Resolución de problemas

La resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano. Para encontrar una solución, los estudiantes tienen que recurrir a sus conocimientos y, a través de este proceso, muchas veces adquieren nociones matemáticas nuevas. Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo. Los alumnos deberían tener frecuentes oportunidades de formular problemas complejos, de enfrentarse a ellos y de resolverlos -problemas que requieran una cantidad considerable de esfuerzo- y, luego, habría que estimularles a reflexionar sobre su pensamiento.

La resolución de problemas es una parte integral de todo el aprendizajes de las matemáticas

Para aprender la resolución de problemas en matemáticas, los alumnos deberían adquirir formas de pensar, hábitos de perseverancia y curiosidad, y confianza en situaciones no familiares que les servirán fuera de la clase. Ser un buen resolutor de problemas proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo.

La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas, y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina. Debería concernir a las cinco áreas de contenidos descritas en estos Estándares. Los contextos de los problemas pueden variar desde las experiencias familiares o escolares del alumnado a las aplicaciones científicas o del mundo laboral. Los buenos problemas deberán integrar múltiples temas e involucrar matemáticas significativas.

Estándar de resolución de problemas

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas;
- resolver problemas que surjan de las matemáticas T de otros contextos;
- aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas;
- controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos v reflexionar sobre él.

Construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas

¿Cómo puede la resolución de problemas ayudar a aprender matemáticas? Los buenos problemas les dan oportunidad de solidificar y ampliar lo que conocen y, si están bien elegidos, pueden estimular el aprendizaje de las matemáticas. Con los niños, puede introducirse la mayoría de los conceptos matemáticos a través de problemas que surjan de su propio mundo. Por ejemplo, supóngase que alumnos del segundo nivel quisieran averiguar si hay más chicos o más chicas en el cuarto nivel. Para resolver este problema necesitarían aprender a recoger información, anotar los datos y hacer sumas de varios números con seguridad. En los niveles medios, podría introducirse el concepto de proporción mediante una investigación para la que se dan a los alumnos recetas de refresco que necesitan cantidades diferentes de agua y zumo de frutas, y se les pide que determinen cuál es el más rico en fruta, el más "afrutado". Como las recetas tienen diferentes cantidades de zumo, el problema resulta difícil si no se tiene un conocimiento de la proporcionalidad. Cuando se tratan diversas ideas con buenas preguntas y la guía del profesor, los alumnos llegan, con el tiempo, a usar las proporciones. En la enseñanza secundaria, pueden introducirse muchas de las áreas del currículo mediante problemas de contextos matemáticos o de aplicaciones.

La resolución de problemas puede y debería utilizarse para ayudar a los estudiantes a desarrollar fluidez con destrezas específicas. Por ejemplo considérese el siguiente problema, tomado de *Curriculum and Evaluación Standard for School Mathematics* (NCTM 1989, p. 24):

 Publicat pel *creamat* amb l'autorització de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES
(es pot adquirir el llibre a la web http://thales.cica.es/)

> Tengo *pennies*, *nickels* y *dimes*[1] en el bolsillo. Si saco tres monedas, ¿cuánto dinero puedo haber sacado?

Para resolver este problema, los niños necesitan conocer el valor de: cada una de las monedas y algo sobre la adición. El trabajo con problemas como éste proporciona una buena práctica con dicha operación, pero el objetivo matemático importante es ayudar a los niños a pensar sistemáticamente sobre las posibilidades que ofrece, y a organizar y registrar su pensamiento y, para ello, no debe esperarse a que sumen con soltura.

El papel del profesor en la elección de tareas y problemas matemáticos importantes es crucial. Si al analizar y preparar un problema, se prevén las ideas matemáticas que puedan extraerse al trabajar con él y las preguntas de los alumnos, los profesores pueden decidir si el problema en cuestión ayudará a favorecer sus objetivos matemáticos para la clase. Hay muchos problemas que son interesantes y divertidos, pero que no conducen al desarrollo de ideas matemáticas importantes para una clase en un momento determinado. La elección atinada de problemas y el empleo y adaptación de problemas a partir de materiales, es una parte difícil de la enseñanza de las matemáticas.

El papel del profesor en la elección de tareas y problemas matemáticos es crucial.

Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos

Se dice que las personas que ven el mundo matemáticamente tienen: "predisposición para las matemáticas". Los buenos resolutores de problemas tienden naturalmente a analizar las situaciones cuidadosamente en términos matemáticos, y a proponer problemas basados en las situaciones que ven. Primero consideran casos sencillos, pero pronto pasan a hacer un análisis más complejo. Por ejemplo, se presentan datos a alumnos de niveles medios sobre dos compañías de ambulancias y se: pregunta qué compañía es más digna de confianza (*Balanced Assessmc for the Mathematics Curriculum 1999a*). Una respuesta rápida, hallada: considerando el tiempo medio que tienen que esperar los clientes por cada compañía, resulta engañosa. Un análisis más cuidadoso, teniendo en cuenta el tiempo de respuesta con relación al momento del día. revela una solución diferente. En este trabajo, una disposición a analizar con mayor profundidad lleva a una comprensión más completa de la situación y a una solución correcta. A lo largo de la escolaridad, los profesores pueden contribuir a que se dé esta disposición, haciendo preguntas que ayuden a sus alumnos a encontrar matemáticas en su mundo y en sus experiencias, y animándoles a persistir mediante problemas interesantes pero estimulantes.

Plantearse problemas es algo natural en los niños: ¿Cuánto se tardaría en contar hasta un millón? ¿Cuántas latas de refresco harían falta para llenar el edificio de la escuela? Los profesores y los padres pueden favorecer esta inclinación ayudando a los niños a que propongan problemas a partir de su entorno. Es importante lo que pueden hacer - profesores para desarrollar la disposición de los alumnos para la resolución de problemas, creando y manteniendo un ambiente de clase que desde Prekindergarten, les anime a explorar, arriesgarse, compartir fracasos y éxitos y preguntarse unos a otros. En tal ambiente de apoyo, los alumnos adquirirán confianza en sus capacidades, voluntad para comprometerse y explorar problemas; los propondrán y serán perseverantes en la búsqueda de soluciones.

(1) Los *Pennies*, *Nickels* y *Dimes* son, respectivamente, monedas de 1, 5 Y 10 centavos de dólar.

Aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas

De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas puede encontrarse en el trabajo de Pólya (1957). Estas estrategias, frecuentemente citadas, incluyen: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problema más sencillo. Es obvio preguntarse: ¿cómo se pueden enseñar estas estrategias?, ¿deberían recibir atención explícita?, ¿cómo deberían integrarse en el currículo de matemáticas? Como en el caso de cualquier otro componente del conjunto de herramientas matemáticas, las estrategias tienen que recibir atención docente si se espera que los alumnos las aprendan. En los primeros niveles, los profesores pueden ayudar a los niños a expresar, clasificar y comparar sus estrategias.

Las oportunidades para utilizar las estrategias tienen que insertarse naturalmente en el currículo a través de las áreas de contenidos. Cuando los alumnos llegan a los niveles medios, deberían ser diestros en reconocer cuándo es apropiado usar diversas estrategias y ser capaces de decidir cuándo y cómo usadas. En la escuela secundaria, deberían tener acceso a una gama amplia de estrategias, saber decidir cuál usar y ser capaces de adaptar e inventar otras.

La oportunidades para utilizar estrategias tienen que insertarse naturalmente en el currículo a través de las áreas de contenidos.

Las primeras experiencias de los niños con las matemáticas tienen lugar a través de la resolución de problemas. A medida que experimentan con una más amplia variedad de problemas, necesitan diferentes estrategias. Tienen que llegar ser conscientes de estas estrategias a medida que se presenta la necesidad de empleadas. Y, a medida que se modelizan durante las actividades de clase, los profesores deberían animarlos para que tomen nota de ellas. Por ejemplo, después de que un alumno ha compartido una solución y el modo en que la ha obtenido, el profesor podría identificar la estrategia utilizada diciendo: "Parece que has hecho una lista ordenada para encontrar la solución. ¿Alguno ha resuelto el problema de otra manera?" Esta verbalización contribuye desarrollar un lenguaje y unas representaciones comunes, y ayuda a los alumnos a entender lo que hizo el primero. Tal discusión también sugiere que ninguna estrategia se aprende de una vez para siempre; las estrategias se aprenden con el paso del tiempo, se aplican en contextos particulares, y llegan a ser más refinadas, elaboradas y flexibles según se van utilizando en problemas de complejidad creciente.

Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él

Los resolutores eficientes de problemas controlan y ajustan constantemente lo que están haciendo. Se aseguran de que entienden el problema. Si el problema está escrito, lo leen cuidadosamente; si se les plantea oralmente, hacen preguntas hasta entenderlo. Con frecuencia, se trazan un plan. Periódicamente, evalúan sus progresos para ver si están en el buen camino. Si consideran que no están progresando, se detienen para considerar otras alternativas y no dudan en hacer un enfoque totalmente distinto. Las investigaciones (Garofalo y Lester 1985; Schoenfeld 1987) indican que, muchas veces, los fallos de los estudiantes en la resolución de problemas no se deben a falta de conocimientos matemáticos, sino a un uso ineficaz de lo que saben.

Los buenos resolutores de problemas llegan a ser conscientes de lo que están haciendo y comprueban con frecuencia sus progresos, se autoevalúan, a medida que enfocan y resuelven los problemas (Brandsford e al. 1999). Tales capacidades reflexivas (llamadas *metacognición*) es más probable que se desarrollen en un ambiente de clase que las apoye. Los profesores pueden contribuir de manera importante al desarrollo de estos hábitos mentales mediante preguntas como las que siguen: "Antes de seguir adelante, ¿estamos seguros de que entendemos esto? ¿Cuáles son nuestras opciones? ¿Tenemos un plan? ¿Estamos progresando, o deberíamos reconsiderar lo que estamos haciendo? ¿Por qué creemos que esto es verdad? Tales preguntas ayudan a los alumnos a acostumbrarse a comprobar sus logros según avanzan, hábito que debería empezar a adquirirse en los niveles más bajos. Si los profesores mantienen un ambiente en el que el desarrollo de la comprensión es consistentemente controlado mediante la reflexión, es más probable que los alumnos, cuando resuelven problemas, aprendan a responsabilizarse de reflexionar sobre su trabajo y a hacer los ajustes necesarios.

Razonamiento y demostración

El razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Las personas que razonan y piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades, tanto en situaciones del mundo real como en objetos simbólicos; se preguntan si esos patrones son accidentales o si hay razones para que aparezcan, y conjeturan y demuestran. Una demostración matemática es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y de justificación.

Una demostración matemática es una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y de justificación

Para entender las matemáticas es esencial ser capaz de razonar.

Desarrollando ideas, explorando fenómenos, justificando resultados y usando conjeturas matemáticas en todas las áreas de contenidos y, con diferentes expectativas de complejidad, en todos los niveles, los estudiantes deberían ver que las matemáticas tienen sentido, y esperar que lo tengan. Basándose en la considerable capacidad de razonamiento con que los niños llegan a la escuela, los profesores pueden ayudarles a aprender lo que supone el razonamiento matemático. Al final de la escuela secundaria, los alumnos deberían estar capacitados para comprender y elaborar demostraciones matemáticas, es decir, argumentos que consisten en deducciones o conclusiones lógicamente rigurosas a partir de hipótesis, y deberían apreciar el valor de tales argumentos.

Estándar de razonamiento y demostración

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas; resolver problemas que surjan de las matemáticas T de otros contextos;
- formular e investigar conjeturas matemáticas;
- desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones;
- elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración.

El razonamiento y la demostración no pueden enseñarse, por ejemplo, en una simple unidad sobre lógica, o "haciendo demostraciones" en Geometría. La demostración es un tema difícil para los alumnos universitarios. Quizás esta dificultad radica en que su única experiencia en demostraciones escritas es la de un curso de Geometría en Secundaria, por lo que tienen una perspectiva limitada (Moore 1994). El razonamiento y la demostración deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática durante toda la escolaridad. Razonar matemáticamente es un hábito mental y, como todo hábito, ha de desarrollarse mediante un uso coherente en muchos contextos.

Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas

Desde que los niños tienen las primeras experiencias con las matemáticas, es importante ayudarles a entender que siempre hay que razonar las afirmaciones que se hagan. Mediante preguntas como" ¿por qué crees que verdad?", "¿alguno cree que la respuesta es otra?", "¿por qué piensas así?", se les ayuda a que vean que las aseveraciones requieren ser sustentadas o refutadas con pruebas. Los niños pueden querer apelar a otros en apoyo de sus razones ("mi hermana me lo dijo") o, incluso, votar para determinar la mejor explicación, pero necesitan aprender y estar de acuerdo sobre lo que es aceptable como un argumento apropiado en la clase de matemáticas.

1 Publicat pel *creamat* amb l'autorització de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES (es pot adquirir el llibre a la web http://thales.cica.es/)

Estos son los primeros pasos para que lleguen a darse cuenta de que el razonamiento matemático se basa en supuestos y reglas específicos.

Parte de la belleza de las matemáticas radica en que, cuando ocurren cosas interesantes, generalmente hay una buena razón para ello. Los alumnos deberían comprender esto. Considérese, por ejemplo, el siguiente "truco mágico", que podría encontrarse en un libro de matemáticas recreativas:

> “Escribe tu edad. Añádele 5. Multiplica el resultado por 2. Añade 10 al número obtenido. Multiplica la suma por 5. Si me dices el resultado final puedo decirte qué edad tienes.”

El procedimiento que ha de seguirse es: Suprimir el cero final del número resultante y restar 10. ¿Por qué? Los alumnos de todos los niveles pueden explorar y explicar problemas semejantes.

El razonamiento sistemático es una de las características que definen a las matemáticas. Se encuentra en todos los contenidos y, con distintos grados de rigor, en todos los niveles. Por ejemplo, los niños de los primeros niveles pueden advertir la alternancia de los números impares y pares; los del tercer nivel pueden conjeturar -y quizás justificar informalmente, mediante plegado de papel- que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares; en los niveles medios pueden determinar probabilidad de que resulte un producto par o impar cuando se lanzan al aire dos dados y se multiplican los números que salen; en la escuela secundaria podría pedirse considerar qué le ocurre a un coeficiente de correlación en una transformación lineal de las variables.

Formular e investigar conjeturas matemáticas

Hacer matemáticas implica descubrir, y la conjetura es el principal camino para el descubrimiento. Los profesores y los investigadores están de acuerdo en que los estudiantes pueden aprender a formular perfeccionar y comprobar conjeturas en la escuela elemental. Desde los primeros años, los profesores pueden contribuir a este aprendizaje mediante preguntas como: ¿Qué crees que ocurrirá ahora? ¿Cuál es el patrón? ¿Esto es siempre verdad? ¿Es verdad algunas veces? Sencillos cambios en la propuesta de tareas pueden ayudar a los alumnos a aprender a conjeturar. Por ejemplo, en lugar de decir "comprueba que cuando los valores de un conjunto de datos se duplican, se duplica la media", el profesor puede decir "supón que todos los valores de una muestra se duplican; ¿qué cambio, si es que hay alguno, experimenta la media de la muestra?; ¿por qué?" Se podría pedir a los alumnos de la escuela secundaria que, por medio de programas de geometría dinámica, hagan observaciones sobre la figura que se forma uniendo sucesivamente los puntos medios de los lados de un paralelogramo, y que traten de comprobarlas. Los alumnos necesitan múltiples oportunidades para formular conjeturas, y contextos de aprendizaje ricos y atractivos.

La conjetura es el principal camino para el descubrimiento

Los niños expresan sus conjeturas y describen lo que piensan con sus propias palabras y, con frecuencia, las exploran usando materiales concretos y ejemplos. Los alumnos de todos los niveles deberían aprender a investigar sus conjeturas por medio de materiales concretos, calculadoras y otras herramientas y, de forma creciente, según avanzan en su escolaridad, mediante representaciones y símbolos. También necesitan aprender a trabajar en grupos, para formular y explorar sus conjeturas y escuchar y entender las conjeturas y explicaciones de sus compañeros.

Los profesores pueden ayudar a los alumnos en la revisión de conjeturas, para que vean si lo que se cumple en un determinado contexto se verifica o no en otro. Por ejemplo, la idea de que "la multiplicación hace mayor" es completamente apropiada para los niños cuando están trabajando con números naturales mayores que la unidad, pero cuando empiezan a hacerlo con fracciones, esta conjetura necesita ser revisada.

Los estudiantes no tienen siempre el conocimiento matemático y las herramientas que se necesitan para justificar una conjetura, o un contraejemplo para refutarla. Por ejemplo, con la base de su trabajo con calculadoras gráficas, los alumnos de enseñanza secundaria podrían convencerse de que si una función polinómica tiene un valor mayor que O y un valor menor que O, cortará al eje de abscisas en algún punto. Los profesores pueden advertir que una demostración rigurosa requiere más conocimientos que los que la mayoría de los alumnos posee.

Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones

Junto con establecer e investigar conjeturas, los estudiantes deberían aprender a contestar la pregunta ¿por qué funciona esto? Los niños de los primeros niveles tenderán a justificar afirmaciones generales mediante casos específicos. Por ejemplo, podrían representar el número impar 9 como en la figura 3.5 y observar que "un número impar es algo que tiene un uno sobrante" (Ball y Bass, próxima aparición, p 33). Y; entonces, podrían razonar que cualquier número impar tendrá una unidad "extra" y, por eso, cuando se suman dos números impares, las dos unidades "extra" formarán una pareja y resultará un número par, sin unidades 'extra". En los últimos niveles elementales, las justificaciones deberían ser más generales y pueden dar lugar a otros resultados matemáticos. Partiendo del hecho de que dos figuras congruentes tiene igual área, un alumno de quinto nivel podría afirmar que un determinado triángulo y un rectángulo tienen la misma área, porque cada uno de ellos se formó dividiendo por la mitad dos rectángulos congruentes. Debería esperarse que en la escuela secundaria los alumnos construyan cadenas de razonamiento relativamente complejas y proporcionen argumentos matemáticos. Para ayudar a desarrollar y justificar conjeturas más generales y, también, a refutar conjeturas, los profesores pueden preguntar: ¿funciona siempre?, ¿algunas veces?, ¿nunca?, ¿por qué? Esta extensión a casos generales conduce a un conocimiento matemático más complejo que podría ir aumentando a través de los niveles.

Fig. ***3.5.***

Una representación de 9 como número impar

Los estudiantes pueden aprender a razonar a través de la discusión de las argumentaciones de los compañeros. La afirmación "si un número es divisible por 6 y por 4, entonces es divisible por 24", podría examinarse de varias formas. Los alumnos de los niveles medios podrían encontrar un contraejemplo: el número 12 es divisible por 6 y por 4 y no lo es por 24. Los de Secundaria, podrían formular una conjetura relativa a los números primos que podrían justificar. O podrían explorar lo contrario. En todo caso, tanto los argumentos plausibles como los deficientes que aportan los alumnos, dan oportunidad para la discusión. Según van avanzando a través de los niveles, deberían comparar sus ideas con las de los demás, lo que puede servirles para modificar, consolidar o ampliar sus argumentos o su razonamiento. En las clases en las que se anima a los alumnos a exponer lo que piensan y en las que cada uno contribuye a evaluar el pensamiento de otros, se proporciona un rico ambiente para el aprendizaje del razonamiento matemático.

Las explicaciones de los niños serán en su propio lenguaje y, con frecuencia, se presentarán verbalmente o mediante objetos. Los estudiantes pueden aprender a estructurar su razonamiento exponiendo lo que piensan a sus compañeros de clase o a otras personas. En Secundaria deberían ser capaces de presentar por escrito sus argumentos, de una forma que podría ser aceptable por los matemáticos profesionales. El formato particular de una justificación o demostración matemática, sea un argumento narrativo, una demostración formalizada o un argumento visual es menos importante que una clara y correcta comunicación de ideas matemáticas adecuada al nivel de los alumnos.

Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración

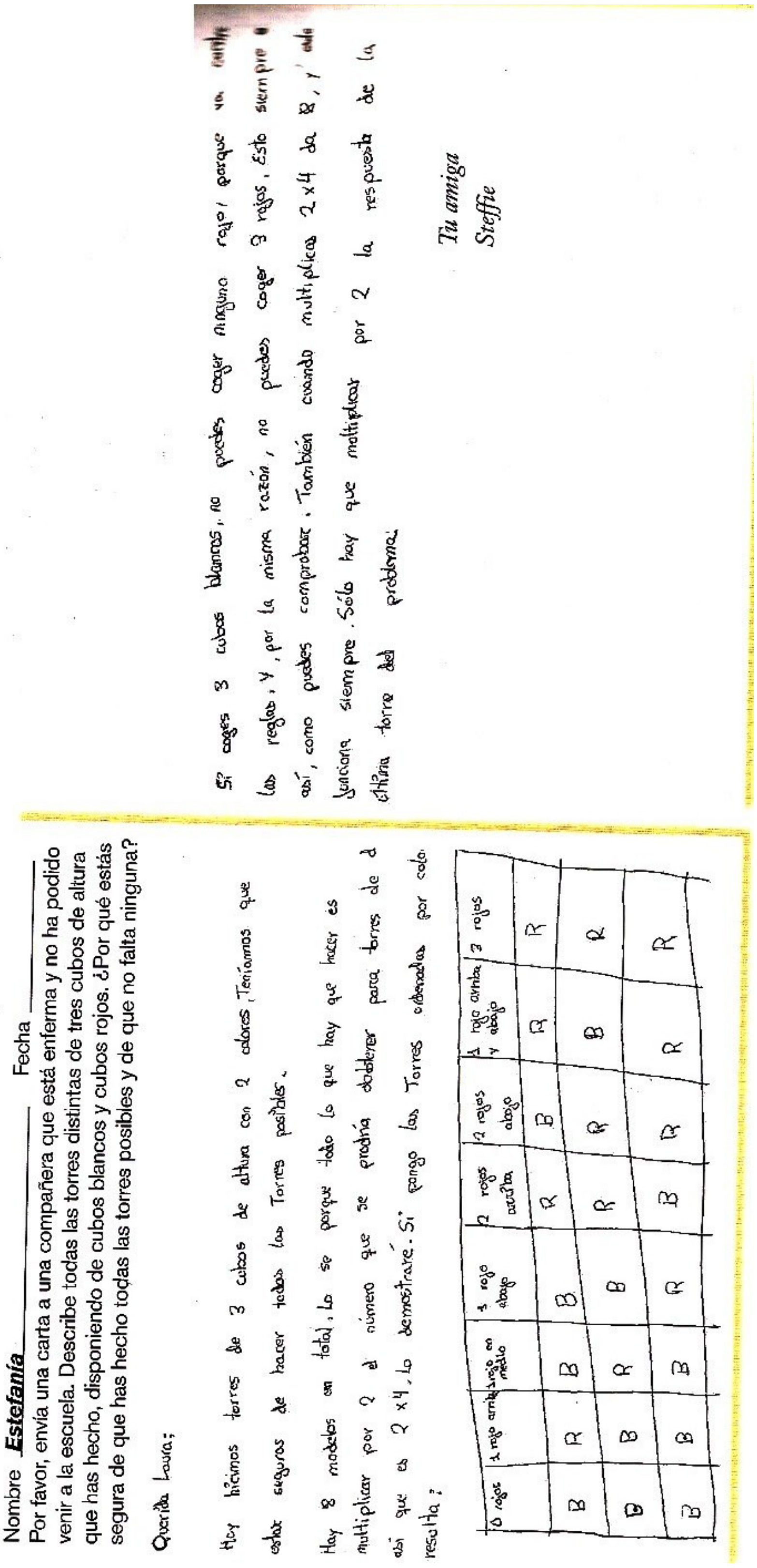
En los primeros niveles, el razonamiento que aprenden y utilizan le niños en las clases de matemáticas es informal comparado con la deducción lógica de los matemáticos. A través de los años de enseñanza, a medida que los profesores ayudan a los alumnos en el aprendizaje de las normas de la justificación y la demostración matemáticas, debería aumentar el repertorio de tipos de razonamiento (algebraico, geométrico, proporcional, probabilístico, estadístico, etc.). Los estudiantes necesitan encontrarse y ser competentes con todos ellos, creciendo en complejidad, según avanzan en el currículo.

Debería incitarse a los niños a que razonen a partir de lo que conocen. Un niño que resuelve el problema 6 + 7 calculando 6 + 6 y añadiendo luego 1, recurre a su conocimiento de sumar parejas, de añadir 1 y de la asociatividad. Puede enseñarse a los alumnos cómo hacer explícitos los conocimientos que utilizan cuando crean argumentos y justificaciones.

Las primeras tentativas de los niños en la justificación implican estrategias de ensayo y error o el tratamiento no sistemático de muchos casos. Con orientación y muchas oportunidades para explorar, los alumnos de los últimos niveles elementales pueden aprender cómo ser sistemáticos en sus exploraciones, saber si han considerado todos los casos posibles y crear argumentos mediante el análisis de los casos. Un estudio de investigación (Maher y Martino 1996, p.195) con alumnos de quinto nivel, informa sobre una elegante demostración, analizando casos como respuesta al problema de la figura 3.6.

Demostrar por contradicción es también posible con los niños. Un alumno de primer nivel argumentaba, por su conocimiento de los patrones de números naturales, que el número 0 es par. Decía: "Si 0 fuera impar, entonces 0 y 1 serían dos números impares en una fila. Los números pares e impares alternan. Por eso 0 tiene que ser par". Empezando en los niveles elementales, los niños pueden aprender a refutar conjeturas por medio de contraejemplos. En todos los niveles, los estudiantes razonarán inductivamente a partir de patrones y casos determinados. De forma creciente a través de los niveles, deberían aprender también a hacer efectivos argumentos deductivos basados en las verdades matemáticas que establecen en clase.

Fig. 3.6
La elegante "prueba por casos" de Stephanie, alumna del 5º nivel (de Maher y Martino, 1996)



Nombre **Estefanía** Fecha ____________

Por favor, envía una carta a una compañera que está enferma y no ha podido venir a la escuela. Describe todas las torres distintas de tres cubos de altura que has hecho, disponiendo de cubos blancos y cubos rojos. ¿Por qué estás segura de que has hecho todas las torres posibles y de que no falta ninguna?

Querida Laura;

Hoy hicimos torres de 3 cubos de altura con 2 colores, Teníamos que estar seguros de hacer todas las Torres posibles.

Hay 8 modelos en total, Lo se porque todo lo que hay que hacer es multiplicar por 2 el número que se prodría dobleter para torres de 2 así que es 2 x 4, Lo demostraré. Si pongo las Torres ordenadas por colo resulta;

0 rojos	1 rojo arriba	1 rojo en medio	1 rojo abajo	2 rojos arriba	2 rojos abajo	1 rojo arriba y abajo	3 rojos
B	R	B	B	R	B	R	R
B	B	R	B	R	R	B	R
B	B	B	R	B	R	R	R

Si coges 3 cubos blancos, no puedes coger ninguno rojo, porque va contra las reglas, y, por la misma razón, no puedes coger 3 rojos. Esto siempre es así, como puedes comprobar. También cuando multiplicas 2 x 4 da 8, y cada funciona siempre. Sólo hay que multiplicar por 2 la respuesta de la última torre del problema.

Tu amiga
Steffie

Comunicación

La comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática. Es un camino para compartir y aclarar las ideas. A través de la comunicación, las ideas llegan a ser objeto de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. El proceso de comunicación ayuda también a dar significado y permanencia a las ideas y a hacerlas públicas. Cuando se estimula a los estudiantes a pensar y razonar acerca de las matemáticas y a comunicar a otros los resultados de su pensamiento, oralmente o por escrito, aprenden a ser claros y convincentes.

La comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática.

Escuchar las explicaciones de los demás les da oportunidades de desarrollar su comprensión. Las conversaciones en las que se exploran las ideas matemáticas desde diversas perspectivas, ayudan a los participantes a compartir lo que piensan y a hacer conexiones. Los alumnos que se involucran en discusiones para justificar soluciones, especialmente cuando hay desacuerdo, llegarán a una mejor comprensión matemática a medida que intentan convencer a sus compañeros sobre los diferentes puntos: vista (Batano y Inagaki 1991). Esta actividad contribuye también al de desarrollo de un lenguaje para expresar las ideas matemáticas, y a apreciar la necesidad de la precisión en este lenguaje. Los alumnos que tienen oportunidades, incentivo y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas, se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas, y aprenden a comunicar matemáticamente.

Debido a que las matemáticas se expresan con tanta frecuencia mediante símbolos, la comunicación oral y escrita de las ideas matemáticas no es siempre reconocida como una parte importante de la educación matemática. Los alumnos no hablan necesariamente con naturalidad sobre matemáticas; es necesario que los profesores les ayuden a aprender cómo hacerlo (Cobb, Wood y Yackel 1994). Según van avanzando en sus estudios, deberían ser más complejas y abstractas las matemáticas que comunican. El repertorio de herramientas y procedimientos de comunicación, así como el razonamiento matemático que sustenta su comunicación debería ser cada vez más complejo. El apoyo es vital para los alumnos. Los que no tienen el inglés como lengua materna, pueden necesitar alguna ayuda a adicional para beneficiarse de una comunicación rica en las clases de matemáticas, pero pueden participar plenamente si las actividades en el aula están estructuradas adecuadamente (Silver, Smith y Nelson 1995).

Los alumnos necesitan trabajar en tareas matemáticas que constituyan temas útiles de discusión. Las tareas procedimentales, para las que se espera que tengan bien desarrollados los algoritmos necesarios, generalmente no son buenas candidatas. Los problemas interesantes que "lleven a alguna parte" matemáticamente, pueden ser muchas veces catalizadores de conversaciones enriquecedoras. La tecnología es otra buena base para la comunicación. Cuando los estudiantes generan y examinan números u objetos en la calculadora o en la pantalla del ordenador, tienen un referente común, y con frecuencia fácilmente modificable, para la discusión, de ideas matemáticas.

Estándar de comunicación

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación;
- comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas;
- analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemáticos de los demás;
- usar el lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas.

Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación

Los estudiantes ganan perspicacia en su pensamiento cuando presentan sus métodos para resolver problemas, justifican su razonamiento a un compañero o al profesor o cuando hacen preguntas sobre algo que es extraño para ellos. La comunicación puede apoyar el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, cuando escenifican una situación, dibujan, utilizan objetos, dan justificaciones o explicaciones verbalmente, utilizan diagramas, escriben y usan símbolos matemáticos. Los conceptos erróneos pueden identificarse y tratarse. Un beneficio adicional es que esto recuerda a los alumnos que ellos comparten la responsabilidad en el aprendizaje con el profesor (Silver, Kilpatrick y Schlesinger 1990).

La reflexión y la comunicación son procesos entrelazados en el aprendizaje de las matemáticas.

La reflexión y la comunicación son procesos entrelazados en el aprendizaje de las matemáticas. Con la atención explícita y la planificación de los profesores, la comunicación con propósitos de reflexión puede llegar a ser una parte natural de dicho aprendizaje. Los niños de los primeros niveles, por ejemplo, pueden aprender a explicar sus respuestas y a describir sus estrategias. A los jóvenes se les puede pedir que "piensen en alta voz", y meditar las preguntas propuestas por el profesor o un compañero puede ocasionar que reconsideren su razonamiento. Con la experiencia, los estudiantes lograrán ser competentes para organizar y registrar su pensamiento.
Escribir en matemáticas puede también ayudar a los alumnos a consolidar lo que piensan, ya que requiere reflexionar sobre su trabajo y aclarar sus ideas sobre las nociones desarrolladas en la lección. Más tarde, pueden encontrarlo útil para releer el registro de sus propios pensamientos.

Comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas

Para que un resultado matemático se reconozca como correcto, la demostración que se proponga tiene que ser aceptada por la comunidad de matemáticos profesionales. Los estudiantes necesitan oportunidades para poner a prueba sus ideas, sobre la base de un conocimiento compartido con la comunidad matemática de la clase, para ver si pueden ser entendidas y si ellos son suficientemente convincentes. Cuando estas ideas se exponen públicamente, los alumnos pueden beneficiarse de participar en la discusión y el profesor puede controlar su aprendizaje (Lampert 1990). Aprender lo que es aceptable en matemáticas como prueba debería ser un objetivo educativo en todas las etapas.

Debería desarrollarse la comunicación escrita

Para apoyar con eficacia el discurso en el aula, los profesores tienen que propiciar un ambiente en el que los alumnos se sientan libres para expresar sus ideas. Los alumnos de los niveles más bajos necesitan la ayuda de los profesores para compartir sus ideas matemáticas con los demás, de manera que sean suficientemente claras para ser comprendidas. En estos niveles, aprender a ver las cosas desde los puntos de vista de otros constituye un desafío para los niños. Durante la etapa 3-5, los estudiantes deberían irse responsabilizando gradualmente de participar en las discusiones de toda la clase y de responder directamente a otro. Deberían llegar a ser mejores al escuchar, parafrasear, cuestionar e interpretar las ideas ajenas. Para algunos estudiantes, participar en las discusiones de clase es un reto.

Por ejemplo, en los niveles medios muchas veces son reacios a destacar de alguna manera durante las interacciones de grupo. Pese a esto, los profesores pueden tener éxito al crear ricos ambientes de comunicación en sus clases. Cuando los alumnos hayan terminado la enseñanza secundaria, deberían haber interiorizado normas para dialogar y argumentar, que les ayuden siempre en la presentación de argumentos claros y completos, y a trabajar para clarificarlos y completarlos cuando sea necesario. La modelización y las preguntas cuidadosamente propuestas pueden ayudarles a lograrlo.

La comunicación escrita debería desarrollarse de modo semejante. Los niños empiezan en la escuela con poca destreza en la escritura. En los primeros niveles, pueden contar con otros medios, como los dibujos para comunicar. Gradualmente, irán escribiendo palabras y frases. En la etapa 3 - 5, pueden continuar secuenciando ideas y añadiendo detalles, y sus escritos tendrían que llegar a ser más elaborados. En los niveles medios, deberían conseguir ser más explícitos en relación a lo que escriben para que tenga sentido para los lectores y mantenga un objetivo. Respecto a algunos propósitos, será apropiado que los estudiantes describan su pensamiento informalmente, utilizando el lenguaje ordinario y dibujos pero, a través de los niveles medios y la enseñanza secundaria, deberían también aprender a comunicar de manera más formal matemáticamente, usando la terminología matemática convencional. Al final de la escolaridad, deberían estar capacitados para escribir argumentos matemáticos bien construidos mediante un vocabulario formal.

Puede ser beneficioso en todos los niveles examinar y discutir textos matemáticos, incluso los dudosos. Puesto que las evaluaciones por escrito de los conocimientos matemáticos de los alumnos van siendo cada vez más frecuentes, necesitarán práctica para responder a las típicas evaluaciones puntuales. El proceso para aprender a escribir matemáticamente es similar al de aprendizaje de la escritura de cualquier tipo. Es importante la práctica con orientación. También lo es la atención a lo específico de los argumentos matemáticos, incluyendo el uso y los significados especiales del lenguaje matemático y las representaciones y normas de la explicación y la demostración.

Cuando los alumnos practican la comunicación deberían expresarse con más claridad y coherencia y, también, adquirir y reconocer los distintos estilos matemáticos de diálogo y argumentación. A través de las etapas, sus argumentos deberían llegar a ser cada vez más completos, y extraerse directamente de los conocimientos compartidos en la clase. Con el tiempo, cuando exponen sus ideas, deberían llegar a ser más conscientes y responsabilizarse de ser convincentes y comprendidos por la audiencia. Cuando maduren, su comunicación debería reflejar una creciente serie de formas de justificar sus procedimientos y resultados. En los primeros niveles, puede ser suficiente una prueba empírica o unos pocos ejemplos. Más tarde, deberían esperarse cadenas cortas de razonamiento basado en hechos previamente aceptados. En los niveles medios y en Secundaria, las explicaciones deberían llegar a ser cada vez más rigurosas matemáticamente y, de forma creciente, los alumnos deberían establecer las propiedades utilizadas para apoyar sus argumentos.

Analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias de los demás

El proceso de resolver problemas con otros alumnos es beneficioso. Con frecuencia, un alumno que tiene una manera de ver un problema puede sacar provecho de los puntos de vista de otro, que puede revelar un aspecto diferente del problema. Por ejemplo, los que tratan de resolver algebraicamente el problema que sigue (Krutetskii 1976, p. 121) tienen con frecuencia dificultades para resolver las ecuaciones, y se benefician de las ideas de los que lo enfocan mediante representaciones visuales.

> Hay unos conejos y algunas conejeras. Si se mete un conejo en cada conejera, quedará un conejo fuera. Si se meten dos conejos en cada conejera, quedará una vacía. ¿Cuántos conejos y cuántas conejeras hay?

Es difícil para los estudiantes aprender a considerar, evaluar y construir sobre el pensamiento de los otros, especialmente cuando éstos están todavía desarrollando su propia comprensión matemática. Un buen contexto en el que pueden compartir y analizar las estrategias propias y ajenas es el de la resolución de problemas aritméticos, donde las estrategias ideadas pueden llegar a ser objeto de discusión y crítica. Los alumnos tienen también que aprender a cuestionar y probar lo que piensan otros, para así clarificar las ideas poco desarrolladas. Por otra parte, ya que no todos los métodos tienen igual valor, tienen que aprender a examinar los métodos e ideas de los demás para determinar su potencia y sus limitaciones. Escuchando atentamente las afirmaciones hechas por otros y pensando acerca de ellas, los estudiantes aprenden a ser pensadores críticos sobre las matemáticas.

Usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión

Cuando los niños empiezan a estructurar su comprensión matemática, utilizan su lenguaje diario. Esto les proporciona una base para construir una conexión con el lenguaje matemático. Los profesores pueden ayudarles a ver que algunas palabras que se emplean en el lenguaje ordinario, tales como *semejante*, *factor*; *área* o *función*, tienen un significado diferente o más preciso en matemáticas. Esta observación constituye el principio básico para entender el concepto de definiciones matemáticas. Es importante que los alumnos tengan experiencias que les ayuden a apreciar el poder y la precisión del lenguaje matemático. A partir de los niveles medios, deberían entender el papel de las definiciones matemáticas y usarlas en sus trabajos de clase, y esto debería impregnar la escuela secundaria. Sin embargo, es importante evitar una prisa prematura por imponer el lenguaje matemático formal; los alumnos necesitan desarrollar un aprecio de la necesidad de las definiciones precisas y de la potencia comunicativa de los términos matemáticos convencionales a partir de la comunicación en sus propias palabras. Permitir que los estudiantes se enfrenten con sus ideas y desarrollen sus propios medios informales de expresarlas, puede ser un camino efectivo para fomentar la participación y el dominio.

Es importante evitar una prisa prematura por imponer el lenguaje matemático formal.

La tecnología ofrece otras oportunidades y retos para el desarrollo y el análisis del lenguaje. Los símbolos usados en una hoja de cálculo pueden tener relación con los símbolos algebraicos generalmente empleados por los matemáticos, pero no son los mismos. Los estudiantes se beneficiarán de las experiencias que requieren comparación de expresiones matemáticas estándar, con las usadas con herramientas como las calculadoras o las hojas de cálculo.

Conexiones

Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias. A través de una enseñanza que resalte la interrelación de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura sino que también se dan cuenta de su utilidad.

Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio. Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles. Para enfatizar las conexiones, los profesores tienen que conocer las necesidades de sus alumnos, así como las matemáticas que han estudiado en los cursos anteriores y las que estudiarán en los siguientes. Como se subraya en el Principio de aprendizaje, comprender implica hacer conexiones. Los profesores deberían construir sobre las experiencias previas de los alumnos, y no repetir lo que ya han hecho. Este planteamiento requiere que el alumnado sea responsable de lo que ha aprendido y utilice este conocimiento para entender y dar sentido a las ideas nuevas.

Estándar de comunicación

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas;
- comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente;
- reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.

Reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas

Al poner de relieve las conexiones matemáticas, los profesores pueden contribuir a que sus alumnos se dispongan a utilizarlas para resolver problemas, y no vean las matemáticas como un conjunto de conceptos y destrezas desconectados y aislados. Esta disposición puede potenciarse proponiendo preguntas guía como la siguiente: "¿Cómo se relaciona nuestro trabajo de hoy con triángulos semejantes, con la discusión de la semana pasada sobre dibujos a escala?". Los estudiantes necesitan ser expresamente conscientes de las conexiones matemáticas.

La noción de que los conceptos matemáticos están conectados debería impregnar las experiencias matemáticas escolares en todos los niveles. Antes de entrar a la escuela, las experiencias matemáticas de los niños no han sido separadas en categorías, y esta integración de las matemáticas en muchos contextos debería continuar en la escuela. Los niños pueden aprender a reconocer patrones matemáticos en los ritmos de las canciones que cantan, al identificar la forma hexagonal de un panal y al contar el número de veces que pueden saltar a la comba con éxito. Cuando pasan a la etapa 3-5, debe extenderse su actividad matemática a contextos más abstractos. Pueden empezar a ver las conexiones entre las operaciones aritméticas; comprender, por ejemplo, que la multiplicación puede considerarse una suma repetida. A medida que van viendo que las operaciones matemáticas pueden emplearse en contextos diferentes, pueden ir apreciando la abstracción de las

 Publicat pel *creamat* amb l'autorització de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES
(es pot adquirir el llibre a la web http://thales.cica.es/)

matemáticas. En los niveles 6-8, los alumnos deberían ver las matemáticas como una disciplina de ideas conectadas. La ideas matemáticas clave en los niveles medios están íntimamente conecta das entre sí, y las ideas sobre números racionales, proporcionalidad y relaciones lineales se extenderán a muchas de las actividades matemáticas y d la vida diaria. En la etapa 9-12, los alumnos no sólo aprenden a encontrar conexiones sino que aprenden a aprovecharlas, a usar las ideas sacadas de un contexto para resolver problemas en otro.
Durante toda la escolarización (Pre-K-12), los estudiantes deberían preguntarse rutinariamente "¿en qué se parece este problema, o este tema, a lo que he estudiado antes?" Desde el punto de vista de las conexiones, las ideas nuevas se consideran extensiones de las matemáticas anteriormente aprendidas. Los alumnos aprenden a utilizar lo que ya conocen, para abordar situaciones nuevas. En la escuela elemental, conectan su conocimiento de la sustracción de números naturales a la de decimales o fracciones. En los niveles medios, reconocen y conectan diversas representaciones de la misma idea matemática; por ejemplo, la razón que representa la tasa de cambio y la pendiente de una recta; los alumnos de la escuela secundaria conectan ideas de Álgebra y de Geometría.

Algunas actividades son especialmente productivas para describir conexiones matemáticas. Por ejemplo, la relación entre la circunferencia y su diámetro puede estudiarse empíricamente tomando las medidas de aquélla y éste en diversos objetos circulares. Los alumnos de los niveles medios podrían reunir y representar los datos de ambas variables, circunferencia (C) y diámetro (d). Procediendo así, pueden ver que todos los puntos resultantes están situados muy cerca de una recta que pasa por (0,0), lo que sugiere que la razón C/d es constante. Esta actividad generalmente conduce a un valor promedio de C/d entre 3' 1 y 3'2, una aproximación de π. Este problema requiere nociones de medida, Análisis de datos, Geometría, Algebra y Números.

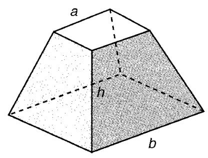
Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras para producir un todo coherente

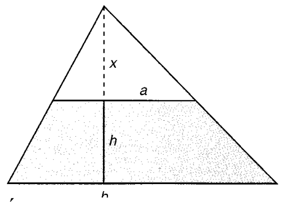
A medida que los estudiantes progresan a través de su experiencia con las matemáticas escolares, debería aumentar su habilidad para reconocer la misma estructura matemática en contextos aparentemente diferentes. Desde Prekindergarten al nivel2, reconocen casos respecto a contar, a los números y a las formas. Los alumnos mayores de la escuela elemental buscan ejemplos de operaciones aritméticas. En los niveles medios, se buscan respecto a los números racionales, la proporcionalidad y las relaciones lineales. Los estudiantes de Secundaria están ya preparados para buscar conexiones entre muchas de las nociones matemáticas con que se han ido encontrando. Por ejemplo, un método para hallar el volumen del tronco de pirámide cuadrangular de la figura 3.7, lo sugiere el método para calcular el área del trapecio que aparece debajo (Banchofff 1990, pp. 20-22).

Si los estudiantes adquieren una visión de las matemáticas como un todo conectado e integrado, disminuirá la tendencia a considerar por separado conceptos y destrezas. Si las estructuras conceptuales se enlazan con los procedimientos, no las percibirán como un conjunto arbitrario de reglas. Esta integración debería ser central en las

Fig. **3.7.**

Conexiones entre los métodos para hallar el volumen de un tronco de pirámide y para hallar el área de un trapecio





Área del triángulo pequeño

$$\frac{1}{2}ax$$

Área del triángulo grande

$$\frac{1}{2}b(x+h)$$

Área del trapecio

$$\frac{1}{2}b(x+h) - \frac{1}{2}ax$$

$$\frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}ax$$

Por semejanza de triángulos,

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$$

$$bx = a(x+h)$$

Área del trapecio

$$a(x+h) + \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}ax$$

$$\frac{1}{2}h(a+b)$$

matemáticas escolares.

Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos

Es importante que los estudiantes tengan la oportunidad de experimentar las Matemáticas en un contexto

Las experiencias matemáticas en todos los niveles deberían incluir oportunidades de aprender, trabajando en problemas que surjan de contextos no matemáticos. Tales conexiones pueden darse con temas de aras áreas o disciplinas, así como también con la vida diaria de los alumnos. Desde Prekindergarten al nivel 2, los niños pueden principalmente aprender matemáticas a través de las conexiones con el mundo real. En los niveles 3-5, deberían aprender a aplicar ideas matemáticas importantes a otras áreas. Este conjunto de ideas se amplia en la etapa 6-8 y, en la escuela secundaria, los estudiantes deberían usar matemáticas con seguridad para explicar aplicaciones complejas en el mundo exterior.

Es importante que los estudiantes tengan oportunidad de experimentar las Matemáticas en un contexto. Se utilizan en ciencias, ciencias sociales, medicina y en el comercio. La conexión entre matemáticas y ciencias no existe sólo en los contenidos, sino también en los procesos. Los procesos y contenidos científicos pueden inspirar un enfoque para resolver problemas aplicable al estudio de las matemáticas. En *National Science Education Standars* se describe una actividad en la escuela elemental, sobre el tiempo atmosférico, de un año de duración (National Research Council 1996, pp. 131-133). Las conexiones con las matemáticas en esta actividad son considerables: los alumnos diseñan instrumentos para medir las condiciones atmosféricas y planean cómo organizar y comunicar sus datos.

Steinberg (1998, p. 97) refiere el siguiente incidente en el que intervinieron alumnos del nivel 11 y la *CVS Corporation* en un trabajo para ubicar una nueva farmacia en un barrio de Boston:

> Aunque completamente conscientes de que la compañía no confiaría sólo en sus cálculos para tomar una decisión económica en cuanto a dónde situar el establecimiento, los estudiantes se consideraron envueltos en un problema real... Organizados en pequeños equipos de trabajo y con el apoyo de expertos de diversos departamentos de la organización CVS, analizaron datos demográficos y económicos, en diferentes barrios, para determinar la demanda de mercado de una farmacia CVS. Trabajaron con el personal de CVS para identificar y evaluar varios emplazamientos posibles de la nueva tienda... Colaboraron también con arquitectos para diseñar opciones, y con contables sobre planes de financiación.

El proyecto se trabajó en las clases de matemáticas y en las de humanidades. El alumnado vio las conexiones de las matemáticas cot el mundo del comercio y con otras disciplinas y, también, la interconexión de diversas áreas de las matemáticas.

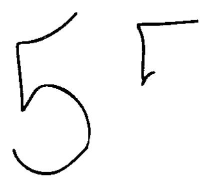
El Análisis de datos y la estadística son útiles para ayudar a los alumnos a clarificar cuestiones relativas a sus vidas. Los niños de la etapa Pre-K-2, al realizar actividades relativas al calendario, pueden recopilar datos sobre el tiempo, registrando los días lluviosos, nublados o soleados. Pueden registrar los datos, contar los días, generalizar respecto a las condiciones y hacer predicciones para el futuro. El alumnado de los niveles 3-S puede utilizar Internet para colaborar con compañeros de otras clases en la recogida y análisis de datos relativos a la lluvia ácida, la deforestación y otros fenómenos. En la etapa 9-12, los alumnos deberían ser capaces de usar su conocimiento del Análisis de datos y de los modelos matemáticos, para comprender los temas sociales y los problemas del mundo laboral con una profundidad razonable.

Representación

Para entender y utilizar las ideas matemáticas es fundamental la forma en que se representen. Considérese cuánto más difícil resulta la multiplicación con números romanos (para quienes no han trabajado extensamente con ellos), que utilizando el sistema decimal de numeración. Muchas de las representaciones que hoy nos parecen naturales, tales como los números expresados en el sistema decimal o en el binario, las fracciones, las expresiones algebraicas y las ecuaciones, las gráficas y las hojas de cálculo, son el resultado de un proceso cultural desarrollado a lo largo de muchos años. Cuando los estudiantes acceden a estas representaciones matemáticas y a las ideas que representan, toman posesión de un conjunto de instrumentos que amplían de forma significativa su capacidad para pensar matemáticamente.

El término *representación* se refiere tanto al proceso como al producto (resultado), esto es, al acto de captar un concepto matemático o una relación en una forma determinada y a la forma en sí misma. El niño que escribió su edad como se muestra en la figura 3.8 usó una representación. La gráfica de $f(x) = x^3$ es una representación. Por otra parte, el término se aplica a los procesos y a los productos observables externamente y, también, a los que tienen lugar "internamente", en las mentes de los que están haciendo matemáticas. Es importante considerar todos estos significados de representación.

Fig. **3.8.**
Una representación de cinco y medio de un niño.



Algunas formas de representación, como los diagramas, las gráficas y las expresiones simbólicas, han sido parte considerable de las matemáticas escolares. Desafortunadamente, estas y otras representaciones se han enseñado y aprendido con frecuencia como si constituyeran fines en sí mismas. Las representaciones deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticos, para que los alumnos se comuniquen sus enfoques, argumentos y conocimientos, para reconocer las conexiones entre conceptos matemáticos y para aplicar las matemáticas a problemas reales a través de la modelización. Las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología electrónica crean la necesidad de una atención, incluso mayor, a la representación.

Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas

Los estudiantes deberían comprender que las representaciones escritas de ideas matemáticas son una parte esencial del aprendizaje y el uso de las matemáticas. Es importante animar a los alumnos a que representen sus ideas de manera que tengan sentido para ellos, incluso si las primeras representaciones no son las convencionales. También lo es que aprendan estas formas convencionales, para así facilitar tanto el aprendizaje de la disciplina como la comunicación de ideas matemáticas.

El hecho de que las representaciones sean herramientas tan eficaces puede ocultar lo difícil que ha sido desarrollarlas y, lo que es más importante, cuánto trabajo lleva entenderlas. Por ejemplo, la notación en base diez resulta difícil a los niños, y el currículo debería ofrecer muchas oportunidades para hacer conexiones entre su comprensión del conteo y la estructura de la representación del sistema decimal. Pero a medida que los estudiantes avanzan en el currículo, el enfoque tiende a ser, cada vez más, la presentación de las matemáticas en sí. Esto sucede quizás bajo el supuesto de que tienen suficiente edad para pensar en términos formales aunque no lo hacen, igual que ocurre con los más jóvenes; ambos necesitan ajustar sus concepciones sencillas a los formalismos matemáticos. Las investigaciones indican, sin embargo, que los estudiantes de todos los niveles necesitan trabajar para desarrollar su comprensión de las complejas ideas encerradas en las representaciones convencionales. Una representación tan aparentemente clara como la variable x puede resultar difícil de entender para los alumnos.

Las características representaciones que hacen los estudiantes cuando resuelven problemas e investigan ideas matemáticas, pueden jugar un importante papel ayudándoles a comprender y resolver los problemas y proporcionándoles modos útiles de registrar un método de resolución y de describirlo a los demás. Examinando estas representaciones los profesores pueden extraer ideas útiles sobre las formas de interpretar y pensar de sus alumnos acerca de las matemáticas. Pueden tender puentes entre las representaciones personales de éstas y las más convencionales. Es importante que los alumnos tengan oportunidades no sólo de aprender las formas convencionales de representación, sino también de construir, perfeccionar y usar sus propias representaciones como herramientas para apoyar el aprendizaje y hacer matemáticas.

A lo largo de los niveles medios, las representaciones matemáticas de los estudiantes son usualmente sobre objetos y acciones de su experiencia directa. Los de la enseñanza primaría podrían usar objetos para representar el número de ruedas de cuatro bicicletas o el número de luciérnagas en un cuento. Pueden representar números mayores de objetos por medio de bloques lógicos, por ejemplo. En los niveles medios, pueden empezar a crear y utilizar representaciones matemáticas de objetos más abstractos, como números racionales, proporciones o relaciones lineales. Los alumnos de Secundaria deberían usar representaciones convencionales como medios fundamentales para expresar y comprender conceptos matemáticos más abstractos. A través de sus representaciones, deberían estar

Estándar de representación

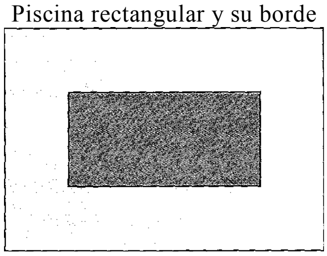
Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas;
- Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas;
- Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

capacitados para encontrar una estructura común en fenómenos provenientes de contextos muy distintos,.

Las representaciones pueden ayudar a los estudiantes a organizar su pensamiento; a hacer las ideas matemáticas más concretas y asequibles a la reflexión. En los niveles inferiores, por ejemplo, los niños pueden utilizarlas para proporcionar al profesor y a los compañeros un registro de sus esfuerzos para entender las matemáticas. En los niveles medios, deberían usarlas más para resolver problemas o para describir, aclarar o ampliar una idea matemática. Por ejemplo, podrían recoger una cantidad grande de datos atmosféricos, durante un tiempo prolongado, y usar una hoja de cálculo y las correspondientes gráficas para organizar y representar los datos. Podrían también desarrollar una representación algebraica para una relación del mundo real (por ejemplo, el número de baldosas necesario para bordear una piscina rectangular de *m* unidades por *n* unidades, donde *m* y *n* son números enteros; ver figura 3.9) y empezar a reconocer que representaciones simbólicas aparentemente diferentes pueden describir el mismo fenómeno. Por ejemplo, el referido número de baldosas puede expresarse por $2n + 2m + 4$ o por $2(m + 2) + 2n$.

Fig. **3.9.**
Piscina rectangular y su borde



Piscina de **m** x **n**

Los ordenadores y las calculadoras cambian lo que los estudiantes pueden hacer con las representaciones convencionales, y amplían el conjunto de representaciones con las que pueden trabajar. Por ejemplo, pueden invertir, ampliar y reducir gráficas mediante utilidades gráficas o programas de geometría dinámica. Pueden usar sistemas de cálculo algebraico para manipular expresiones, e investigar conjuntos complejos de datos por medio de hojas de cálculo. Cuando los alumnos aprenden a usar estas nuevas y versátiles herramientas, pueden también considerar los casos en los que las representaciones usadas en la tecnología electrónica difieren de las convencionales. Por ejemplo, la notación científica de los números no es igual en los ordenadores y en los libros de texto. Las expresiones algebraicas en los sistemas de cálculo algebraico pueden parecer diferentes a las de estos libros.

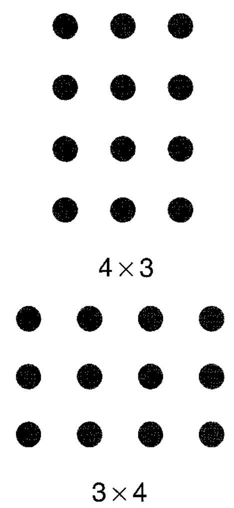
Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas

Es frecuente que representaciones diferentes aclaren distintos aspectos de un concepto complejo o de una relación. Por ejemplo, los alumnos generalmente aprenden a representar las fracciones mediante sectores de un círculo, o partes de un rectángulo o de alguna otra figura. A veces, utilizan bloques lógicos o barras que expresan la interpretación de fracciones como partes de un todo. Tales representaciones pueden ayudar a ver la equivalencia de fracciones y el significado de la suma de fracciones, en especial cuando tienen igual denominador y cuando la suma es menor que 1. Sin embargo, esta forma de representar no indica otras interpretaciones de fracción, tales como razón, división indicada o fracción como número. Otras representaciones comunes de las fracciones, como puntos sobre una recta, por ejemplo, expresan algunos, pero no todos, de los aspectos del complejo concepto de fracción. Por eso, para llegar a tener un conocimiento profundo de las fracciones, y de otros muchos conceptos matemáticos, los alumnos necesitarán una variedad de representaciones que apoyen su comprensión.

A lo largo de la educación matemática, debería hacerse hincapié en la importancia de usar múltiples representaciones. Por ejemplo, en la etapa Pre-K-2, un alumno debería llegar a saber cómo representar tres grupos de cuatro a través de la adición repetida, la cuenta a saltos o una serie de objetos.

Fig. **3.10**.

Estas configuraciones pueden ayudar a los profesores a explicar la conmutatividad de la multiplicación.



Los alumnos de los primeros niveles empiezan a ver cómo ciertas representaciones facilitan la comprensión de algunas propiedades mediante las configuraciones de puntos de la figura 3.10 podría hacerse visible la conmutatividad de la multiplicación.

En los niveles 3-5, deberían ampliarse los repertorios de representaciones para incluir dibujos más complejos, tablas, gráficas y palabras para modelizar problemas y situaciones. En los niveles medios, son útiles las representaciones para el desarrollo de ideas sobre álgebra. Con el tiempo, los alumnos desarrollan un amplio conjunto de representaciones, así como el conocimiento para usarlas con rendimiento. Este conocimiento incluye saber elegir y desenvolverse con las representaciones y aprender a hacer preguntas como ¿me proporcionaría un gráfico más ideas que una expresión simbólica para resolver este problema?

Uno de los aspectos poderosos de las matemáticas es el uso que de la abstracción, esto es, prescindir, para la simbolización, de algunas características de un problema que no son necesarias para el análisis que permite operar más fácilmente con los "símbolos desnudos". En esto reside, de diversas formas, el poder de las aplicaciones matemáticas y de la modelización. Considérese este problema:

> Desde un barco en el mar, y por la noche, el capitán puede ver tres faros y puede medir los ángulos entre ellos. Si conoce la posición de los tres faros en el mapa, ¿puede determinar la posición del barco?

Si este problema se traduce a una representación matemática, el barco y los faros se transforman en puntos en el plano, y el problema se puede resolver sin saber que trata de un barco. Muchos otros problemas, de contextos diferentes, pueden tener representaciones similares. Tan pronto como el problema se represente de una determinada forma, pueden usarse los métodos clásicos de resolución para dicha forma.

Las herramientas tecnológicas actuales dan oportunidad a los estudiantes de tener más y diferentes experiencias con el uso de múltiples representaciones. Por ejemplo, en Pre-K-2, los profesores y los alumnos pueden trabajar con versiones en pantalla de materiales manipulativos concretos, adquiriendo precisión y realimentación inmediata. Más tarde, pueden utilizarse programas de geometría dinámica para generalizar conjeturas. Varios paquetes de programas permiten ver simultáneamente una función en forma tabular, gráfica o de ecuación. Median tales programas, pueden también los alumnos examinar cómo ciertos cambios en una representación, por ejemplo, variar un parámetro en ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, afectan simultáneamente a otras representaciones. Se pueden utilizar simulaciones con ordenador o calculadora para investigar fenómenos físicos; por ejemplo, el movimiento.

A medida que aumenta el número de tipos de representación, es importante que los alumnos reflexionen sobre su uso para conocer la potencia y las limitaciones de cada uno según los propósitos. Por ejemplo, cuando aprenden distintas formas de representación para mostrar datos estadísticos, necesitan tener oportunidades para considerar las clases de datos y preguntas para las que un diagrama de sectores podría ser más apropiado que un diagrama poligonal lineal, o un diagrama de caja más que un histograma.

Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos

El término *modelo* tiene muchos significados; por eso no es sorprendente que se use de maneras muy diferentes en las discusiones sobre educación matemática. Por ejemplo, se emplea para referirse a los materiales físicos con los que trabajan los alumnos: modelos manipulativos. También, para sugerir ejemplificación o simulación, como cuando un profesor modeliza el proceso de resolución de problemas para sus alumnos. Otro uso considera el término como, aproximadamente sinónimo de *representación*. La expresión *modelo matemático*, que es el centro de atención en este contexto, significa la representación matemática de los elementos y relaciones en una versión idealizada de un fenómeno complejo. Los modelos matemáticos pueden usarse para aclarar e interpretar los fenómenos y para resolver problemas.

Los modelos permiten tener una visión de un fenómeno del mundo real.

En algunas actividades, los modelos permiten tener una visión de un fenómeno real, tal como el flujo de tráfico, a través de una estructura analítica del mismo. Un ejemplo de una cuestión general a explorar podría ser: ¿Cuánto tiempo debería permanecer en verde un semáforo, para que pudiera cruzar un número razonable de automóviles? Los alumnos pueden recopilar datos sobre cuánto tarda en cruzar, por término medio, el primer coche, cuánto el segundo, etc. Pueden luego representar estos datos estadísticamente, o determinar funciones analíticas para trabajar el problema en abstracto, considerando el tiempo que transcurre antes de que un coche empiece a moverse, cuánto tarda en alcanzar la velocidad normal de tráfico, etc.

La tecnología permite considerar modelos iterativos de situaciones que antes se estudiaban en cursos más avanzados. Por ejemplo, los alumnos de la etapa 9-12 pueden modelizar las relaciones entre el depredador y la presa. La situación inicial podría ser que en un determinado hábitat se alojan tantos lobos como conejos, siendo éstos la principal fuente de alimentación de los lobos. Cuando los lobos están bien alimentados, se reproducen bien (y más lobos comen más conejos); cuando pasan hambre, van desapareciendo. Los conejos se multiplican fácilmente cuando los lobos escasean, pero su número disminuye con rapidez cuando la población de lobos es grande. Modelizar programas que utilicen diferentes ecuaciones, permite registrar las condiciones iniciales y las reglas de cambio, y luego ver qué le ocurre al sistema dinámicamente.

El uso que hacen los estudiantes de las representaciones, para modelizar fenómenos físicos, sociales y matemáticos, debería aumentar con los años. Desde Preekindergarten hasta el nivel 2, los alumnos pueden modelizar cómo distribuir 24 galletas entre 8 niños, utilizando teselas o bloques lógicos, de diferentes maneras. En la etapa 3-5, empiezan a usar representaciones para modelizar fenómenos del mundo que los rodea y les ayuda a reconocer patrones cuantitativos. En los niveles medios, cuando modelizan y resuelven problemas que surgen del mundo real y del matemático, aprenden a usar variables para representar incógnitas y a emplear ecuaciones, tablas y gráficas para representar y analizar relaciones. Los alumnos de Secundaria crean e interpretan modelos de fenómenos referentes a una amplia gama de contextos, incluyendo los entornos físico y social, para identificar los elementos esenciales del contexto y diseñar representaciones que capten las relaciones matemáticas existentes entre esos elementos. Con la tecnología electrónica, los alumnos pueden usar representaciones para problemas y métodos, que hasta hace poco eran difíciles de explorar significativamente en la escuela secundaria. Los métodos numéricos iterativos, por ejemplo, pueden emplearse para desarrollar un concepto intuitivo de límite y de sus aplicaciones. El comportamiento asintótico de las funciones es más fácil de comprender gráficamente. Estas herramientas y estructuras permiten que los estudiantes accedan a modelos que pueden usarse para analizar una creciente gama de situaciones reales e interesantes.

El uso que hacen los estudiantes de las representaciones para modelizar fenómenos físicos, sociales y matemáticos, debería aumentar con los años.