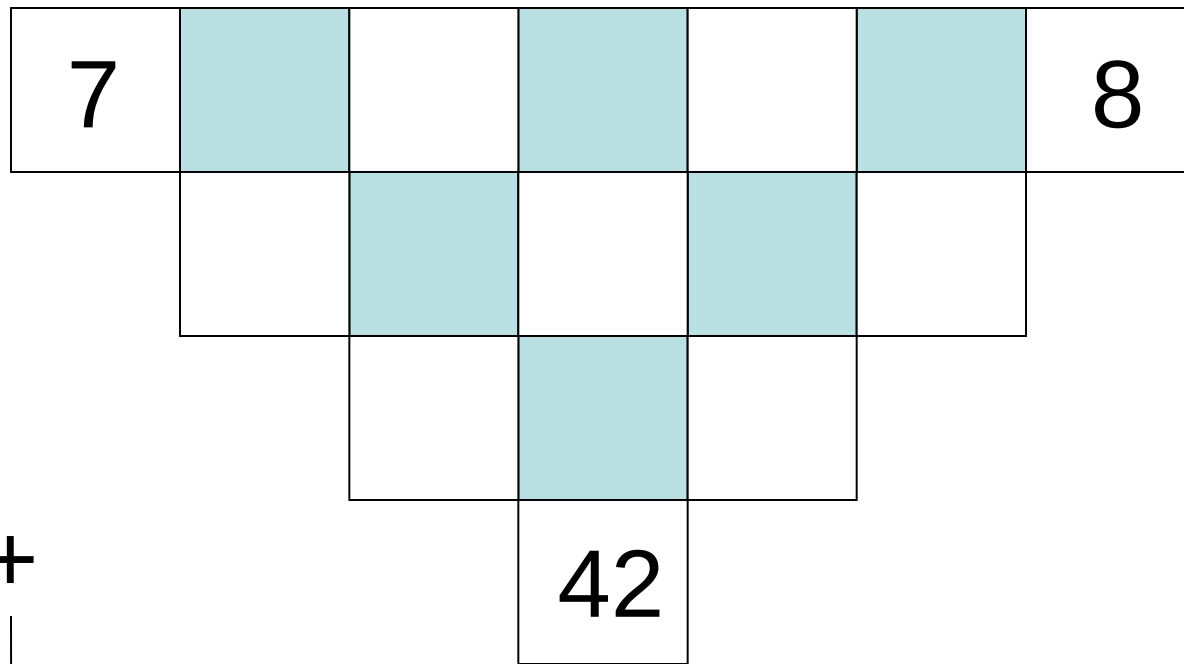
|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
|   | 2 |   |
| 2 |   | 5 |

$$S = 15$$

|    |   |   |
|----|---|---|
|    |   |   |
|    | 5 |   |
| 13 |   | 4 |

|   |   |   |
|---|---|---|
|   |   |   |
|   | 4 |   |
| 6 |   | 2 |

$$S = 10$$





$$1.1a \times 0.9b = 0.99ab$$

Equivalencia de expresión  
 $\neq$   
Equivalencia de sentido

La media aritmética de dos números

$$\frac{a+b}{2} \longrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

Equivalencia de expresión  
 $\neq$

Equivalencia de sentido

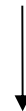
Tomar un número impar cualquiera, elevarlo al cuadrado y luego restarle 1. ¿Qué se puede concluir acerca de los números obtenidos?

$$(2n-1)^2 - 1$$



$$4n^2 - 4n$$

$$4n(n-1)$$



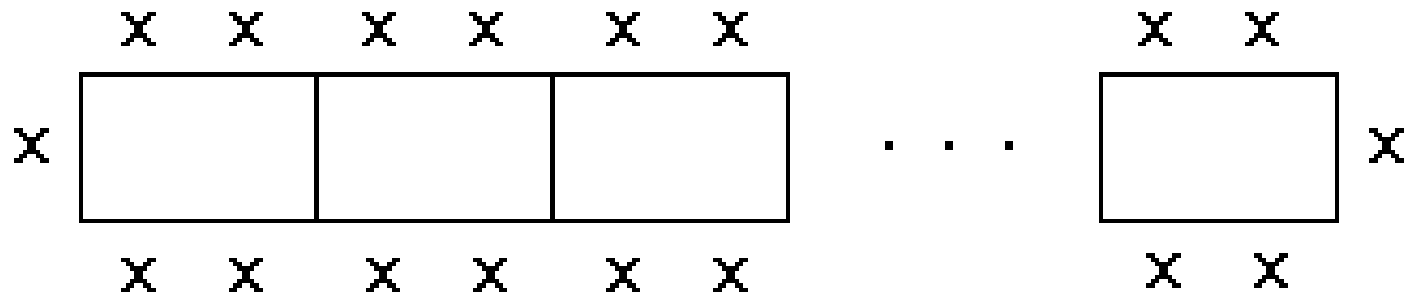
$$\frac{8n(n-1)}{2} = \frac{4n(n-1)}{1}$$

# Elección de representaciones simbólicas apropiadas

Tomar un número impar cualquiera, elevarlo al cuadrado y luego restarle 1. ¿Qué se puede concluir acerca de los números obtenidos?

$$\begin{array}{ccc} n & \longrightarrow & n^2 - 1 \\ & \swarrow & \\ & (n-1)(n+1) & \end{array}$$

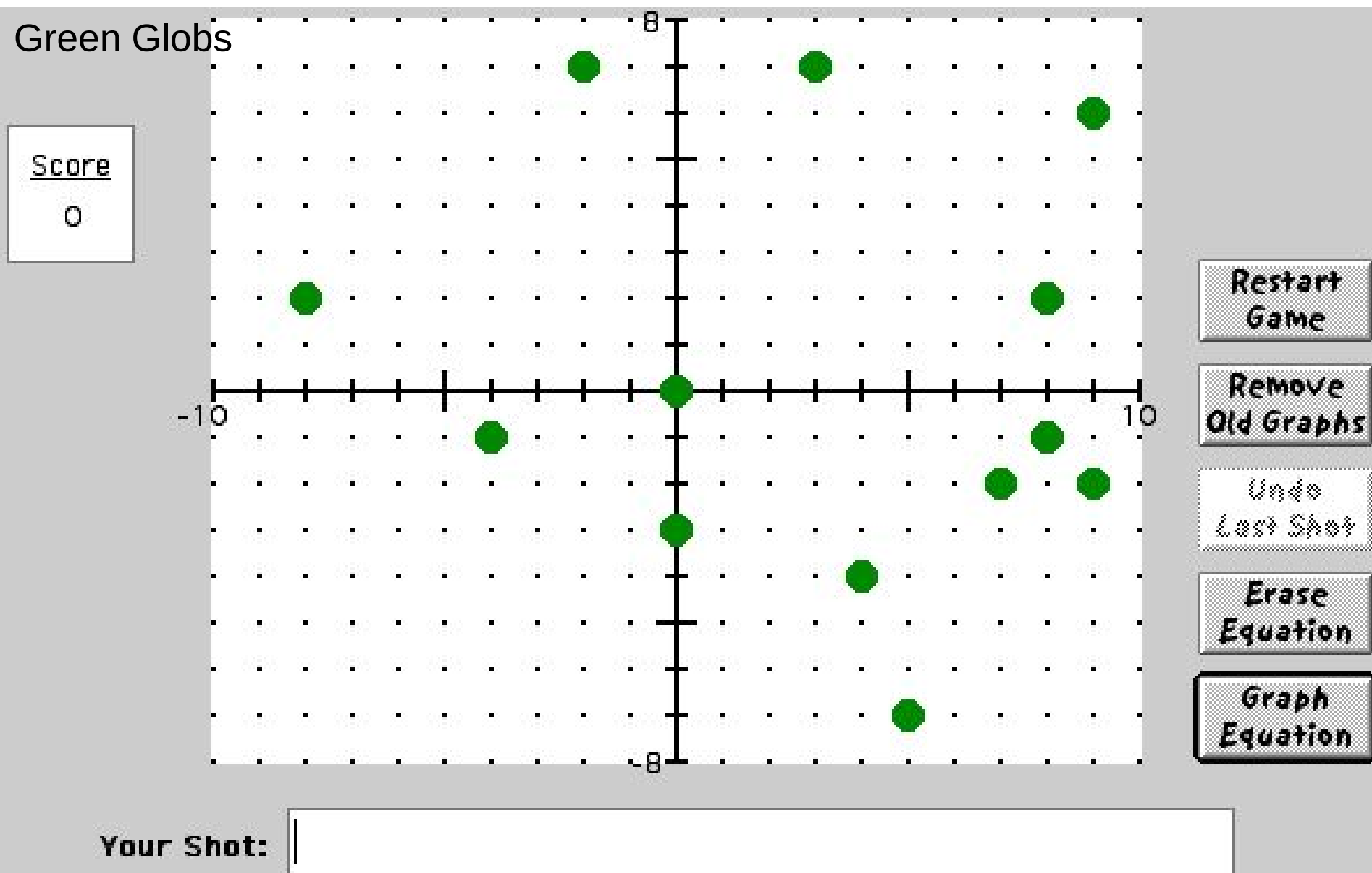
# Revisión de los símbolos, “desmodelización”



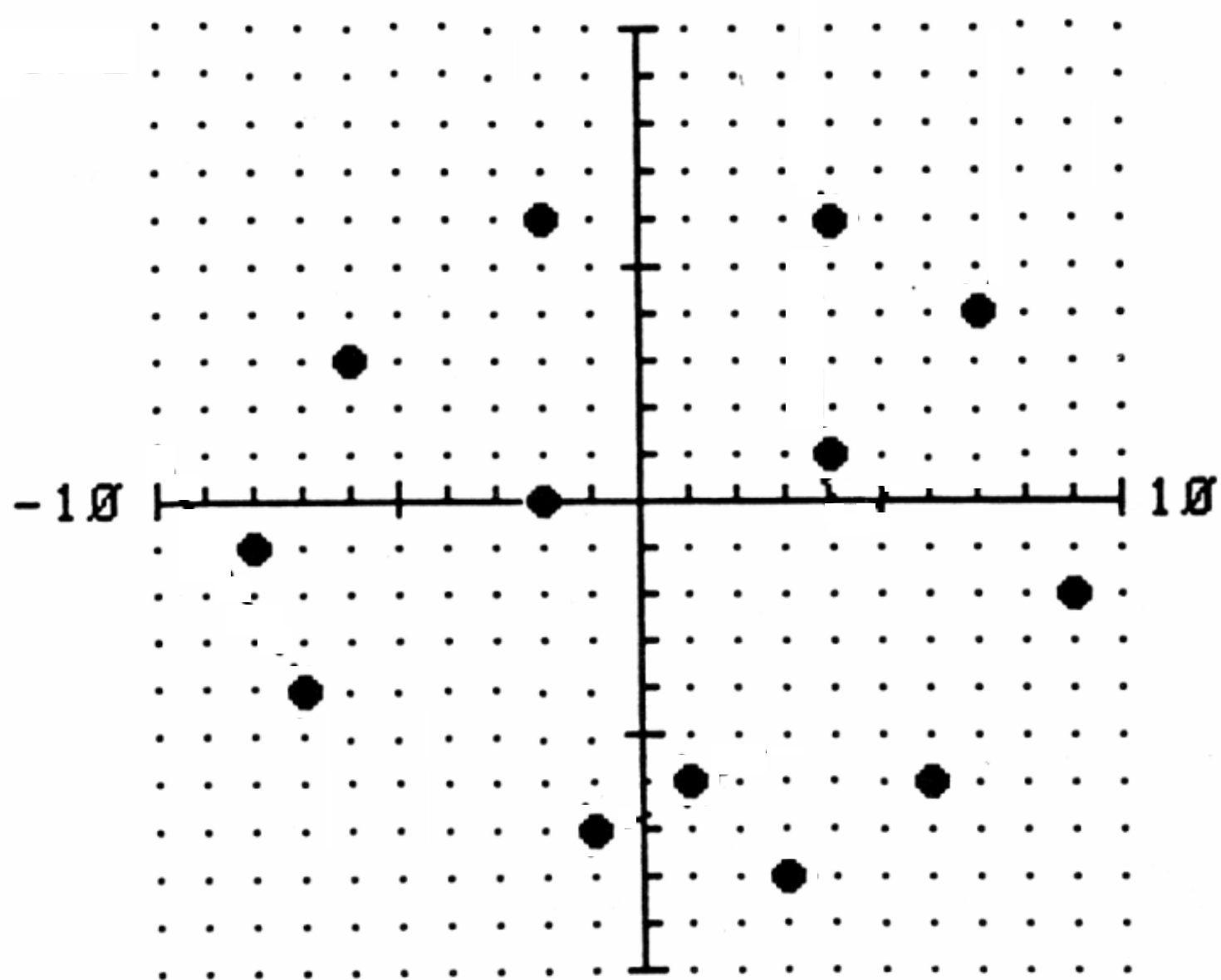
$$4(n-2)+10$$

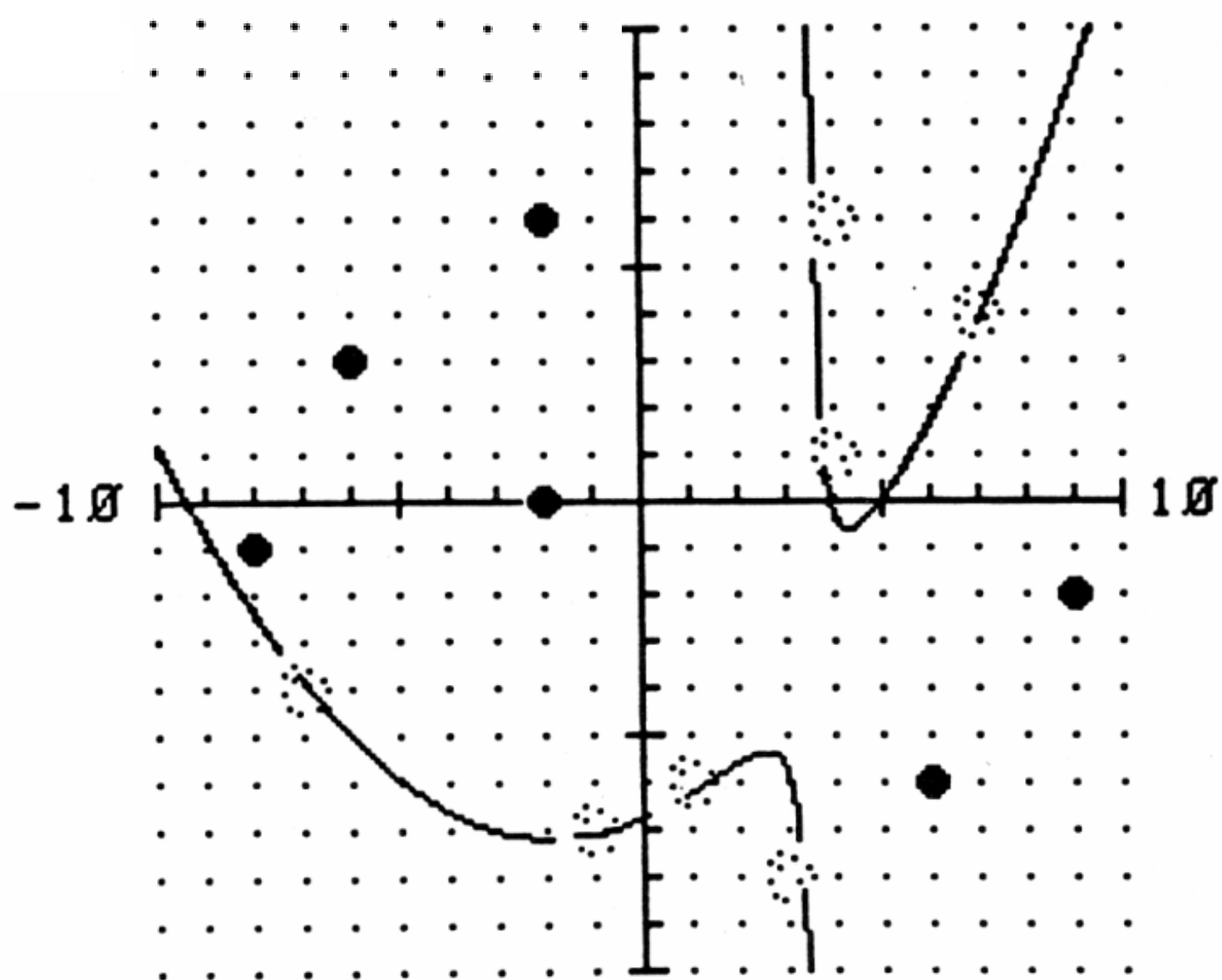
$$5n - (n-2)$$

# Habilidad de construir una expresion simbolica que responda a ciertos criterios

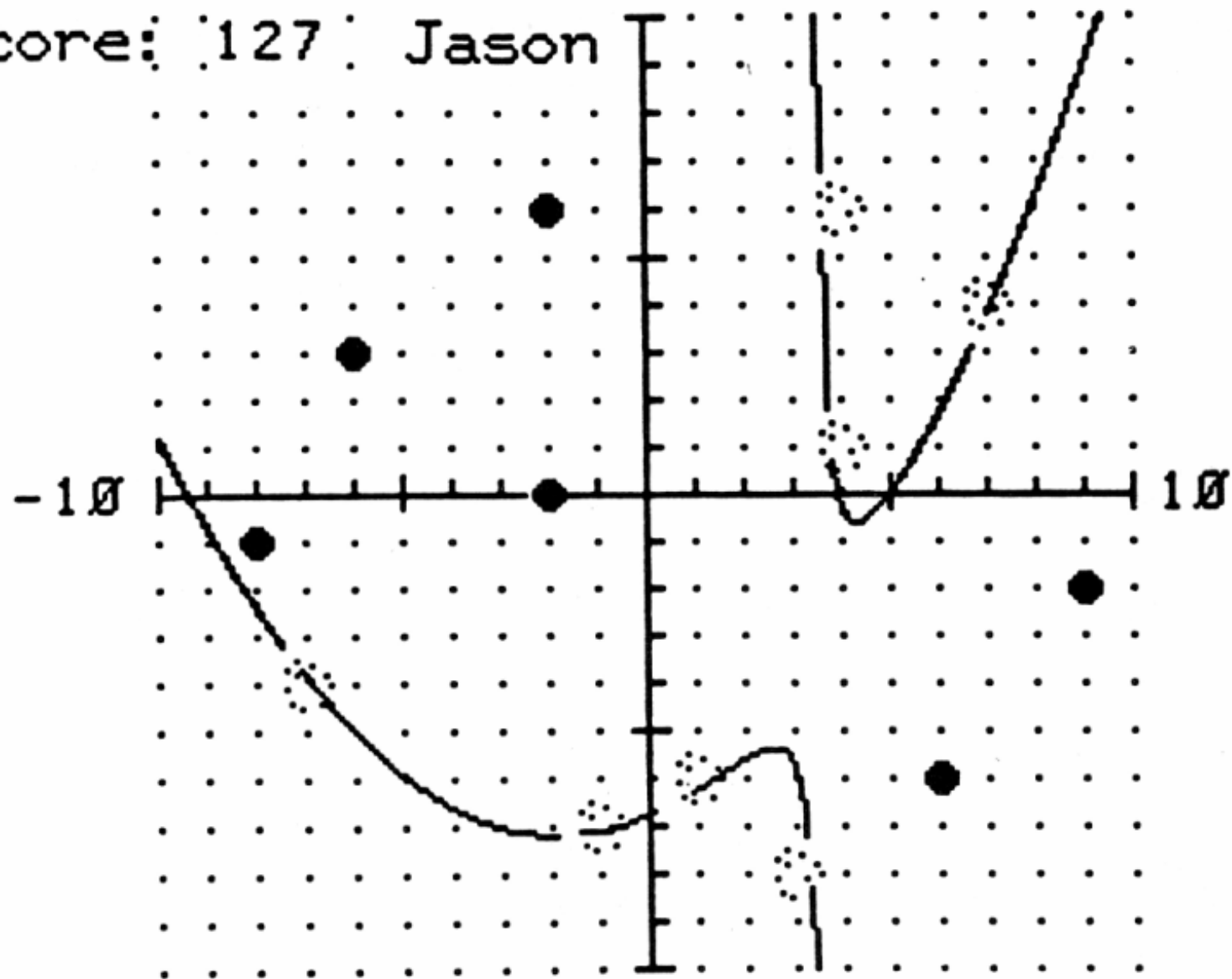








Score: 127 Jason



$$y = x^2 - 1$$

Obsérvese que a veces el promedio de dos números es el mismo valor que (el valor positivo de) su diferencia (por ejemplo, el promedio de 10 y 30 es 20, y  $30 - 10 = 20$ , pero el promedio de 10 y 16 es 13, pero  $16 - 10 \neq 13$ ). Explore para cuales pares de números, su promedio es el mismo que su diferencia (positiva).

|  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Ecuación de una circunferencia  
que pasa por los puntos  
 $(a,b)$ ,  $(-a,b)$  y  $(0,0)$

$$(x^2-4)/(d-2)$$

Mostrar que si

$$a + b + c = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad a - b + c = -1$$

$ax^2 + bx + c = 0$  tiene dos raíces reales distintas.

Hagamos un “pequeño cambio de lenguaje”

Mostrar que si

$$a + b + c = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad a - b + c = -1$$

$ax^2 + bx + c = 0$  tiene dos raíces reales distintas.



Hagamos un “pequeño cambio de lenguaje”

Mostrar que si

$$a + b + c = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad a - b + c = -1$$

$ax^2 + bx + c = 0$  tiene dos raíces reales distintas.

$$f(x) = \downarrow ax^2 + bx + c$$

Hagamos un “pequeño cambio de lenguaje”

Mostrar que si

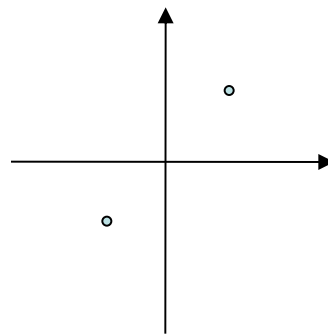
$$\begin{array}{ccc} a + b + c = \sqrt{2} & \text{y} & a - b + c = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(1) > 0 & & f(-1) < 0 \end{array} \quad \square$$

$ax^2 + bx + c = 0$  tiene dos raíces reales distintas.

$$f(x) = \downarrow ax^2 + bx + c$$

Hagamos un “pequeño cambio de lenguaje”

Mostrar que si



$$\begin{array}{ccc} a + b + c = \sqrt{2} & \text{y} & a - b + c = -1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(1) > 0 & \square & f(-1) < 0 \end{array}$$

$ax^2 + bx + c = 0$  tiene dos raíces reales distintas.

$$f(x) = \downarrow ax^2 + bx + c$$

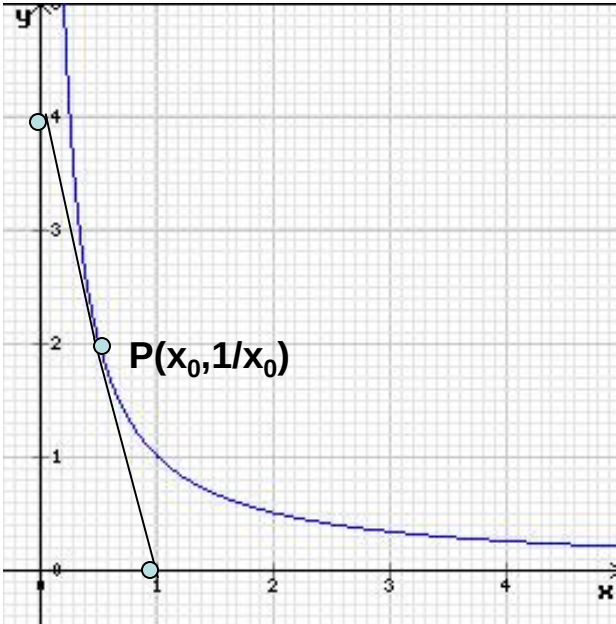
# Sentido de los símbolos

- Amistad con los símbolos
- Capacidad “manipulativa”
- “Lectura a través” de los símbolos
- Capacidad de diseño de expresiones simbólicas
- Equivalencia de expresión  $\neq$  Equivalencia de sentido
- Elección de representaciones simbólicas apropiadas
- Revisión de los símbolos, “desmodelización”
- Capacidad de distinguir distintos roles

¿Capacidad innata ó adquirida?

**Dada la función  $f(x)=1/x$ . P es un punto en el gráfico de la función (en el primer cuadrante). La recta tangente al gráfico en P crea, con los ejes cartesianos, un triángulo rectángulo. ¿Cuales deben ser las coordenadas de P, para que la hipotenusa de ese triángulo tenga longitud mínima/máxima?**

## IA – Proceso de solución:



- Trazado del gráfico

- Cálculo de la derivada de  $f(x)$ ,  $f'(x) = -1/x^2$

- Formación de la ecuación de la tangente

$$y - y_0 = (-1/x_0^2)(x - x_0)$$

- Cálculo de las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes

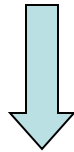
$$(2x_0, 0) \text{ and } (0, 2/x_0)$$

- Formación de la función longitud

$$g(x) = \sqrt{4x_0^2 + \frac{4}{x_0^2}}$$

- Se pregunta: max o min?

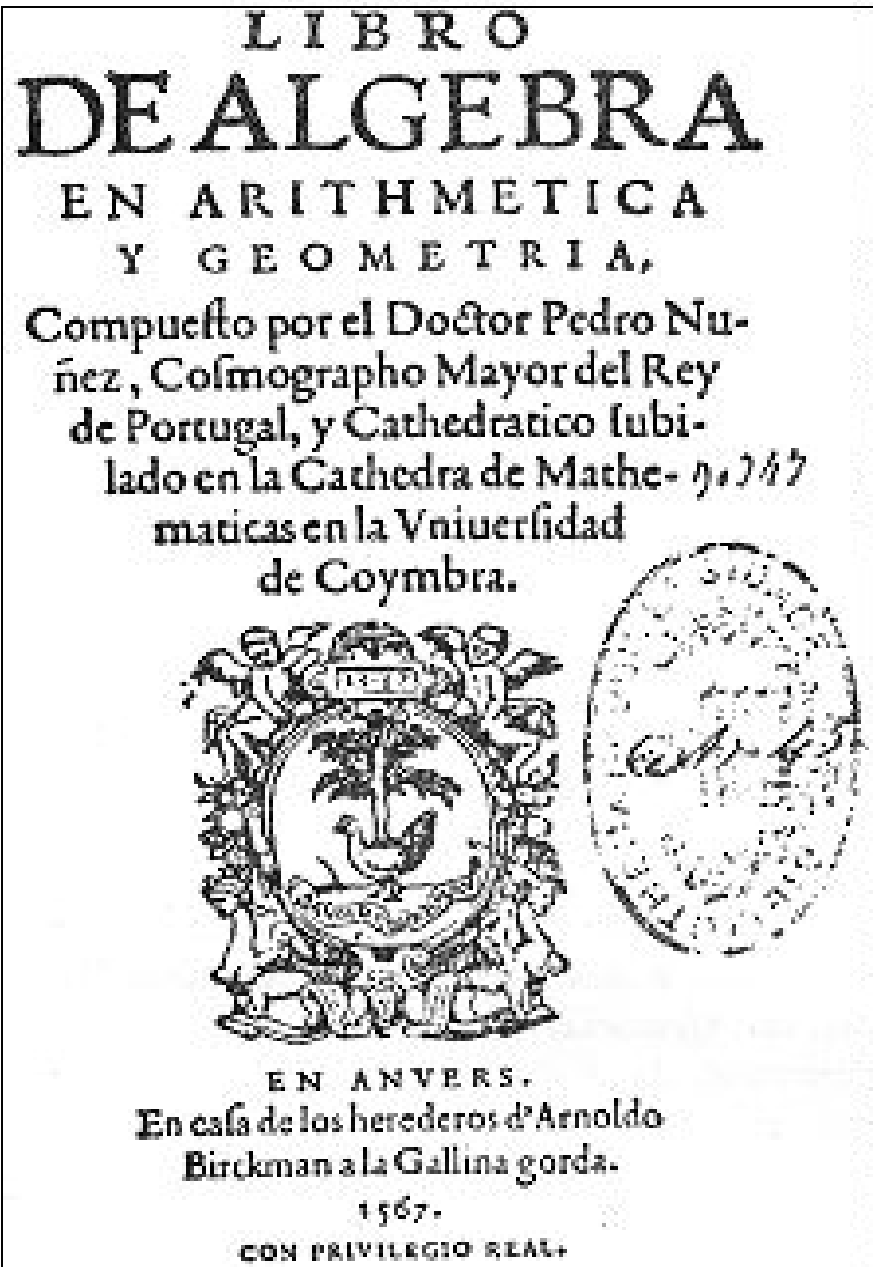
“Tengo un amigo que siempre hace eso [juega con el problema para encontrarle algún sentido], después de tal esfuerzo, en general no tiene ni tiempo ni energías para embarcarse en una solución simbólica, no se le reconoce lo que pudo haber hecho, y fracasa en los exámenes. Si no tengo necesidad, yo me ocupo solamente de los símbolos, que es lo que la maestra y el examen quieren.”



Efectos de prácticas muy arraigadas



# ¿Qué conocimientos presupone?



$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$\frac{1}{b^{-n}} = b^n$$

$$b^0 = 1 \quad b \neq 0$$

$$(b^n)^m = b^{nm}$$

$$(b_1 b_2 b_3 \dots b_n)^n = b_1^n b_2^n b_3^n \dots b_n^n$$

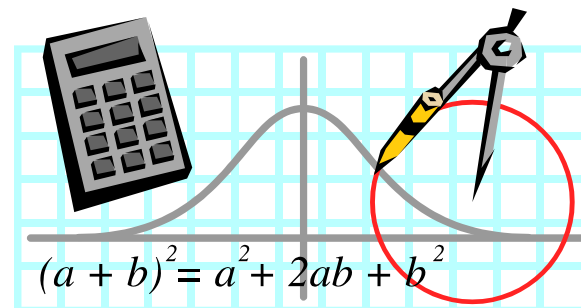
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Fórmulas 1

$$\frac{y + (-3)}{2} = 1$$

$$y + (-3) = 2$$

$$y = 5$$



# Ser competente en álgebra

**Transición flexible y oportuna entre**

***acciones automatizadas***



***atención a los significados***



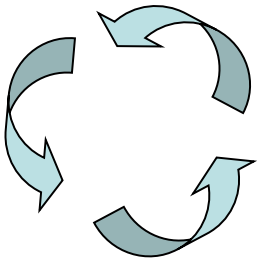
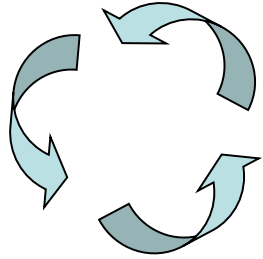
Posponer los significados y preferir un procedimiento rápido y eficaz

Interrumpir un procedimiento para conectar ideas y crear significados

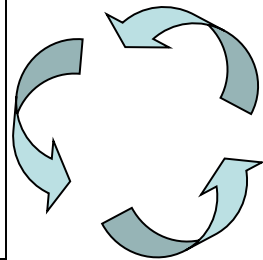
# ¿Qué subyace bajo esa flexibilidad?

Una gran dificultad:

Si el significado emerge con el uso, uno debería manipular símbolos para “sentirlos” y entenderlos, pero ¿cómo podemos usar algo sin entender su sentido?



Este círculo vicioso  
puede ser una  
**trampa para el aprendizaje,**  
pero es al mismo tiempo,  
**su motor principal**



“... proceso, ... , es como dos piernas que hacen posible el caminar hacia adelante gracias al hecho de que nunca están exactamente en el mismo lugar, y en un cierto momento, una de ellas está adelante de la otra.”

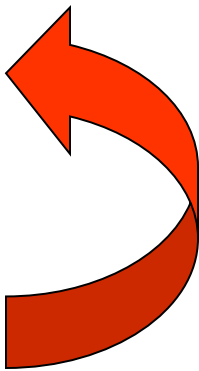
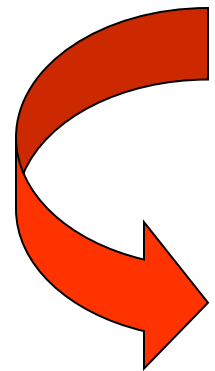
Sfard, A. 2000. “Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other”. In P. Cobb, K. E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design*. Mahwah, NJ: Erlbaum, pp. 37-98).



Implicaciones  
Paciencia intelectual  
hacia  
la comprensión parcial

SIGNIFICADOS

AUSENCIA DE  
SIGNIFICADOS



# **Una breve (y ciertamente parcial) conclusión sobre implicaciones para la enseñanza**

- **Prácticas de aula apropiadas para todos**

- sensibilidad hacia temas de significados simbólicos
- alentar desarrollo de ideas (aún parciales)
- hacer espacio para metacontenidos y reflexión
  - legitimar la búsqueda informal de significados formales
  - ejemplificar transiciones flexibles
  - apoyar el desarrollo de la paciencia intelectual y dar el ejemplo
  - cultivar un sentido del propósito

- **Materiales de estudio**