

Estàndards comuns per a les Matemàtiques



Índex

Introducció	3
Estàndards per a la pràctica matemàtica	6
Estàndards per al contingut matemàtic	
Educació infantil (3-6 anys)	9
Grau 1 (6-7 anys)	13
Grau 2 (7-8 anys)	17
Grau 3 (8-9 anys)	21
Grau 4 (9-10 anys)	27
Grau 5 (10-11 anys)	33
Grau 6 (11-12 anys)	39
Grau 7 (12-13 anys)	46
Grau 8 (13-14 anys)	52
Educació secundària (a partir de 14 anys): introducció	
Educació secundària: nombres i quantitat	58
Educació secundària: àlgebra	62
Educació secundària: funcions	67
Educació secundària: modelatge	72
Educació secundària: geometria	74
Educació secundària: estadística i probabilitat	79
Glossari	85
Obres de consulta	91

Introducció

Objectiu: major concentració i coherència

En l'etapa inicial de la infància, l'experiència matemàtica s'hauria de concentrar en els (1) nombres, que inclouen els nombres, les operacions i les relacions, i la (2) geometria, les relacions espacials i el mesurament. El temps de l'aprenentatge de la matèria s'ha de dedicar més als nombres que a altres temes. Els objectius dels processos matemàtics s'han d'integrar en aquestes àrees de contingut.

— Mathematics Learning in Early Childhood, Consell Nacional de Recerca, 2009

Els estàndards combinats (per a Hong Kong, Corea i Singapur) tenen una sèrie de característiques que poden donar forma a un procés de referència internacional per al desenvolupament dels estàndards matemàtics de primària als EUA. En primer lloc, els estàndards combinats concentren la primera fase d'aprenentatge de les matemàtiques en el nombre, el mesurament i la geometria i no posen tan d'èmfasi en l'anàlisi de les dades i l'àlgebra. Els estàndards per als graus 1-3 a Hong Kong dediquen, aproximadament, la meitat del temps als nombres i, l'altra, a la geometria i al mesurament.

— Ginsburg, Leinwand i Decker, 2009

Com que els conceptes matemàtics als llibres de text (dels EUA) són, sovint, fluïdos, la presentació esdevé més mecànica que ideal. Vam analitzar els llibres de text tradicionals i no tradicionals que s'utilitzen als EUA i vam detectar que tots dos manquen de conceptes sòlids.

— Ginsburg et al., 2005

Hi ha moltes maneres d'organitzar una àrea curricular. El repte, que amb prou feines s'assoleix avui en dia, és evitar que es distorsionin les matemàtiques i es desmotivi els alumnes.

— Steen, 2007

Al llarg de més d'una dècada, els estudis d'investigació sobre l'aprenentatge de les matemàtiques als països d'alt rendiment escolar conclouen que l'àrea curricular matemàtica als Estats Units s'ha de focalitzar i ha de ser més coherent per millorar els coneixements matemàtics d'aquest país. Per poder complir amb la promesa d'uns estàndards comuns, els estàndards han d'abordar el problema d'una àrea curricular que cau en el tòpic de "qui molt abraça, poc estrena". Aquests estàndards són una resposta considerable a aquest repte.

Cal reconèixer, però, que uns "estàndards reduïts" no són el mateix que uns estàndards més focalitzats. Arribar a reduir els estàndards seria una tasca fàcil, ja que només caldria recórrer a unes línies generals i àmplies. En comptes d'això, aquests estàndards han de ser més clars i específics.

Valorar la coherència d'una sèrie d'estàndards és més difícil que valorar-ne l'essència. William Schmidt i Richard Houang (2002) han constatat que els estàndards de contingut i les àrees curriculars són coherents si:

*...estan articulats al llarg del temps com una seqüència de funcions i temes lògics i que reflecteixen, si escau, les característiques seqüencials i jeràrquiques dels continguts disciplinaris, dels quals en deriva el contingut. És a dir, allò que s'ensenya als alumnes i el mètode utilitzat no tan sols haurien de reflectir els temes d'una disciplina acadèmica en concret, **sinó les idees clau** que determinen com s'organitzen i es generen els coneixements dins d'aquella disciplina.*

Això implica que, per ser coherents, els estàndards de contingut han de passar de temes específics (p.e. el significat i les operacions de nombres enters, que inclouen els fets matemàtics senzills i els procediments de càlcul rutinaris associats a nombres enters i fraccions) a estructures profundes inherents de la disciplina. Per tant, aquestes estructures més profundes són un mitjà per enllaçar aquests temes específics (com la comprensió del sistema numèric racional i les seves propietats). (Parèntesi afegit)

Aquests estàndards miren de seguir aquest model, no tant sols posant èmfasi a la comprensió conceptual d'idees clau, sinó tornant, d'una manera continuada, als principis organitzadors, com ara el valor de posició o les propietats de les operacions, per estructurar aquestes idees.

A més, la “seqüència de temes i funcions”, que es resumeix en un grup d'estàndards matemàtics, també ha de respectar els coneixements sobre com aprenen els alumnes. Tal com explica Comfrey (2007), desenvolupar “obstacles seqüencials i reptes per als alumnes (...) sense tenir en compte la comprensió del significat que deriva d'un estudi de l'aprenentatge acurat, seria desafortunat i poc aconsellable”. Partint d'aquesta premissa, aquests estàndards es van començar a desenvolupar amb processos d'aprenentatge basats en estudis que revelen l'estat actual sobre com es desenvolupen, al llarg del temps, la comprensió, les capacitats i els coneixements matemàtics dels alumnes.

La comprensió de les matemàtiques

Aquests estàndards defineixen allò que els alumnes haurien d'entendre i saber fer quan estudien matemàtiques. Demanar a un alumne que entengui alguna cosa significa demanar a un professor que avaluï si l'alumne ho ha entès. Com és, però, la comprensió matemàtica? Un distintiu de la comprensió matemàtica és la capacitat de justificar, segons la maduresa matemàtica de l'alumne, per què una afirmació matemàtica és certa o d'on prové una norma matemàtica. Hi ha una gran diferència entre un alumne que sigui capaç de desenvolupar, mitjançant un procés mnemotècnic, un producte com $(a+b)(x+y)$ i un alumne que pugui explicar d'on prové aquest procés mnemotècnic. L'alumne que pot explicar la norma entén les matemàtiques i pot tenir més possibilitats de saber realitzar una operació menys coneguda, com ara desenvolupar $(a+b+c)(x+y)$. Tant la comprensió matemàtica com els coneixements dels procediments són importants i totes dues són avaluables si s'utilitzen funcions matemàtiques prou riques.

Els estàndards estableixen estàndards específics per a cada curs, però no defineixen els mètodes d'intervenció o els materials necessaris per ajudar els alumnes que han assolit o no el nivell que es demana. A més, els estàndards no poden definir el material de suport apropiat per als alumnes amb l'anglès com a segona llengua i per als alumnes amb necessitats educatives especials. Al mateix temps, tots els alumnes han de tenir l'oportunitat d'aprendre i complir amb els mateixos estàndards de qualitat si han d'assolir les habilitats i els coneixements necessaris en l'educació universitària. Els estàndards haurien de permetre al major nombre d'alumnes possible que participi des del començament per garantir, amb les adaptacions que siguin necessàries, una participació màxima dels alumnes amb necessitats educatives especials. Per exemple, als alumnes amb dificultats per llegir, se'ls hauria de facilitar textos en Braille, lectors de pantalla o altres dispositius de suport; i als alumnes amb dificultats per escriure, se'ls hauria de facilitar un escriptori, ordinadors o programes de reconeixement de la parla. Seguint aquesta línia, els mots "parla" i "oïda" s'han d'interpretar en termes generals i inclouen el llenguatge de signes. Cap grup d'estàndards específic per a cada curs pot reflectir, en la seva totalitat, la gran varietat que hi ha pel que fa a capacitats, necessitats, ritmes d'aprenentatge i nivells dels alumnes de qualsevol classe. No obstant això, els estàndards faciliten indicacions clares pel que fa a la preparació universitària o del món laboral per a tots els alumnes.

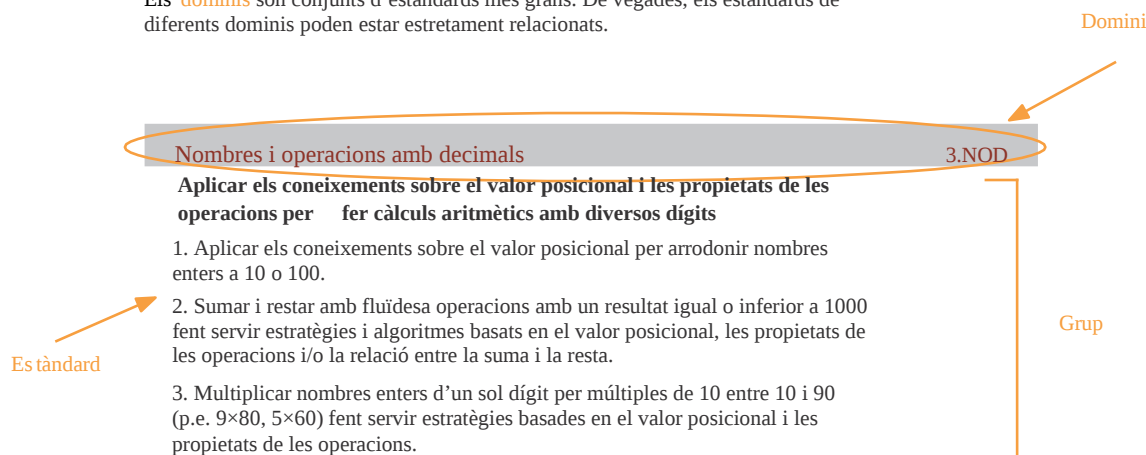
Els estàndards comencen a la pàgina 6 amb vuit estàndards per a la pràctica matemàtica.

Com s'han d'interpretar els estàndards per curs?

Els **estàndards** defineixen allò que els alumnes haurien d'entendre i saber fer.

Els **grups** són conjunts d'estàndards relacionats. Cal tenir en compte que els estàndards de diferents grups poden tenir molts punts en comú, ja que les matemàtiques són una assignatura connexa.

Els **dominis** són conjunts d'estàndards més grans. De vegades, els estàndards de diferents dominis poden estar estretament relacionats.



Aquests estàndards no dicten àrees curriculars ni mètodes d'ensenyament. Per exemple, que el tema A aparegui abans que el tema B en els estàndards d'un curs determinat, no vol dir que el tema A s'hagi d'impartir abans que el B. Un professor podria preferir ensenyar el tema B abans que l'A o podria optar per ressaltar-ne els punts en comú i ensenyar tots dos temes alhora. També podria preferir ensenyar un tema escollit perquè ajudi els alumnes, com si es tractés d'un producte secundari, a arribar al nivell que els estàndards estableixen per als temes A i B.

Allò que els alumnes puguin aprendre en un curs determinat depèn del que hagin après anteriorment. Llavors, idealment, cada estàndard d'aquest document es podria haver formulat així: "Els alumnes, que ja saben..., haurien d'aprendre...". Ara mateix, però, aquest enfocament és poc realista, entre d'altres coses, perquè la investigació educativa no pot especificar tots aquests itineraris d'aprenentatge en l'actualitat. Per tant, fruit d'aquesta necessitat, s'han aplegat temes específics per graus comparant-los amb els estàndards nacionals i internacionals. A més, s'ha tingut en compte l'experiència col·lectiva i la opinió col·lectiva i professional d'educadors, investigadors i matemàtics. Prometre uns estàndards comuns és fer que, amb el temps, permetin investigar els processos d'aprenentatge per donar forma i millorar la creació d'estàndards en un major grau. Les oportunitats d'aprenentatge seguiran variant en funció de l'escola i del sistema educatiu i el personal docent hauria de fer el possible per satisfer les necessitats dels alumnes segons els seus coneixements actuals.

Aquests estàndards no s'han creat per tornar a batejar antigues maneres de fer les coses. Són una crida per fer un pas endavant. Ara, cal que els estats treballin junts per aprofitar el que s'ha après durant dues dècades de reformes basades en estàndards. Ara, cal reconèixer que els estàndards no són tan sols promeses per als nostres fills, sinó promeses que pretenem complir.

Matemàtiques | Estàndards per a la pràctica matemàtica

Els estàndards per a la pràctica matemàtica descriuen diversos tipus d'expertesa que els professors de matemàtiques haurien de mirar de desenvolupar en els seus alumnes. Aquestes pràctiques es basen, des de fa temps, en “processos i competències” importants en l'ensenyament de les matemàtiques. Els primers són els estàndards de procediments del National Council of Teachers of Mathematics (Consell Nacional de Professors de Matemàtiques) pel que fa a la resolució, el raonament i la demostració, la comunicació, la representació i les relacions de problemes matemàtics. Els segons responen als tipus de competència matemàtica que s'especifica en l'informe *Adding It Up* del National Research Council (Consell d'Investigació Nacional): raonament adaptatiu, competència estratègica, comprensió conceptual (comprensió de conceptes, operacions i relacions matemàtiques), fluïdesa dels procediments (l'habilitat per dur a terme procediments de forma flexible, precisa, eficaç i adequada) i la disposició productiva (inclinació habitual a veure les matemàtiques com una cosa sensible, útil i mereixedora, juntament amb la diligència i l'eficàcia d'un mateix).

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls

Els alumnes matemàticament competents comencen explicant-se a si mateixos el significat d'un problema i cerquen diversos enfocaments per resoldre'l. Analitzen fets, limitacions, relacions i objectius, fan conjectures sobre la forma i el significat de la solució i tracen un camí cap al resultat, enlloc de precipitar-se cap a una solució. A més, consideren problemes similars i miren de resoldre casos especials i formes més simples del problema original amb l'objectiu d'entendre'n millor la solució. Després, segueixen i avaluen el seu progrés i, si cal, canvien de rumb. Els alumnes més grans podrien, segons el context del problema, transformar expressions algebraïques o canviar la pantalla de la seva calculadora gràfica per aconseguir la informació que necessiten. Els alumnes matemàticament competents poden explicar correspondències entre equacions, enuncisats, taules i gràfics o poden dibuixar diagrames de característiques i relacions importants, representar gràficament les dades i cercar patrons o tendències. Els alumnes més joves podrien confiar en l'ajut que suposa l'ús d'objectes o imatges concrets per conceptualitzar i resoldre un problema. Els alumnes matemàticament competents comproven les seves respostes dels problemes mitjançant un mètode diferent i no deixen de preguntar-se si té sentit. Per últim, poden entendre els enfocaments dels altres per resoldre problemes complexos i identificar correspondències entre diversos enfocaments.

2. Raonar de forma abstracta i quantitativa

Els alumnes matemàticament competents entenen les quantitats i les seves relacions en situacions problemàtiques. Per resoldre problemes de relacions quantitatives fan servir dues habilitats complementàries: l'habilitat per descontextualitzar (abstreuen una situació, la representen de forma simbòlica i manipulen els símbols com si tinguessin vida pròpia, sense haver de parar atenció als seus referents); i l'habilitat per contextualitzar, fer una pausa quan escaigui durant el procés de manipulació per investigar els referents dels símbols involucrats. El raonament quantitatiu implica certs hàbits, com ara crear una representació coherent del problema, considerar les unitats involucrades, parar atenció al significat de les quantitats i no tan sols saber com calcular-les, i conèixer i fer servir de forma flexible diversos objectes i propietats de les operacions.

3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres

Els alumnes matemàticament competents entenen i fan servir assumpcions establertes, definicions i resultats prèviament determinats a l'hora de crear arguments. Fan conjectures i creen una progressió d'afirmacions lògica per explorar la veritat de llurs conjectures. Són capaços d'analitzar situacions dividint-les en casos i poden reconèixer i fer servir contraexemples. Justifiquen llurs conclusions, les comuniquen als altres i responen als arguments dels altres. Raonen, de forma inductiva, sobre les dades i fan que els arguments que tenen en compte el context d'on provenen les dades siguin viables.

Els alumnes matemàticament competents també són capaços de comparar l'efectivitat de dos arguments plausibles, distingir les lògiques o els arguments correctes dels que no ho són i, si hi ha cap error en un argument, el saben explicar. Els alumnes de primària poden construir arguments fent servir referents concrets, com ara objectes, dibuixos, diagrames i accions. Aquests arguments poden tenir sentit i ser correctes, encara que no siguin generalitzats ni es formalitzin fins a cursos posteriors. Més endavant, els alumnes aprenen a determinar dominis als quals s'aplica un argument. Els alumnes de tots els nivells poden escoltar o llegir els arguments dels altres, determinar si tenen sentit i fer preguntes útils per aclarir-los o millorar-los.

4. Modelatge matemàtic

Els alumnes matemàticament competents poden aplicar les matemàtiques que han assolit per resoldre problemes que plantegen la vida diària, la societat i la feina. En cursos inicials, pot ser tan senzill com escriure una equació de suma per descriure una situació. En cursos mitjans, un alumne podria aplicar un raonament proporcional per planificar un esdeveniment a l'escola o analitzar un problema del barri. A l'educació secundària (a partir de 14 anys), un alumne podria utilitzar la geometria per resoldre un problema de disseny o fer servir una funció per descriure com un percentatge d'interès depèn d'un altre. Als alumnes matemàticament competents que poden aplicar allò que saben no els costa fer assumpcions ni aproximacions per simplificar una situació complicada, ja que pot ser que més endavant s'hagin de revisar. A més, són capaços d'identificar quantitats importants en una situació pràctica i traçar-ne les relacions amb eines, com ara diagrames, taules de contingència, gràfics, organigrames i fórmules. Poden analitzar-ne les relacions de forma matemàtica per treure'n conclusions. Interpreten de forma rutinària els resultats matemàtics basant-se en el context, reflexionen sobre si els resultats són vàlids i, possiblement, en milloren el model si aquest no ha complert el seu propòsit.

5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica

Els alumnes matemàticament competents consideren totes les eines disponibles a l'hora de resoldre un problema matemàtic. Aquestes eines podrien ser un paper i un llapis, models concrets, un regle, un transportador, una calculadora, un full de càlcul, un sistema algebraic computacional, un paquet estadístic o programari de geometria dinàmica. Els alumnes competents estan prou familiaritzats amb les eines adequades al seu nivell o curs per prendre decisions correctes, saber quan podria ser útil cada una d'aquestes eines i reconèixe'n les limitacions i veure què es pot esbrinar. Per exemple, els alumnes d'educació secundària matemàticament competents analitzen solucions i gràfics de funcions generats amb una calculadora gràfica. Detecten possibles errors fent servir, de forma estratègica, l'estimació i altres coneixements matemàtics. Quan creen models matemàtics, saben que la tecnologia els pot permetre visualitzar els resultats de diversos supòsits, analitzar-ne les conseqüències i comparar prediccions amb les dades. Els alumnes matemàticament competents, en diversos cursos, són capaços d'identificar recursos matemàtics externs rellevants, com el contingut digital d'un web, i utilitzar-los per plantejar o resoldre problemes. A més, són capaços de fer servir eines tecnològiques per analitzar i aprofundir la seva comprensió dels conceptes.

6. Cercar precisió

Els alumnes matemàticament competents intenten comunicar-se de forma precisa amb els altres. Quan raonen i parlen amb els altres, miren de fer servir definicions clares. Determinen el significat dels símbols que escullen i fan servir el signe d'igual de forma apropiada i coherent. Tenen cura a l'hora d'especificar unitats de mesura i d'etiquetar els eixos per aclarir-ne la correspondència amb les quantitats d'un problema. Calculen de forma precisa i eficaç i expressen respostes numèriques amb un grau de precisió adequat al context del problema. En cursos inicials, els alumnes poden raonar les explicacions i, quan arriben a l'educació secundària, ja han après a examinar els conceptes i a fer un ús explícit de les definicions.

7. Cercar una estructura i utilitzar-la

Els alumnes matemàticament competents cerquen amb cura discernir patrons o estructures. Els alumnes joves, per exemple, poden establir que tres i set més és el mateix que set i tres més o poden ordenar un grup de figures en funció del nombre de costats. Més endavant, els alumnes veuran que 7×8 és igual a $7 \times 5 + 7 \times 3$, que recorden de quan van aprendre la propietat distributiva. En l'expressió $x^2 + 9x + 14$, els alumnes de més edat poden veure el 14 com a 2×7 i el 9 com a $2 + 7$. Identifiquen la importància d'una línia en una figura geomètrica i coneixen l'estratègia de dibuixar una línia auxiliar per resoldre problemes. També saben distanciar-se i veure el problema en un pla general o en perspectiva. Poden simplificar coses complicades, com algunes expressions algebraïques, o veure-les com a compostos de diversos objectes. Per exemple, poden veure $5 - 3(x - y)^2$ com a 5 menys un nombre positiu al quadrat. Així, s'adonen que el valor real de x i y no pot ser més gran de 5.

8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit

Els alumnes matemàticament competents s'adonen si els càlculs són repetits i cerquen mètodes generals i dreceres. Els alumnes dels últims cursos de primària es poden adonar que si divideixen 25 entre 11 repeteixen els mateixos càlculs una vegada i una altra i arriben a la conclusió que tenen un decimal periòdic. Si presten atenció al càlcul de la inclinació mentre comproven si els punts passen per la línia (1, 2) amb inclinació 3, els alumnes de secundària podrien considerar l'equació $(y - 2)/(x - 1) = 3$. En adonar-se de la regularitat en què els termes es cancel·len quan s'expandeixen, les equacions $(x - 1)(x + 1)$, $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ i $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ podrien portar-los a la fórmula general per a la suma d'una sèrie geomètrica. Mentre treballen per resoldre un problema, els alumnes matemàticament competents no deixen de supervisar-ne el procés i es fixen en els detalls. A més, avaluen contínuament el sentit dels seus resultats intermitjos.

Relacionar els estàndards de pràctica matemàtica amb els estàndards de contingut matemàtic

Els estàndards de pràctica matemàtica descriuen maneres en què els alumnes de matemàtiques s'haurien de comprometre, cada vegada més, amb la matèria, a mesura que augmenten la seva maduresa i les habilitats matemàtiques durant els anys de primària i secundària. Els creadors d'àrees curriculars, avaluacions i desenvolupament professional haurien de tenir en compte la necessitat de relacionar les pràctiques matemàtiques amb el contingut matemàtic de l'ensenyament de les matemàtiques.

Els estàndards de contingut matemàtic són una combinació equilibrada de procediments i comprensió. Les expectatives que sorgeixen de la paraula “comprensió” acostumen ser bones oportunitats per relacionar les pràctiques amb el contingut. Els alumnes que no entenen un tema podrien confiar excessivament en els procediments. Si no treballem a partir d'una base flexible, pot ser menys probable que els alumnes puguin entendre problemes similars, representar problemes de forma coherent, justificar conclusions, aplicar les matemàtiques a situacions pràctiques, fer servir la tecnologia de forma conscient per treballar amb les matemàtiques, explicar les matemàtiques de forma precisa a altres alumnes, distanciar-se i veure el problema des d'un pla general o desviar-se d'un procediment conegut per trobar una drecera. En resum, la manca de comprensió fa que un alumne no s'integri en les pràctiques matemàtiques.

En aquest cas, els estàndards de contingut que creen una expectativa de comprensió són “punts d'intersecció” potencials entre els estàndards de contingut matemàtic i els estàndards de pràctica matemàtica. Aquests punts d'intersecció estan destinats a focalitzar-se en els conceptes centrals i generatius d'una àrea curricular de matemàtiques que mereixi el temps, els recursos i les energies innovadores necessaris. A més, han de millorar, qualitativament, l'àrea curricular, l'ensenyament, l'avaluació, el desenvolupament professional i l'èxit escolar de les matemàtiques.

Matemàtiques | Educació infantil (5-6 anys)

En l'educació infantil, les classes s'haurien de centrar en dues àrees crítiques:

(1) representar, relacionar i operar amb nombres enters, inicialment amb grups d'objectes, i (2) descriure les figures i l'espai. En l'educació infantil, s'hauria de dedicar més temps als nombres que a altres temes.

(1) Els alumnes fan servir nombres, que inclouen els numerals escrits, per representar quantitats i resoldre problemes quantitius, com ara comptar els objectes d'un conjunt o un nombre d'objectes, comparar conjunts de numerals i crear situacions senzilles en què s'hagi d'ajuntar i separar conjunts d'objectes i, més endavant, equacions, com $5+2=7$ i $7-2=5$ (els alumnes d'educació infantil haurien de veure equacions de suma i resta i proposar-los d'escriure equacions, tot i que no és obligatori). Els alumnes escullen, combinen i apliquen estratègies efectives per respondre a preguntes quantitatives. També reconeixen ràpidament les cardinalitats de petits conjunts d'objectes, compten i produeixen conjunts de mides determinades, compten el nombre d'objectes en conjunts combinats o el nombre d'objectes que queden en un conjunt un cop se n'han tret uns quants.

(2) Els alumnes descriuen el món físic amb idees geomètriques (p.e. forma, orientació o relacions espacials) i el vocabulari. Identifiquen, anomenen i descriuen figures bidimensionals bàsiques, com ara quadrats, triangles, cercles, rectangles i hexàgons, presentats de diverses maneres (p.e. de diferents mides i orientacions), així com figures tridimensionals, com ara cubs, cons, cilindres i esferes. Fan servir figures bàsiques i un raonament espacial per donar forma a objectes del seu entorn i construir figures més complexes.

Educació infantil

Comptar i els nombres cardinals

- Conèixer els nombres i la seva seqüència
- Comptar per saber el nombre d'objectes
- Comparar nombres

Operacions i pensament algebraic

- Entendre la suma com el fet d'ajuntar i afegir i entendre la resta com el fet de separar i treure

Nombres i operacions amb decimals

- Treballar amb els nombres de l'11 al 19 per preparar-se per al valor posicional

Mesurament i dades

- Descriure i comparar atributs mesurables
- Classificar objectes i comptar el nombre d'objectes segons les categories

Geometria

- Identificar i descriure figures
- Analitzar, comparar, crear i compondre figures

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Comptar i els nombres cardinals

EI.CC

Conèixer els nombres i la seva seqüència

1. Comptar fins a 100 en unitats i en desenes.
2. Comptar cap endavant a partir de qualsevol nombre de la seqüència (enlloc de començar per l'1).
3. Escriure els nombres del 0 al 20. Representar un nombre d'objectes amb un numeral escrit del 0 al 20 (el 0 representa un recompte sense objectes).

Comptar per saber el nombre d'objectes

4. Entendre la relació entre nombres i quantitats i relacionar comptar amb els nombres cardinals.
 - a. Quan es comptin objectes, dir els nombres en l'ordre estàndard, emparellant cada objecte amb un sol nombre i cada nombre amb un sol objecte.
 - b. Entendre que l'últim nombre que s'ha dit ens indica el nombre d'objectes que s'han comptat. El nombre d'objectes és el mateix, independentment de l'ordre en què s'hagin comptat.
 - c. Entendre que cada nombre successiu fa referència a una quantitat cada vegada major.
5. Comptar per saber respondre a preguntes amb la construcció "Quants...?" de fins a 20 elements disposats en línia, en un rectangle o un cercle o de fins a 10 elements disposats irregularment. Comptar els objectes que hi hagi d'un nombre de l'1 al 20.

Comparar nombres

6. Identificar si el nombre d'objectes d'un grup és major, menor o igual al nombre d'objectes d'un altre grup (p.e. fer servir estratègies per emparellar i comptar ¹).
7. Comparar dos nombres entre l'1 i el 10 presentats com a numerals escrits.

Operacions i pensament algebraic

EI.OP

Entendre la suma com el fet d'ajuntar i afegir i entendre la resta com el fet de separar i treure

1. Representar la suma i la resta amb objectes, dits, imatges mentals, dibuixos (p.e. picar de mans) i representar situacions, enunciats, expressions o equacions. ², sons
2. Resoldre enunciats de sumes i restes i sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 10. Per exemple, es poden fer servir objectes o dibuixos per representar el problema.
3. Emparellar nombres menors o iguals a 10 de diverses maneres. Per exemple, es poden fer servir objectes o dibuixos i representar cada operació amb un dibuix o una equació (p.e. $5=2+3$ i $5=4+1$).
4. Trobar el nombre entre l'1 i el 9 que sumat a un altre nombre doni 10. Per exemple, es poden fer servir objectes o dibuixos i representar la resposta amb un dibuix o una equació.
5. Fer sumes i restes amb fluïdesa amb un resultat igual o inferior a 5.

¹Inclou grups de fins a deu objectes.²No cal que els dibuixos donin detalls, però haurien d'ensenyar les matemàtiques en context. (Això s'aplica a qualsevol dibuix esmentat als estàndards).

Nombres i operacions amb decimals

EI.NOD

Treballar amb nombres de l'11 al 19 per preparar-se per al valor posicional

1. Compondre i descompondre nombres de l'11 al 19 en desenes i les unitats restants. Per exemple, es poden fer servir objectes o dibuixos i representar cada composició o descomposició amb un dibuix o equació (p.e. $18=10+8$). Cal fer-los entendre que aquests nombres estan formats per desenes i un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit o nou unitats.

Mesurament i dades

EI.MD

Descriure i comparar atributs mesurables

1. Descriure atributs d'objectes mesurables, com ara la longitud o el pes, i descriure diversos atributs mesurables d'un sol objecte.
2. Comparar directament dos objectes amb un atribut mesurable comú per veure quin objecte té "més" o "menys" quantitat d'aquest atribut i descriure'n la diferència. *Per exemple, es poden comparar directament les alçades de dos nens i descriure'n un com a més alt o més baix.*

Classificar objectes i comptar el nombre d'objectes segons les categories

3. Classificar objectes en categories determinades, comptar el nombre d'objectes de cada categoria i ordenar les categories segons el nombre d'objectes ³.

Geometria

EI.G

Identificar i descriure figures (quadrats, cercles, triangles, rectangles, hexàgons, cubs, cons, cilindres i esferes)

2. Descriure objectes del nostre entorn fent servir noms de figures i descriure les posicions relatives d'aquests objectes fent servir termes com *damunt, sota, al davant, darrere i al costat de*.
3. Anomenar figures de forma correcta independentment de la seva mida o orientació.
4. Distingir figures bidimensionals (damunt d'un pla, "planes") o tridimensionals ("sòlides").

Analitzar, comparar, crear i compondre figures

5. Analitzar i comparar figures de dues i de tres dimensions en diferents mides i orientacions i fer servir un llenguatge informal per descriure'n les semblances, les diferències, les parts (p.e. nombre de costats i vèrtexs/"angles") i altres atributs (p.e. nombre de costats iguals).
6. Crear figures del nostre entorn amb components (p.e. amb pals i boles de fang) i dibuixar figures.
7. Realitzar figures senzilles per formar-ne d'altres més grans. *Per exemple, "Podeu unir aquests dos triangles pels costats i formar un rectangle?"*.

³ El límit de cada categoria ha de ser igual o inferior a 10.

Matemàtiques | Grau 1 (6-7 anys)

A grau 1, les classes s'haurien de centrar en quatre àrees crítiques: (1) desenvolupar la comprensió de la suma, la resta i les estratègies que es fan servir per sumar i restar amb un resultat igual o superior a 20; (2) desenvolupar la comprensió de les relacions entre nombres enters i el valor posicional i fer grups de desenes i unitats; (3) desenvolupar la comprensió del mesurament lineal i el mesurament de longituds com a unitats de longitud repetitives; i (4) compondre i descompondre figures geomètriques i raonar-ne els atributs.

(1) Els alumnes desenvolupen estratègies per sumar i restar nombres enters basant-se en allò que han après amb els nombres petits. Fan servir una varietat de models, que inclouen objectes discrets i models basats en la longitud (p.e. connectar cubs per formar longituds), per representar el fet de sumar, restar, ajuntar, separar i comparar. Així, entenen les operacions de suma i resta i, per tant, desenvolupen estratègies per resoldre problemes aritmètics amb aquestes operacions. Els alumnes comprenen la relació entre comptar i sumar i restar (p.e. sumar-li dos a un nombre és el mateix que comptar fins a dos). A més, apliquen les propietats de la suma per sumar nombres enters i crear i utilitzar estratègies, cada vegada més sofisticades, que estiguin basades en aquestes propietats (p.e. treballar amb desenes) per resoldre problemes de sumes i restes de resultat igual o inferior a 20. En comparar una varietat d'estratègies per trobar-ne la solució, els nens comprenen la relació entre la suma i la resta.

(2) Els alumnes desenvolupen, debaten i fan servir mètodes eficaços, precisos i generalitzables per fer sumes amb un resultat igual o inferior a 100 i per restar múltiples de 10. Comparen nombres enters (fins a 100) per comprendre i solucionar problemes amb les seves magnituds relatives. Pensen en nombres enters del 10 al 100 com a desenes i unitats (identifiquen els nombres de l'11 al 19 com composicions d'una desena i unes quantes unitats). A més, comprenen l'ordre dels nombres i les seves magnituds relatives mitjançant activitats per adquirir sentit numèric.

(3) Els alumnes amplien el coneixement del significat i els processos de la mesura i de conceptes subjacents, com ara els iteratius (l'activitat mental de visualitzar la longitud d'un objecte a partir de diverses unitats de la mateixa mida) i el principi de transitivitat per al mesurament indirecte ¹.

(4) Els alumnes componen i descomponen figures sòlides (p.e. uneixen dos triangles per formar un quadrilàter) i comprenen les relacions part-tot i les propietats de les formes originals i compostes. Mentre combinen figures, les reconeixen des de diferents perspectives i orientacions, descriuen els seus atributs geomètrics i en determinen les diferències i les semblances per guanyar experiència en el mesurament i iniciar-se en la comprensió de propietats, com ara la congruència i la simetria.

¹Els alumnes haurien d'aplicar el principi de transitivitat de la mesura per fer comparacions indirectes, però no cal que es faci servir aquest terme tècnic.

Grau 1 (6-7 anys)

Operacions i pensament algebraic

- Representar i resoldre problemes que incloguin sumes i restes
- Entendre i aplicar les propietats de les operacions i la relació entre la suma i la resta
- Sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 20
- Treballar amb equacions de suma i resta

Nombres i operacions amb decimals

- Ampliar la seqüència de comptatge
- Entendre el valor posicional
- Aplicar la comprensió del valor posicional i les propietats de les operacions per sumar i restar

Mesurament i dades

- Mesurar longituds indirectament i mitjançant unitats de longitud iteratives
- Aprendre a dir i a escriure l'hora
- Representar i interpretar les dades

Geometria

- Raonar les figures i els seus atributs

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Operacions i pensament algebraic

1.OP

Representar i resoldre problemes que incloguin sumes i restes

1. Fer servir les sumes i les restes amb un resultat igual o inferior a 20 per resoldre problemes en què s'hagi d'afegir, treure, ajuntar, separar i comparar amb incògnites a totes les posicions (p.e. es poden fer servir objectes, dibuixos i equacions amb un símbol que representi la incògnita ²).
2. Resoldre enunciats que incloguin la suma de tres nombres enters, el resultat dels quals sigui igual o inferior a 20 (p.e. fer servir objectes, dibuixos i equacions amb un símbol que representi la incògnita).

Entendre i aplicar les propietats de les operacions i la relació entre la suma i la resta

3. Aplicar les propietats de les operacions com a estratègies per sumar i restar ³. Exemples: si sabem que $8+3=11$, també sabem que $3+8=11$ (Propietat commutativa de la suma). Per sumar $2+6+4$, es poden sumar els dos últims nombres, el resultat dels quals és 10. Per tant, es pot sumar $2+6+4=2+10=12$ (Propietat associativa de la suma).
4. Entendre la resta com un problema de sumands desconeguts. Per exemple, restar $10-8$ trobant el nombre que dona 10 si li sumem 8.

Sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 20

5. Relacionar el comptatge amb la suma i la resta (p.e. es pot comptar fins a 2 per sumar-li 2 a un nombre).
6. Sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 20 per poder sumar i restar amb fluïdesa amb un resultat igual o inferior a 10. Es poden fer servir estratègies com comptar; representar l'enunciat i resoldre'l (p.e. $8+6=8+2+4=10+4=14$); descompondre un nombre inferior a 10 (p.e. $13-4=13-3-1=10-1=9$); fer servir la relació entre la suma i la resta (p.e. si sabem que $8+4=12$, sabem que $12-8=4$); i crear sumes equivalents i més senzilles o conegudes (p.e. sumar $6+7$ gràcies a l'equivalent conegut $6+6+1=12+1=13$).

Treballar amb equacions de suma i resta equivalents

1. Entendre el significat del símbol d'igual i determinar si les operacions de sumes i restes són vertaderes o falses. Per exemple, quina d'aquestes equacions és vertadera i quina és falsa? $6=6$, $7=8-1$, $5+2=2+5$, $4+1=5+2$.
2. Determinar la incògnita en una equació de suma o resta amb tres nombres enters. Per exemple, es pot determinar quin nombre fa que l'equació sigui vertadera en les equacions següents: $8+?=11$, $5=\text{?}-3$, $6+6=\text{?}$.

Nombres i operacions decimals

1.NOD

Ampliar la seqüència de comptatge

1. Comptar fins a 120 començant per qualsevol nombre inferior a 120. Amb aquests barems, llegir i escriure numerals i representar un nombre d'objectes mitjançant un numeral escrit.

Entendre el valor posicional

2. Entendre que els dos dígit d'un nombre de dos dígit representen grups de desenes i unitats. Cal entendre els següents casos com a casos especials:
 - a. El 10 es pot veure com un grup de deu unitats, que s'anomena "desena".
 - b. Els nombres de l'11 al 19 estan formats per una desena i un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit o nou unitats.
 - c. Els nombres 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 es refereixen a un, dos, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit o nou desenes (i 0 unitats).

²Vegeu la taula 1 del glossari.³No cal que s'utilitzin termes formals per a aquestes propietats.

3. Comparar dos nombres de dos dígit basant-nos en el significat de les desenes i les unitats i marcar els resultats de les comparacions amb els símbols $>$, $=$ i $<$.

Aplicar la comprensió del valor posicional i les propietats de les operacions per sumar i restar

4. Sumar amb un resultat igual o inferior a 100, sumar un nombre de dos dígit i un d'un dígit i sumar un nombre de dos dígit i un múltiple de 10 fent servir models concrets o dibuixos i estratègies basades en el valor posicional, les propietats de les operacions i/o la relació entre la suma i la resta.
Es pot relacionar l'estratègia amb un mètode escrit i explicar el raonament que s'ha fet servir. Cal fer-los entendre que quan se suma un nombre de dos dígit, se sumen desenes i desenes, unitats i unitats i que, de vegades, cal compondre una desena.
5. Arribar a trobar mentalment una desena més o menys partint d'un nombre de dos dígit sense haver de comptar i explicar el raonament que s'ha fet servir.
6. Restar múltiples de 10 entre els nombres 10 i 90 de múltiples de 10 entre 10 i 90, amb un resultat positiu o zero, fent servir models concrets o dibuixos i estratègies basades en el valor posicional, les propietats de les operacions i/o la relació entre la suma i la resta. Es pot relacionar l'estratègia amb un mètode escrit i explicar el raonament que s'ha fet servir.

Mesurament i dades

1.MD

Mesurar longituds indirectament i mitjançant unitats de longitud iteratives

1. Ordenar tres objectes segons la seva longitud i comparar les longituds de dos objectes de forma indirecta fent servir un tercer objecte.
2. Expressar la longitud d'un objecte com un nombre enter d'unitats de longitud, col·locant diverses còpies d'un objecte més curt (la unitat de longitud), l'una al costat de l'altra. Cal fer-los entendre que la mesura de la longitud d'un objecte és el nombre d'unitats de la mateixa mida que el cobreixen sense espais buits ni unitats superposades. *Cal limitar-se a contextos on l'objecte que es mesura es cobreixi sense espais buits ni unitats superposades.*

Aprendre a dir i a escriure l'hora

3. Dir i escriure l'hora en hores i mitges hores fent servir rellotges analògics i digitals.

Representar i interpretar les dades

4. Organitzar, representar i interpretar les dades de fins a tres categories; formular i respondre preguntes sobre el nombre total de dades, quantes n'hi ha en cada categoria i quantes n'hi ha, de més o de menys, en una categoria o en una altra.

Geometria

1.G

Raonar sobre les figures i els seus atributs

1. Distingir entre atributs definits (p.e. els triangles són tancats i tenen tres costats) i atributs no definits (p.e. el color, la orientació i la mida); construir i dibuixar figures que tinguin atributs definits.
2. Compondre figures bidimensionals (rectangles, quadrats, trapezis, triangles, semicercles i quarts de cercle) o tridimensionals (cubs, prismes rectangulars rectes, cons circulars rectes i cilindres circulars rectes) per crear una figura composta i compondre noves figures a partir de la figura composta⁴.
3. Dividir cercles i rectangles en dos i quatre parts iguals, descriure'n les parts fent servir les paraules *meitat de*, *quarta part* i *quarts*. Descriure un total com a mitjos i quarts de les parts. Cal fer-los entendre, a través d'aquests exemples, que descompondre un objecte en parts iguals implica que les parts siguin més petites.

⁴No cal que els alumnes aprenguin termes, com ara "prisma rectangular recte".

Matemàtiques | Grau 2 (7-8 anys)

A grau 2, les classes s'haurien de centrar en quatre àrees crítiques: (1) desenvolupar la comprensió de la notació decimal; (2) treballar la fluïdesa en la suma i la resta; (3) fer servir unitats de mesura estàndard; i (4) descriure i analitzar figures.

(1) Els alumnes desenvolupen la comprensió del sistema decimal. Això inclou saber comptar de cinc en cinc, de deu en deu i en múltiples de cent, deu i un i conèixer les relacions numèriques amb aquestes unitats, entre les quals hi ha la comparació. A més, entenen els nombres de diversos dígit (fins a 1000) escrits en notació decimal i reconeixen que els dígit de cada lloc representen grups de milers, centenars, desenes o unitats (p.e. 853 són 8 centenars + 5 desenes + 3 unitats).

(2) Els alumnes apliquen els coneixements de la suma per ser més hàbils en les sumes i les restes amb un resultat igual o inferior a 100. Resolen problemes de resultats iguals o inferiors a 1000 aplicant els seus coneixements de models de suma i resta. A més, desenvolupen, debaten i fan servir mètodes eficaços, precisos i generalitzables per calcular sumes i restes de nombres enters en notació decimal, aplicant els seus coneixements sobre el valor posicional i les propietats de les operacions. Seleccionen i apliquen, de forma precisa, mètodes adequats al context i els nombres en qüestió per calcular mentalment sumes i restes en nombres amb només desenes o centenars.

(3) Els alumnes reconeixen la necessitat d'utilitzar unitats de mesura estàndard (centímetre i polzada) i fan servir regles i altres eines per mesurar, ja que la mesura lineal està relacionada amb una iteració d'unitats. Reconeixen que com més petita és la unitat, més iteracions es necessiten per cobrir una longitud determinada.

(4) Els alumnes descriuen i analitzen figures analitzant i examinant els seus costats i els seus angles. A més, investiguen, descriuen i raonen sobre descompondre i combinar figures per crear-ne d'altres. A més, es preparen per entendre l'àrea, el volum, la congruència, la semblança i la simetria en cursos posteriors mitjançant la construcció, el dibuix i l'anàlisi de figures bidimensionals i tridimensionals.

Grau 2 (7-8 anys)

Operacions i pensament algebraic

- Representar i resoldre problemes que incloguin sumes i restes
- Sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 20
- Treballar amb grups iguals d'objectes per preparar-se per a la multiplicació

Nombres i operacions amb decimals

- Entendre el valor posicional
- Aplicar el valor posicional i les propietats de les operacions per sumar i restar

Mesurament i dades

- Mesurar i calcular longituds en unitats estàndard
- Relacionar la suma i la resta amb la longitud
- Treballar amb l'hora i els diners
- Representar i interpretar les dades

Geometria

- Raonar figures i els seus atributs

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Operacions i pensament algebraic

2.OP

Representar i resoldre problemes que incloguin sumes i restes

1. Aplicar la suma i la resta, amb un resultat igual o inferior a 100, per resoldre enunciats d'una i de dues operacions i situacions en què s'hagi d'afegir, treure, ajuntar, separar i comparar amb incògnites en totes les posicions (p.e. es poden fer servir dibuixos i equacions amb un símbol que representi la incògnita per representar el problema ¹).

Sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 20

2. Sumar i restar amb fluïdesa amb un resultat igual o inferior a 20 fent servir estratègies mentals ³. Al final de grau 2, els alumnes han de saber de memòria totes les sumes de dos nombres de dos dígits.

Treballar amb grups iguals d'objectes per preparar-se per a la multiplicació

3. Determinar si un grup d'objectes (fins a 20) té un nombre parell o imparell d'objectes. Per exemple, es poden emparellar objectes o comptar-los de dos en dos, escriure una equació per expressar un nombre parell com una suma de dos sumands iguals.
4. Fer servir la suma per trobar el nombre total d'objectes disposats en formacions rectangulars de fins a 5 files i 5 columnes; escriure una equació per expressar el total com una suma de sumands iguals.

Nombres i operacions amb decimals

2.NOD

Entendre el valor posicional

1. Entendre que els tres dígits d'un nombre de tres dígits representen grups de centenes, desenes i unitats. Per exemple, 706 és igual a 7 centenes, 0 desenes, i 6 unitats. Cal entendre els casos següents com a casos especials:
 - a. 100 es pot considerar com un grup de deu desenes, que s'anomena "centena".
 - b. Els nombres 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800 i 900 fan referència a una, dues, tres, quatre, cinc, sis, set, vuit o nou centenes (i 0 desenes i 0 unitats).
2. Comptar fins a 1000, comptar de cinc en cinc, de 10 en 10 i de 100 en 100.
3. Llegir i escriure els nombres fins al 1000 fent servir numerals amb decimals, els noms dels nombres i la seva forma expandida.
4. Comparar dos nombres de tres dígits basant-se en els significats dels dígits de les centenes, desenes i unitats. Fer servir els símbols $>$, $=$ i $<$ per representar-ne els resultats.

Aplicar el valor posicional i les propietats de les operacions per sumar i restar

5. Sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 100 amb fluïdesa fent servir estratègies basades en el valor posicional i les propietats de les operacions i/o la relació entre la suma i la resta.
6. Sumar fins a quatre nombres de dos dígits fent servir estratègies basades en el valor posicional i les propietats de les operacions.
7. Sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 100 amb fluïdesa fent servir estratègies basades en el valor posicional i les propietats de les operacions i/o la relació entre la suma i la resta.
8. Sumar i restar amb un resultat igual o inferior a 1000 fent servir models concrets o dibuixos i estratègies basades en el valor posicional, les propietats de les operacions i/o la relació entre la suma i la resta. Per acabar, relacionar aquesta estratègia amb un mètode escrit. Comprendre que quan es resten o se sumen nombres de tres dígits, se sumen o es resten centenes i centenes, desenes i desenes i unitats i unitats. De vegades, cal compondre o descompondre desenes o centenes.
9. Sumar mentalment 10 o 100 a un nombre del 100 al 900 i restar mentalment 10 o 100 d'un nombre del 100 al 900.
10. Explicar per què funcionen les estratègies de suma i resta aplicant el valor posicional i les propietats de les operacions ³.

¹Vegeu la taula 1 del glossari.²A l'estàndard 1.OP.6 trobareu una llista d'estratègies mentals.³Les explicacions es poden acompanyar de dibuixos o objectes.

Mesurament i dades

2.MD

Mesurar i calcular longituds en unitats estàndard

1. Mesurar la longitud d'un objecte seleccionant i fent servir eines apropiades, com ara regles, vares, metres i cintes mètriques.
2. Mesurar dos cops la longitud d'un objecte fent servir unitats de longitud diferents i descriure la relació de tots dos mesuraments amb la mida de la unitat escollida.
3. Calcular longituds fent servir les unitats de polzades, peus, centímetres i metres.
4. Mesurar dos objectes i determinar quin dels dos és més llarg que l'altre i expressar-ho en unitats de longitud estàndard.

Relacionar la suma i la resta amb la longitud

5. Aplicar la suma i la resta, amb un resultat inferior a 100, per resoldre enunciats amb longituds en les mateixes unitats (p.e. fer servir dibuixos, com ara dibuixos de regles, i equacions amb un símbol per a la incògnita).
6. Representar nombres enters com a longituds a partir del 0 en un diagrama de nombres en línia amb punts equidistants que corresponguin als nombres 0, 1, 2, etc. A més, representar sumes de nombres enters i restes, amb un resultat igual o inferior a 100, en un diagrama de nombres en línia.

Treballar amb l'hora i els diners

7. Dir i escriure l'hora de rellotges analògics i digitals (de cinc en cinc minuts).
8. Resoldre enunciats amb bitllets d'euro i monedes de 50, 20, 10 i 5 cèntims amb el símbol € i l'abreviació cent. de forma apropiada. *Exemple: Si tens dues monedes de 10 cèntims i tres monedes de dos, quants cèntims tens?*

Representar i interpretar les dades

8. Mesurar les longituds de diversos objectes i arrodonir-les al nombre enter més proper o mesurar repetidament el mateix objecte. Representar les longituds amb un gràfic de línia, on l'escala horitzontal estigui marcada en unitats de nombres enters.
9. Dibuixar un gràfic amb imatges i un gràfic de barres (d'una sola escala) per representar un grup de dades de fins a quatre categories. Resoldre problemes senzills en què s'hagin d'ajuntar, separar i comparar ⁴ les dades que apareixen al gràfic de barres.

Geometria

2.G

Raonar les figures i els seus atributs

1. Reconèixer i dibuixar figures amb atributs específics, com ara un nombre concret d'angles o costats iguals ⁵. Identificar triangles, quadrilàters, pentàgons, hexàgons i cubs.
2. Dividir un rectangle en files i columnes de quadrats de la mateixa mida i comptar-los.
3. Dividir cercles i rectangles en dos, tres o quatre parts iguals, descriure les parts amb les paraules *meitats*, *terços*, *la meitat de*, *un terç de*, etc., i descriure el tot com a dues meitats, tres terços o quatre quarts. Així, els alumnes s'adonaran que no cal que les parts iguals d'un tot tinguin la mateixa forma.

⁴Vegeu la taula 1 del glossari.⁵Les mides es compararan de forma directa o visual, no es mesuraran.

Matemàtiques | Grau 3 (8-9 anys)

A grau 3, les classes s'haurien de centrar en quatre àrees crítiques: (1) desenvolupar la comprensió de la multiplicació i la divisió i les estratègies per a la multiplicació i la divisió amb un resultat igual o inferior a 100; (2) desenvolupar la comprensió de les fraccions, sobretot les fraccions unitàries (fraccions en què el numerador és 1); (3) desenvolupar la comprensió de l'estructura de formacions rectangulars i de l'àrea; i (4) descriure i analitzar figures bidimensionals.

(1) Els alumnes desenvolupen la comprensió dels significats de la multiplicació i la divisió de nombres enters mitjançant activitats i problemes amb grups, disposicions i models d'àrea de la mateixa mida. La multiplicació és trobar un producte desconegut i la divisió, un factor desconegut en aquestes situacions. La divisió pot requerir trobar el nombre dels grups desconegut o la mida del grup desconeguda en grups de la mateixa mida. Els alumnes apliquen les propietats de les operacions per calcular productes de nombres enters fent servir estratègies, cada vegada més sofisticades, basades en aquestes propietats per resoldre problemes amb multiplicacions i divisions en què hi hagi factors d'un sol dígit. Quan comparen la varietat d'estratègies per arribar a la solució, els alumnes aprenen la relació entre la multiplicació i la divisió.

(2) Els alumnes desenvolupen la comprensió de les fraccions, començant per fraccions unitàries. Els alumnes veuen que les fraccions generals estan formades de fraccions unitàries i fan servir fraccions i representacions gràfiques de la fracció per representar les parts d'un tot. Els alumnes comprenen que la mida d'una part fraccionària és relativa a la mida del tot. Per exemple, $\frac{1}{2}$ de la pintura d'un cub petit podria ser menys pintura que $\frac{1}{3}$ de la pintura d'un cub més gran, però $\frac{1}{3}$ d'una cinta és més llarg que $\frac{1}{5}$, perquè si dividim la cinta en 3 parts iguals, aquestes són més llargues que si la dividim en 5. Els alumnes són capaços de fer servir les fraccions per representar nombres iguals, inferiors o majors d'1. Resolen problemes en què s'hagin de comparar fraccions mitjançant representacions visuals de les fraccions i estratègies basades en detectar numeradors o denominadors iguals.

(3) Els alumnes identifiquen l'àrea com un atribut de regions bidimensionals. A més, mesuren l'àrea d'una figura amb el nombre total d'unitats de la mateixa mida que calen per cobrir la figura sense espais buits o unitats superposades (la unitat estàndard per mesurar l'àrea és un quadrat amb costats d'una unitat de longitud). Els alumnes comprenen que les disposicions rectangulars es poden descompondre en files o columnes idèntiques. En descompondre rectangles en disposicions rectangulars de quadrats, els alumnes relacionen l'àrea amb la multiplicació i la fan servir per determinar l'àrea d'un rectangle.

(4) Els alumnes descriuen, analitzen i comparen les propietats de figures bidimensionals. Comparen i classifiquen figures pels seus costats i els seus angles i les relacionen amb les definicions d'aquestes figures. Els alumnes també relacionen aquestes operacions de fraccions amb la geometria tot expressant l'àrea de la part d'una figura com una fracció unitària d'un tot.

Grau 3 (8-9 anys)

Operacions i pensament algebraic

- Representar i resoldre problemes amb multiplicacions i divisions
- Entendre les propietats de la multiplicació i la relació entre la multiplicació i la divisió
- Multiplicar i dividir amb un resultat igual o inferior a 100
- Resoldre problemes que continguin les quatre operacions i identificar i explicar patrons aritmètics

Nombres i operacions amb decimals

- Aplicar els coneixements sobre el valor posicional i les propietats de les operacions per fer càlculs aritmètics de diversos dígit

Nombres i operacions—fraccions

- Entendre les fraccions com a nombres

Mesurament i dades

- Resoldre problemes en què s'hagin de mesurar i calcular intervals de temps, volums de líquids i masses d'objectes
- Representar i interpretar les dades
- Mesurament geomètric: entendre conceptes d'àrea i relacionar l'àrea amb la multiplicació i la suma
- Mesurament geomètric: reconèixer el perímetre com un atribut de figures planes i distingir entre mesures lineals i d'àrea

Geometria

- Raonar les figures i els seus atributs

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Operacions i pensament algebraic

3.OP

Representar i resoldre problemes amb multiplicacions i divisions

1. Interpretar productes de nombres enters, p.e. representar 5×7 com el nombre total d'objectes de 5 grups de 7 objectes cadascun. *Per exemple, descriu un context en què un nombre total d'objectes pugui ser expressat com a 5×7 .*
2. Representar quocients de nombres enters, p.e. representar $56 \div 8$ com el nombre d'objectes que hi haurà a cada part un cop s'hagin dividit 56 objectes en 8 parts iguals o com el nombre de parts un cop s'hagin dividit 56 objectes en parts iguals de 8 objectes cadascuna. *Per exemple, descriu un context en què un nombre de parts o un nombre de grups es pugui expressar com a $56 \div 8$.*
3. Aplicar la multiplicació i la divisió, amb un resultat igual o inferior a 100, per resoldre problemes que continguin situacions en què hi hagi grups, disposicions i quantitats de mesurament iguals. Utilitzar dibuixos i equacions amb un símbol que representi la incògnita ¹.
4. Determinar el nombre enter desconegut en una equació de multiplicació o divisió amb tres nombres enters. *Per exemple, troba el nombre desconegut que fa que l'equació sigui vertadera en cadascuna d'aquestes equacions:* $8 \times ? = 48$, $5 = \text{?} \div 3$, $6 \times 6 = ?$

Entendre les propietats de la multiplicació i la relació entre multiplicació i divisió

5. Aplicar les propietats de les operacions com estratègies per multiplicar i dividir ². *Exemples: Si sabem que $6 \times 4 = 24$, també sabem que $4 \times 6 = 24$ (propietat commutativa de la multiplicació). Per tant, $3 \times 5 \times 2$ es pot representar com $3 \times 5 = 15$ i $15 \times 2 = 30$ o bé com $5 \times 2 = 10$ i $3 \times 10 = 30$ (propietat associativa de la multiplicació). Si sabem que $8 \times 5 = 40$ i $8 \times 2 = 16$, es pot representar 8×7 com $8 \times (5 + 2) = (8 \times 5) + (8 \times 2) = 40 + 16 = 56$ (propietat distributiva).*
6. Entendre la divisió com un problema amb un factor desconegut. *Per exemple, calcula $32 \div 8$ amb el nombre que multiplicat per 8 doni 32.*

Multiplicar i dividir amb un resultat igual o inferior a 100

7. Multiplicar i dividir amb fluïdesa operacions amb un resultat igual o inferior a 100 fent servir estratègies, com ara la relació entre la multiplicació i la divisió (p.e. si sabem que $8 \times 5 = 40$, sabem que $40 \div 5 = 8$) o les propietats de les operacions. Al final de grau 3, cal saber de memòria tots els productes de dos nombres d'un dígit.

Resoldre problemes que continguin les quatre operacions i identificar i explicar patrons aritmètics

8. Resoldre enunciats de dues operacions aplicant les quatre operacions. Representar aquests problemes fent servir equacions amb una lletra que representi la incògnita. Avaluar el raonament de les respostes amb estratègies de càlcul i d'estimació mentals, com ara l'arrodoniment ³.
9. Identificar patrons aritmètics (com ara patrons de les taules de sumar o de multiplicar) i explicar-los fent servir les propietats de les operacions. *Per exemple, es pot observar que un nombre multiplicat per 4 sempre dona un nombre parell i explicar per què el resultat d'un nombre multiplicat per 4 es pot descompondre en dos sumands iguals*.

¹Vegeu la taula 2 del glossari.²No cal que els alumnes facin servir els termes formals d'aquestes propietats.³Aquest estàndard es limita a problemes i respostes amb nombres enters. Els alumnes haurien de saber realitzar les operacions en l'ordre convencional, sense parèntesis que especifiquin cap ordre en concret (Ordre d'operacions).

Nombres i operacions amb decimals

3.NOD

Aplicar els coneixements sobre el valor posicional i les propietats de les operacions per fer càlculs aritmètics amb diversos dígit⁴

1. Aplicar els coneixements sobre el valor posicional per arrodonir nombres enters a 10 o 100.
2. Sumar i restar amb fluïdesa operacions, amb un resultat igual o inferior a 1000, aplicant estratègies i algorismes basats en el valor posicional, les propietats de les operacions i/o la relació entre la suma i la resta.
3. Multiplicar nombres enters d'un sol dígit per múltiples de 10 entre 10 i 90 (p.e. 9×80 , 5×60) aplicant estratègies basades en el valor posicional i les propietats de les operacions.

Nombre i operacions - fraccions

5

3.NOF

Entendre les fraccions com a nombres

1. Entendre la fracció $1/b$ com una quantitat formada per una part d'un tot que es divideix en b parts iguals i entendre la fracció a/b com una quantitat formada per a parts d'un tot de mida $1/b$.
2. Entendre una fracció com a un nombre en una línia numèrica i representar fraccions en una recta numèrica.
 - a. Representar la fracció $1/b$ en una recta numèrica amb un interval de 0 a 1 i definir-lo com un tot dividit en b parts iguals. Observar que cada part mesura $1/b$ i que després de 0, cada punt de la recta numèrica és $1/b$.
 - b. Representar la fracció a/b en una recta numèrica establint que a partir de 0, a mesura $1/b$. Observar que l'interval resultant mesura a/b i que ocupa el lloc a/b en la recta numèrica.
3. Explicar l'equivalència de fraccions en casos especials i comparar fraccions raonant-ne la seva mida.
 - a. Entendre dues fraccions com a equivalents (iguals) si tenen la mateixa mida o el mateix punt en una recta numèrica.
 - b. Identificar i generar fraccions equivalents simples (p.e. $1/2=2/4$, $4/6=2/3$). Explicar per què són equivalents fent servir, per exemple, representacions gràfiques de les fraccions.
 - c. Expressar nombres enters com a fraccions i identificar les fraccions que siguin equivalents a nombres enters. *Per exemple, es pot expressar el nombre 3 amb la forma $3=3/1$, observar que $6/1=6$ i situar $4/4$ i 1 en el mateix punt d'una recta numèrica.*
 - d. Comparar dues fraccions amb el mateix numerador o el mateix denominador segons la mida que tinguin. Observar que les comparacions només són vàlides quan totes dues fraccions es refereixen al mateix tot. Anotar els resultats de les comparacions amb els símbols $>$, $=$ o $<$ i justificar les conclusions (p.e. mitjançant una representació gràfica de la fracció).

Mesurament i dades

3.MD

Resoldre problemes en què s'hagin de mesurar i calcular intervals de temps, volums de líquids i masses d'objectes

1. Dir i escriure l'hora arrodonint al minut més proper i mesurar els intervals de temps en minuts. Resoldre problemes en què s'hagi de sumar i restar intervals de temps en minuts (p.e. representant el problema en una recta numèrica).

⁴Es pot fer servir una varietat d'algorismes.⁵En aquest camp, les expectatives de grau 3 es limiten a fraccions amb denominadors 2, 3, 4, 6 i 8.

2. Mesurar i calcular volums líquids i masses d'objectes amb les unitats estàndard dels grams (g), kilograms (kg) i litres (l)⁶. Sumar, restar, multiplicar o dividir per resoldre enunciats d'un sola operació on hi hagi masses o volums en les mateixes unitats. Per exemple, utilitzant dibuixos com a suport per representar el problema (com ara un got de precipitats graduat)⁷.

Representar i interpretar les dades

3. Dibuixar un gràfic amb pictogrames i un gràfic de barres amb escala gràfica per representar unes dades amb diverses categories. Resoldre problemes d'una sola operació o dues operacions que continguin la pregunta “quants objectes hi ha de més” i “quants objectes hi ha de menys” fent servir la informació que aparegui en un gràfic de barres amb escala gràfica. *Per exemple, dibuixar un gràfic de barres en què cada casella del gràfic representi 5 animals.*
4. Mesurar longituds fent servir regles marcats amb mitjos i quarts de centímetre. Expressar les dades amb un gràfic de línia, on l'eix horitzontal estigui delimitat per les unitats corresponents – nombres enters, mitjos o quarts.

Mesurament geomètric: entendre conceptes d'àrea i relacionar l'àrea amb la multiplicació i la suma

5. Reconèixer l'àrea com un atribut de figures planes i entendre els conceptes de mesurament d'àrea.
 - a. Un quadrat amb un costat que mesuri 1 unitat, que anomenem “quadrat unitat”, té una àrea d'“1 unitat quadrada” i es pot utilitzar per mesurar l'àrea.
 - b. Una figura plana que es pot cobrir sense espais buits o unitats superposades amb n quadrats unitat, té una àrea de n unitats quadrades.
6. Mesurar àrees comptant els quadrats unitat (centímetres quadrats, metres quadrats, polzades quadrades, peus quadrats i unitats improvisades).
7. Relacionar l'àrea amb les operacions de la multiplicació i la suma.
 - a. Formar un mosaic i trobar l'àrea d'un rectangle, les longituds de costat del qual siguin nombres enters, i demostrar que l'àrea és la mateixa que si multipliquéssim les longituds dels costats.
 - b. Multiplicar longituds de costat per trobar àrees de rectangles de costats, la longitud dels quals sigui un nombre enter, per resoldre problemes matemàtics i reals. A més, representar productes de nombres enters com àrees rectangulars segons el raonament matemàtic.
 - c. Utilitzar una rajola per demostrar, en un cas concret, que l'àrea d'un rectangle, les longituds de costat del qual siguin nombres enters a i $b+c$, és la suma d' $a \times b$ i $a \times c$. Fer servir models d'àrea per representar la propietat distributiva segons el raonament matemàtic.
 - d. Reconèixer l'àrea com a additiva. Trobar àrees de figures rectilínies mitjançant la seva descomposició en rectangles que no se superposin i sumar les àrees de les parts que no se superposin. Fer servir aquesta tècnica per solucionar problemes reals.

Mesurament geomètric: reconèixer el perímetre com un atribut de figures planes i distingir entre mesures lineals i d'àrea

8. Resoldre problemes matemàtics i reals en què hi hagi perímetres de polígons, com ara trobar el perímetre a partir de les longituds dels costats, trobar una longitud de costat desconeguda i mostrar rectangles amb el mateix perímetre i àrees diferents o amb la mateixa àrea i perímetres diferents.

⁶No s'inclouen les unitats compostes, com els cm³, ni trobar el volum geomètric d'un contenidor.

⁷No s'inclouen problemes de comparació multiplicativa, és a dir, problemes amb nocions de “tantes vegades més”. Vegeu la taula 2 del glossari.

Geometria

3.G

Raonar les figures i els seus atributs

1. Entendre que les figures de diferents categories (p.e. rombes, rectangles i altres) poden compartir atributs (p.e. tenir quatre costats) i que els atributs que tenen en comú poden definir una categoria major (p.e. els quadrilàters). Reconèixer els rombes, els rectangles i els quadrats com a exemples de quadrilàters i dibuixar exemples de quadrilàters que no pertanyin a cap d'aquestes subcategories.
2. Dividir figures en parts que tinguin la mateixa àrea. Expressar l'àrea de cada part com una fracció unitària del tot. *Per exemple, es pot dividir una figura en quatre parts d'àrea igual i descriure l'àrea de cada part com $1/4$ de l'àrea de la figura.*

Matemàtiques | Grau 4 (9-10 anys)

A grau 4, les classes s'haurien de centrar en tres àrees crítiques: (1) desenvolupar la comprensió i la fluïdesa en la multiplicació de nombres de diversos dígit i desenvolupar la comprensió de la divisió per trobar quocients, els dividends dels quals siguin de diversos dígit; (2) desenvolupar la comprensió de l'equivalència de fraccions i la suma i la resta de fraccions amb denominadors iguals i la multiplicació de fraccions per nombres enters; (3) entendre que les figures geomètriques es poden analitzar i classificar segons les seves propietats, per exemple, per tenir costats paral·lels, costats perpendiculars, mesures d'angles particulars o ser simètriques.

(1) Els alumnes amplien el coneixement sobre el valor posicional a 1.000.0000 i entenen les mides relatives dels nombres de cada posició. Apliquen els coneixements dels models (grups, disposicions i models d'àrea de la mateixa mida), el valor posicional i les propietats de les operacions i, en particular, la propietat distributiva per a la multiplicació. Al mateix temps, desenvolupen, debaten i fan servir mètodes eficaços, precisos i generalitzables per calcular productes de nombres enters de diversos dígit. En funció dels nombres i del context, seleccionen i apliquen, amb precisió, mètodes apropiats per estimar o calcular productes mentalment. Guanyen fluïdesa amb procediments eficaços per multiplicar nombres enters, comprenen i expliquen per què funcionen els procediments basats en el valor posicional i les propietats de les operacions i els fan servir per resoldre problemes. Els alumnes apliquen els coneixements dels models per a la divisió, el valor posicional, les propietats de les operacions i la relació de la divisió i la multiplicació. Al mateix temps, desenvolupen, debaten i fan servir mètodes eficaços, precisos i generalitzables per trobar quocients que tinguin dividends de diversos dígit. Seleccionen i apliquen, de forma precisa, mètodes per estimar i calcular quocients mentalment i interpreten residus basant-se en el context.

(2) Els alumnes desenvolupen la comprensió de l'equivalència de fraccions i de les operacions amb fraccions. Veuen que dues fraccions diferents poden ser iguals (p.e. $15/9 = 5/3$) i desenvolupen mètodes per generar i reconèixer fraccions equivalents. Els alumnes amplien coneixements previs sobre com es formen i es componen les fraccions a partir de fraccions unitàries i de com es poden descompondre en fraccions unitàries. A més, amplien coneixements sobre com s'ha de fer servir el significat de les fraccions i de la multiplicació per multiplicar una fracció per un nombre enter.

(3) Els alumnes descriuen, analitzen, comparen i classifiquen figures bidimensionals. Mitjançant la construcció, el dibuix i l'anàlisi de figures de dues dimensions, aprofundeixen els coneixements sobre les propietats dels objectes bidimensionals i del seu ús per resoldre problemes de simetria.

Grau 4 (9-10 anys)

Operacions i pensament algebraic

- Aplicar les quatre operacions amb nombres enters per resoldre problemes
- Familiaritzar-se amb els factors i els múltiples
- Generar i analitzar patrons

Nombres i operacions amb decimals

- Generalitzar els coneixements sobre el valor posicional per als nombres enters de diversos dígit
- Aplicar el valor posicional i les propietats de les operacions per fer càlculs aritmètics de diversos dígit

Nombres i operacions—fraccions

- Ampliar els coneixements de l'equivalència i ordenació de fraccions
- Construir fraccions a partir de fraccions unitàries aplicant i ampliant els coneixements previs sobre les operacions amb nombres enters
- Entendre la notació decimal de fraccions i comparar fraccions decimals

Mesurament i dades

- Resoldre problemes en què s'hagin de mesurar i convertir mesures d'una unitat major a una de menor
- Representar i interpretar les dades
- Mesurament geomètric: entendre els conceptes d'angle i mesurar angles

Geometria

- Traçar i identificar línies i angles i classificar figures segons les propietats de les seves línies i els seus angles

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Operacions i pensament algebraic

4.OP

Aplicar les quatre operacions amb nombres enters per resoldre problemes

1. Interpretar una equació de multiplicació com una comparació (p.e. representar que $35 = 5 \times 7$ afirmant que 35 és 5 vegades 7 i 7 vegades 5. Representar enunciats de comparacions multiplicatives com equacions de multiplicació.
2. Multiplicar o dividir per resoldre problemes en què s'hagi de fer una comparació multiplicativa. Fer servir dibuixos i equacions amb un símbol que representi la incògnita i distingir la comparació multiplicativa de l'additiva ¹.
3. Resoldre enunciats de diverses operacions, el plantejament i la resposta dels quals tinguin nombres enters. Aplicar les quatre operacions i incloure problemes en què s'hagin d'interpretar els residus. Representar aquests problemes mitjançant l'ús d'equacions amb una lletra que representi la incògnita. Avaluar el raonament de les respostes fent servir estratègies d'estimació i de càlcul mental, que inclouen l'arrodoniment.

Familiaritzar-se amb els factors i els múltiples

4. Trobar tots els parells de factors d'un nombre enter entre l'1 i el 100. Observar que un nombre enter és múltiple de tots els seus factors. Determinar si un nombre enter qualsevol entre l'1 i el 100 és múltiple d'un altre nombre d'un dígit. Determinar si un nombre enter qualsevol entre l'1 i el 100 és primer o compost.

Generar i analitzar patrons

5. Crear un patró de nombres o figures que segueixi una norma determinada. Identificar les característiques evidents d'aquest patró que no siguin explícites en la norma. *Per exemple, si comptem de tres en tres començant per l'1, generarem una seqüència numèrica i observarem que els nombres s'alternen entre nombres parells i imparells. Explicar, de manera informal, per què els nombres s'alternen d'aquesta manera.*

Nombres i operacions amb decimals

2

4.nBt

Generalitzar els coneixements del valor posicional per als nombres enters de diversos dígit

1. Observar que en un nombre enter de diversos dígit, un dígit en una posició val deu vegades més el de la seva dreta. *Per exemple, observem que $700 \div 70 = 10$ aplicant els conceptes de valor posicional i de divisió.*
2. Llegir i escriure nombres enters de diversos dígit fent servir numerals amb decimals, noms de nombres escrits i formes expandides. Comparar dos nombres de diversos dígit basant-nos en el seu valor posicional. Utilitzar els símbols $>$, $=$ i $<$ per representar les comparacions.
3. Aplicar el valor posicional per arrodonir nombres enters amb diversos dígit en qualsevol posició.

Aplicar el valor posicional i les propietats de les operacions per fer càlculs aritmètics de diversos dígit

4. Sumar i restar nombres enters de diversos dígit amb fluïdesa fent servir l'algoritme estàndard.
5. Multiplicar un nombre enter de fins a quatre dígit per un nombre enter d'un dígit i multiplicar dos nombres enters de dos dígit amb estratègies basades en el valor posicional i les propietats de les operacions. Il·lustrar i explicar el càlcul amb equacions, disposicions rectangulars i/o models d'àrea.

¹Vegeu la taula 2 del glossari.²A grau 4, les expectatives en aquest camp es limiten a nombres enters inferiors o iguals a 1.000.0000 .

6. Trobar quocients i residus de nombres enters amb dividendes de més de quatre dígits i un divisor d'un dígit amb estratègies basades en el valor posicional, les propietats de les operacions i/o la relació entre la multiplicació i la divisió. Il·lustrar i explicar el càlcul amb equacions, disposicions rectangulars i/o models d'àrea.

Nombres i operacions—fraccions

3

4.nf

Ampliar els coneixements de l'equivalència i ordenació de fraccions

1. Explicar per què una fracció a/b equival a una fracció $(n \times a)/(n \times b)$. Fer servir una representació gràfica de la fracció i posar atenció a la diferència entre el nombre i la mida de les parts, encara que totes dues fraccions mesurin el mateix. Fer servir aquest principi per observar i generar fraccions equivalents.
2. Comparar dues fraccions amb numeradors i denominadors diferents (p.e. crear denominadors o numeradors comuns) o comparant una fracció de referència, com ara $1/2$. Observar que les comparacions només són vàlides quan totes dues fraccions fan referència al mateix tot. Anotar els resultats de les comparacions amb els símbols $>$, $=$ o $<$ i raonar les conclusions, per exemple, mitjançant una representació gràfica de la fracció.

Construir fraccions a partir de fraccions unitàries aplicant i ampliant els coneixements previs sobre les operacions amb nombres enters

3. Entendre una fracció a/b representant $a > 1$ com una suma de fraccions $1/b$.
 - a. Entendre la suma i la resta de fraccions com una unió i una separació de parts d'un mateix tot.
 - b. Descompondre, de diverses maneres, una fracció en una suma de fraccions amb el mateix denominador. Representar cada descomposició amb una equació. Raonar les descomposicions fent servir una representació gràfica de la fracció. *Exemples:* $3/8 = 1/8 + 1/8 + 1/8$; $3/8 = 1/8 + 2/8$; $21/8 = 1 + 1 + 1/8 = 8/8 + 8/8 + 1/8$.
 - c. Sumar i restar nombres mixtos amb denominadors iguals. Per exemple, substituir cada nombre mixt per una fracció equivalent i/o aplicar les propietats de les operacions i la relació entre la suma i la resta.
 - d. Resoldre enunciats en què s'hagi de sumar i restar fraccions del mateix tot amb denominadors iguals. Per exemple, fer servir representacions gràfiques de les fraccions i equacions per representar el problema.
4. Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre la multiplicació per multiplicar una fracció per un nombre enter.
 - a. Entendre una fracció a/b com a múltiple d' $1/b$. *Per exemple, fer servir una representació visual de la fracció per a $5/4$ i veure'l com el producte de $5 \times (1/4)$. Anotar la conclusió amb l'equació $5/4 = 5 \times (1/4)$.*
 - b. Entendre un múltiple d' a/b com a múltiple d' $1/b$ i fer-ho servir per multiplicar una fracció per un nombre enter. *Per exemple, fer servir una representació gràfica de la fracció per expressar $3 \times (2/5)$ com a $6 \times (1/5)$ i identificar aquest producte com a $6/5$. (En general, $n \times (a/b) = (n \times a)/b$).*
 - c. Resoldre problemes en què s'hagi de multiplicar una fracció per un nombre enter, per exemple, fent servir representacions gràfiques de les fraccions i equacions per representar el problema. *Per exemple, si en una festa on hi ha cinc persones, cada persona es menja $3/8$ de quilo de carn, quants quilos de carn es necessiten? Entre quins dos nombres enters hi ha la resposta?*

³En aquest camp, les expectatives de grau 4 es limiten a fraccions amb els denominadors 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 i 100.

Entendre la notació decimal de fraccions i comparar fraccions decimals

- Expressar una fracció amb denominador 10 com una fracció equivalent amb denominador 100 i fer servir aquesta tècnica per sumar dues fraccions amb denominadors 10 i 100 respectivament ⁴. Per exemple, expressar $3/10$ com $30/100$ i fer l'operació $3/10 + 4/100 = 34/100$.
- Fer servir la notació de fraccions amb els denominadors 10 o 100. Per exemple, reescriure 0,62 com a $62/100$, descriure una longitud com a 0,62 metres i situar 0,62 en una línia gràfica.
- Comparar dos nombres decimals fins a les centèsimes i raonar la seva mida. Observar que les comparacions només són vàlides quan tots dos decimals fan referència al mateix tot. Anotar els resultats de les comparacions amb els símbols $>$, $=$ o $<$ i justificar les conclusions, p.e. amb una representació gràfica.

Mesurament i dades

4.MD

Resoldre problemes en què s'hagin de mesurar i convertir mesures d'una unitat major a una de menor

- Conèixer mides relatives d'unitats de mesura dins d'un sistema d'unitats en què hi hagi km, m, cm; kg, g; lb, oz.; l, ml; h, min i seg. Dins d'un sol sistema de mesura, expressar mesures en una unitat major a partir d'una unitat menor. Anotar els equivalents de mesures en una taula de dues columnes. Per exemple, saber que 1 peu és 12 vegades més gran que 1 polzada, expressar la longitud d'una serp de 4 peus com a 48 polzades, crear una taula de conversió de peus i polzades amb una llista amb les parelles de nombres (1, 12), (2, 24), (3, 36),...
- Aplicar les quatre operacions per resoldre problemes amb distàncies, intervals de temps, volums líquids, masses d'objectes i diners. Resoldre, a més, problemes amb fraccions o decimals senzills i problemes que requereixin expressar mesuraments en una unitat major a partir d'una unitat menor. Representar les quantitats dels mesuraments fent servir diagrames, com ara diagrames de línies numèriques que tinguin escala gràfica.
- Aplicar les fórmules d'àrea i de perímetre a rectangles en problemes matemàtics i reals. Per exemple, esbrinar l'amplada d'una habitació rectangular a partir de l'àrea i de la longitud o veure la fórmula d'àrea com una fracció de multiplicació amb un factor desconegut.

Representar i interpretar les dades

- Fer un gràfic de línia per presentar un conjunt de dades de mesuraments en fraccions d'una unitat ($1/2$, $1/4$, $1/8$). Resoldre problemes amb sumes i restes de fraccions fent servir la informació que donin els gràfics de línia. Per exemple, a partir d'un gràfic de línia, localitzar i interpretar la diferència de longitud entre els especimens més llargs i els més curts d'una col·lecció d'insectes.

Mesurament geomètric: entendre els conceptes d'angles i mesurar angles

- Identificar els angles com a figures geomètriques que es formen sempre que dues semirectes tenen el mateix punt d'origen i entendre els conceptes de mesurament d'angles:
 - Un angle es mesura en referència a un cercle, el centre del qual es troba en el punt d'origen de les semirectes. Cal considerar la fracció de l'arc circular entre els punts on les dues semirectes es creuen amb el cercle. Un angle que rota $1/360$ d'un cercle s'anomena "angle d'un grau" i es pot utilitzar per mesurar angles.
 - Un angle que rota n angles d'un grau té una mesura d'angle de n graus.

⁴En general, els alumnes que saben generar fraccions equivalents saben desenvolupar estratègies per sumar fraccions amb denominadors diferents. Tot i que, en principi, la suma i la resta amb denominadors diferents no és un requisit d'aquest curs.

6. Mesurar angles en graus enters amb un transportador. Dibuixar angles d'una mesura concreta.
7. Identificar la mesura d'angles com una addició. Quan es descompon un angle en parts que no se superposen, la mesura d'angle del total és la suma de les mesures d'angle de les parts. Resoldre problemes matemàtics i reals on s'hagin de fer sumes i restes per trobar els angles desconeguts d'un diagrama. Fer servir una equació amb un símbol que representi la mesura d'angle desconeguda.

Geometria

4.G

Traçar i identificar línies i angles i classificar figures segons les propietats de les seves línies i els seus angles

1. Dibuixar punts, línies, segments, semirectes, angles (aguts, rectes i obtusos) i línies perpendiculars i paral·leles. Identificar-los en figures bidimensionals.
2. Classificar figures bidimensionals segons la presència o absència de línies perpendiculars o paral·leles o la presència o absència d'angles d'una mida concreta. Veure els triangles rectangles com a una categoria i identificar-los.
3. Reconèixer una recta simètrica d'una figura bidimensional com una línia que travessa la figura i que fa que es pugui doblegar i que totes dues parts encaixin. Identificar figures simètriques i traçar rectes simètriques.

Matemàtiques | Grau 5 (10-11 anys)

A grau 5, les classes s'haurien de centrar en tres àrees crítiques: (1) fer sumes i la restes de fraccions amb fluïdesa i desenvolupar la multiplicació de fraccions i de la divisió de fraccions en casos limitats (fraccions unitàries dividides per nombres enters i nombres enters dividits per fraccions unitàries); (2) fer divisions amb divisors de dos dígit, integrar les fraccions decimals al sistema de valor decimal, saber fer operacions amb decimals fins a les centèsimes i fer operacions amb nombres enters i decimals amb fluïdesa; i (3) desenvolupar la comprensió del volum.

(1) Els alumnes apliquen les fraccions i els models de fraccions per representar la suma i la resta de fraccions amb denominadors diferents com a càlculs equivalents amb denominadors iguals. Calculen sumes i restes de fraccions amb més fluïdesa i en fan estimacions raonables. Els alumnes també fan servir el significat de les fraccions, de la multiplicació i de la divisió i la relació entre la multiplicació i la divisió per entendre i explicar per què els processos de multiplicar i dividir fraccions són correctes (Aquest procés es limita a divisions de fraccions unitàries per nombres enters i nombres enters per fraccions unitàries).

(2) Els alumnes comencen a entendre per què els procediments de la divisió funcionen segons el significat dels numerals decimals i de les propietats de les operacions. Consoliden la fluïdesa en les sumes, restes, multiplicacions i divisions de diversos dígit. Apliquen els coneixements sobre els models decimals, la notació decimal i les propietats de les operacions per sumar i restar decimals fins a les centèsimes. A més, fan aquests càlculs amb més fluïdesa i fan estimacions raonables dels seus resultats. Els alumnes apliquen la relació entre els decimals i les fraccions, així com la relació entre els decimals finits i els decimals enters (p.e. un decimal finit multiplicat per una potència de 10 és un nombre enter) per entendre i explicar per què els procediments per multiplicar i dividir decimals finits són correctes. A més, calculen productes i quocients de decimals fins a les centèsimes de forma eficaç i precisa.

(3) Els alumnes identifiquen el volum com un atribut d'un espai tridimensional. Entenen que el volum es pot mesurar si es troba el nombre total d'unitats de volum de la mateixa mida necessàries per ocupar un espai sense buits ni unitats superposades. A més, comprenen que un cub d'una unitat 1 per una unitat 1 per una unitat 1 és la unitat estàndard per mesurar el volum. Seleccionen les unitats, les estratègies i les eines adequades per resoldre problemes en què s'hagi de calcular i mesurar el volum. També descomponen figures tridimensionals i esbrinen el volum de prismes rectangulars rectes mitjançant la visualització en capes de cubs. També mesuren atributs necessaris de figures per tal de determinar volums i resoldre problemes matemàtics i reals.

Grau 5 (10-11 anys)

Operacions i pensament algebraic

- Escriure i interpretar expressions numèriques
- Analitzar patrons i relacions

Nombres i operacions amb decimals

- Entendre el sistema de valor posicional
- Realitzar operacions amb nombres enters de diversos dígit i amb decimals fins a les centèsimes

Nombres i operacions—fraccions

- Fer servir fraccions equivalents com a estratègia per sumar i restar fraccions
- Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre la multiplicació i la divisió per multiplicar i dividir fraccions

Mesurament i dades

- Convertir unitats de mesura iguals en un sistema de mesura determinat
- Representar i interpretar les dades
- Mesurament geomètric: comprendre els conceptes de volum i relacionar el volum amb la multiplicació i la suma

Geometria

- Dibuixar punts en un pla de coordenades per resoldre problemes matemàtics i reals
- Classificar figures bidimensionals en dues categories en funció de les seves propietats

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Operacions i pensament algebraic

5.OP

Escriure i interpretar expressions numèriques

1. Fer servir parèntesis, claudàtors i claus en expressions numèriques i avaluar expressions amb aquests símbols.
2. Escriure expressions senzilles que registrin els càlculs amb nombres i interpretar expressions numèriques sense avaluar-les. *Per exemple, saber expressar l'enunciat "sumar vuit i set i multiplicar per dos" com $2 \times (8+7)$. Reconèixer que $3 \times (18.932+921)$ és tres vegades $18.932+921$ sense haver de calcular la suma o els productes indicats.*

Analitzar patrons i relacions

3. Generar dos patrons numèrics amb dues normes determinades. Identificar les relacions aparents entre termes corresponents. Formar parells ordenats formats per termes corresponents de tots dos patrons i dibuixar els parells ordenats en un pla de coordenades. *Per exemple, si comptem de tres en tres començant pel nombre 0 i de sis en sis començant pel 0, generarem una seqüència numèrica i observarem que els nombres d'una seqüència són el doble que els nombres que els corresponen a l'altra seqüència. Cal explicar-ne, de manera informal, el motiu.*

Nombres i operacions amb decimals

5.NOD

Entendre el sistema de valor posicional

1. Reconèixer que en un nombre de diversos dígit, un dígit que es troba en una posició determinada val 10 vegades més que el dígit que té a la seva dreta i 1/10 del valor del dígit que té a la seva esquerra.
2. Explicar patrons en la quantitat de zeros que tindrà el producte quan multipliquem un nombre per potències de 10 i explicar patrons en el posicionament que tindrà la coma decimal quan multipliquem o dividim un decimal per una potència de 10. Cal fer servir exponents enters per indicar les potències de 10.
3. Llegir, escriure i comparar decimals fins a les mil·lèsimes.
 - a. Llegir i escriure decimals fins a les mil·lèsimes fent servir numerals decimals, nombres escrits i formes expandides (p.e. $347,39 = 3 \times 100 + 4 \times 10 + 7 \times 1 + 3 \times (1/10) + 9 \times (1/100) + 2 \times (1/1000)$).
 - b. Comparar dos decimals fins a les mil·lèsimes basant-se en els significats dels dígit que hi ha a cada posició. Fer servir els símbols $>$, $=$ i $<$ per representar les comparacions.
4. Aplicar els coneixements sobre el valor posicional per arrodonir decimals en qualsevol posició.

Realitzar operacions amb nombres enters de diversos dígit i amb decimals fins a les centèsimes

1. Multiplicar nombres enters de diversos dígit amb fluïdesa fent servir l'algorisme estàndard.
2. Trobar quocients enters de nombres enters amb dividends de fins a quatre dígit i divisors de dos dígit aplicant estratègies basades en el valor posicional, les propietats de les operacions i/o la relació entre la multiplicació i la divisió. Il·lustrar i explicar el càlcul mitjançant equacions, disposicions rectangulars i/o models d'àrea.
3. Sumar, restar, multiplicar i dividir decimals fins a les centèsimes aplicant models concrets o dibuixos i estratègies basades en el valor posicional, les propietats de les operacions i/o la relació entre la suma i la resta. Relacionar l'estratègia amb un mètode escrit i explicar el raonament que s'ha seguit.

Nombres i operacions-fraccions

5.NOF

Fer servir fraccions equivalents com a estratègia per sumar i restar fraccions

1. Sumar i restar fraccions amb denominadors diferents (que inclouen els nombres mixtos) substituint les fraccions en qüestió per fraccions equivalents perquè es produeixi una suma o resta de fraccions equivalent amb denominadors iguals. *Per exemple, $2/3 + 5/4 = 8/12 + 15/12 = 23/12$ (En general, $a/b + c/d = (ad+bc)/bd$).*
2. Resoldre problemes en què s'hagin de sumar i restar fraccions que es refereixin al tot i que també continguin casos de denominadors diferents. Es pot presentar el problema amb representacions gràfiques de fraccions o amb equacions. També es poden fer servir fraccions de referència i el sentit numèric de les fraccions per calcular-les mentalment i raonar-ne les respostes. *Per exemple, reconèixer un resultat incorrecte $2/5 + 1/2 = 3/7$ observant que $3/7 < 1/2$.*

Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre la multiplicació i la divisió per multiplicar i dividir fraccions

3. Interpretar una fracció com a una divisió del numerador pel denominador ($a/b = a \div b$). Resoldre problemes en què s'hagin de dividir nombres enters i que portin a respostes en forma de fraccions o nombres mixtos. Es pot presentar el problema amb representacions gràfiques de fraccions o amb equacions. *Per exemple, interpretar $3/4$ com el resultat de la divisió de tres entre quatre, observar que si multipliquem $3/4$ per 4 ens donarà 3 i que quan es comparteixen 3 enters en parts iguals entre 4 persones, cadascuna té una porció de la mida $3/4$. Si nou persones volen compartir un sac d'arròs de 50 quilos en parts iguals, quants quilos d'arròs li tocarà a cada persona? Entre quins dos nombres enters és la teva resposta?*
4. Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre la multiplicació per multiplicar una fracció o nombre enter per una fracció.
 - a. Interpretar el producte $(a/b) \times q$ com a parts d'una partició de q en b parts iguals i com el resultat d'una seqüència d'operacions *Per exemple, fer servir una representació gràfica de la fracció per mostrar que $(2/3) \times 4 = 8/3$ i crear un context per a aquesta equació. Fer el mateix amb $(2/3) \times (4/5) = 8/15$ (En general, $(a/b) \times (c/d) = ac/bd$).*
 - b. Trobar l'àrea d'un rectangle amb longituds de costat en nombres fraccionaris dividint-lo en quadrats unitat, amb longituds de costat apropiades, i demostrar que l'àrea és la mateixa que si multipliquéssim les longituds de costat. Multiplicar longituds de costat en nombres fraccionaris per trobar àrees de rectangles i representar productes de fraccions com a àrees rectangulars.
5. Interpretar la multiplicació com a un canvi de mida:
 - a. Comparar la mida d'un producte amb la mida d'un factor d'acord amb la mida de l'altre factor sense fer la multiplicació indicada.
 - b. Explicar per què quan multipliquem un nombre determinat per una fracció major d'1 el producte és major que aquest nombre (i reconèixer la multiplicació per nombres enters majors d'1 com a un cas familiar); explicar per què quan multipliquem un nombre determinat per una fracció menor d'1 el producte és menor que aquest nombre; i relacionar el principi de l'equivalència entre fraccions $a/b = (n \times a)/(n \times b)$ amb l'efecte de multiplicar $a/b \times 1$.
6. Resoldre problemes reals en què s'hagin de multiplicar fraccions i nombres mixtos. Per presentar el problema es poden fer servir representacions gràfiques de fraccions o equacions.
7. Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre la divisió per dividir fraccions unitàries per nombres enters i nombres enters per fraccions unitàries¹.
 - a. Interpretar la divisió d'una fracció unitària per un nombre enter que no sigui zero i calcular-ne els quocients. *Per exemple, crear un enunciat per a $(1/3) \div 4$ i fer servir una representació gràfica de la fracció per mostrar el quocient. Aplicar la relació entre la multiplicació i la divisió per explicar que $(1/3) \div 4 = 1/12$ perquè $(1/12) \times 4 = 1/3$.*

¹Generalment, els alumnes capaços de multiplicar fraccions poden desenvolupar estratègies per dividir fraccions si raonen sobre la relació entre la multiplicació i la divisió. Això no obstant, saber dividir una fracció per una altra no és un requisit d'aquest grau.

- b. Interpretar la divisió d'un nombre enter per una fracció unitària i calcular-ne els quocients. *Es pot crear un context per a $4 \div (1/5)$ i fer servir una representació gràfica de la fracció per mostrar el quocient. Aplicar la relació entre la multiplicació i la divisió per explicar que $4 \div (1/5) = 20$ perquè $20 \times (1/5) = 4$.*
- c. Resoldre problemes reals en què s'hagin de dividir fraccions unitàries per nombres enters que no siguin zero i nombres enters per fraccions unitàries. Per presentar el problema es poden fer servir representacions gràfiques de fraccions o equacions. *Per exemple, quanta xocolata li tocarà a cada persona si es reparteix $1/2$ quilo de xocolata entre tres persones? Quantes racions d' $1/3$ de tassa hi ha en dues tasses de panses?*

Mesurament i dades

5.MD

Convertir unitats de mesura iguals en un sistema de mesura determinat

1. Convertir les unitats de mesura estàndard de diferents mides d'un sistema de mesura determinat (p.e. convertir 5 cm a 0,05 m) i fer servir aquestes conversions per resoldre problemes matemàtics i reals de diverses operacions.

Representar i interpretar les dades

2. Crear un gràfic de línia per representar un grup de dades de mesurament en fraccions d'una unitat ($1/2$, $1/4$, $1/8$). Fer servir operacions amb fraccions d'aquest curs per resoldre problemes en què s'obtingui la informació en diagrames de línies. *Per exemple, en gots de precipitats idèntics i diferents mesures de líquids, trobar la quantitat de líquid que hi hauria a cada got si la quantitat total de tots els gots de precipitats fos redistribuïda en parts iguals.*

Mesurament geomètric: entendre els conceptes de volum i relacionar el volum amb la multiplicació i la suma

3. Reconèixer el volum com un atribut de figures sòlides i entendre els conceptes de mesura de volum.
 - a. Un cub amb 1 unitat de longitud de costat s'anomena "cub unitat", té "una unitat cúbica" de volum i es pot utilitzar per mesurar volums.
 - b. Una figura sòlida que es pot omplir sense espais buits o superposats fent servir n cubs unitat té un volum de n unitats cúbiques.
4. Mesurar volums comptant cubs unitat i fent servir centímetres cúbics, polzades cúbiques i peus cúbics, així com altres unitats improvisades.
5. Relacionar el volum amb les operacions de multiplicació i suma i resoldre problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular el volum.
 - a. Trobar el volum d'un prisma rectangular recte amb longituds d'aresta enteres omplint-lo de cubs unitat i demostrar que el volum és el nombre que tindríem si multipliquéssim les longituds de les arestes o si multipliquéssim l'alçada per l'àrea de la base. Presentar els tres productes enters com a volums, per exemple, per representar la propietat associativa de la multiplicació.
 - b. Aplicar les fórmules $V = \text{longitud} \times \text{amplada} \times \text{alçada}$ i $V = b \times a$ per trobar el volum de prismes rectangulars rectes de longituds d'aresta enteres a l'hora de resoldre problemes matemàtics i reals.
 - c. Reconèixer el volum com a additiu. Trobar el volum de figures sòlides compostes per dos prismes rectangulars rectes no superposats sumant els volums de les parts. Aplicar aquesta tècnica per resoldre problemes reals.

Geometria

5.G

Dibuixar punts en un pla de coordenades per resoldre problemes matemàtics i reals

1. Fer servir dues rectes numèriques perpendiculars, anomenades eixos, per definir un pla de coordenades, la intersecció de les línies o origen del qual ha de coincidir amb el 0 de cada línia. Utilitzar un punt determinat sobre el pla amb dos nombres ordenats, que reben el nom de coordenades. Entendre que el primer nombre indica quanta distància s'ha de recórrer des de l'origen en direcció a un eix i que el segon indica la distància que s'ha de recórrer en direcció al segon eix perquè els noms de tots dos eixos i les coordenades es corresponguin (p.e. eix x i coordenada x , eix y i coordenada y).
2. Representar problemes matemàtics i reals dibuixant punts en el primer quadrant del pla de coordenades i interpretar valors de punts coordinats en aquest context.

Classificar figures bidimensionals en dues categories en funció de les seves propietats

3. Entendre que els atributs d'una categoria de figures bidimensionals també pertanyen a totes les subcategories d'aquella categoria. *Per exemple, tots els rectangles tenen quatre angles rectes. Per tant, si els quadrats són rectangles, tots els quadrats tenen quatre angles rectes.*
4. Classificar figures bidimensionals en una jerarquia en funció de les seves propietats.

Matemàtiques | Grau 6 (11-12 anys)

A grau 6, les classes s'haurien de centrar en quatre àrees crítiques: (1) relacionar la raó i la taxa amb la multiplicació i divisió de nombres enters i fer servir els conceptes de raó i taxa per resoldre problemes; (2) assolir el concepte de divisió de fraccions i ampliar el concepte de nombre al sistema de nombres racionals, que inclou l'aprenentatge dels nombres negatius; (3) escriure, interpretar i fer servir expressions i equacions; i (4) desenvolupar la comprensió del pensament estadístic.

(1) Els alumnes fan servir la multiplicació i la divisió per resoldre problemes de raó i taxa sobre quantitats. Veuen raons i taxes equivalents que deriven i s'expandeixen de dues files (o columnes) en una taula de multiplicar i analitzen dibuixos senzills que indiquen la mida relativa de les quantitats. Gràcies a aquests processos, relacionen la multiplicació i la divisió amb les raons i les taxes. A més, amplien la dimensió dels problemes, la resposta dels quals deriva d'una multiplicació i una divisió, i relacionen raons i fraccions. Els alumnes resolen una gran varietat de problemes en què hi ha raons i taxes.

(2) Els alumnes fan servir el significat de les fraccions, el significat de la multiplicació i la divisió i la relació entre la multiplicació i la divisió per entendre i explicar els procediments per dividir fraccions. Els alumnes utilitzen aquestes operacions per resoldre problemes. A més, amplien els coneixements previs dels nombres i el seu ordre al sistema dels nombres racionals, que inclou els nombres racionals negatius i, especialment, els enters negatius. Finalment, raonen sobre l'ordre i el valor absolut dels nombres racionals i sobre el posicionament de punts en els quatre quadrants del pla de coordenades.

(3) Els alumnes comprenen l'ús de les variables en expressions matemàtiques. Escriuen expressions i equacions que corresponen a determinades situacions, avaluen les expressions i fan servir expressions i fórmules per resoldre problemes. També entenen que les expressions de formes diferents poden ser equivalents i apliquen propietats de les operacions per reescriure expressions de formes equivalents. A més, saben que les solucions d'una equació són els valors de les variables que fan que l'equació sigui vertadera. Els alumnes apliquen les propietats de les operacions i la idea d'igualtat en ambdós costats d'una equació per resoldre equacions senzilles. Per últim, creen i analitzen taules, com les taules de quantitats de raons equivalents, i fan servir equacions (com ara $3x=y$) per descriure relacions entre quantitats.

(4) Els alumnes comencen a desenvolupar la capacitat per pensar de forma estadística en ampliar i reforçar la comprensió dels nombres. Reconeixen que és possible que una distribució de dades no tingui un centre definit i que les diferents maneres de mesurar-lo donen valors diferents. La mediana mesura el centre si entenem que aquest és, aproximadament, el valor que es troba al mig. La mitjana mesura el centre si entenem que aquesta és el valor que tindria cada punt de dades si el total de valors de les dades es redistribuís de manera equitativa i si entenem que és un punt d'equilibri. Els alumnes reconeixen que una mesura de dispersió (amplitud interquartílica o desviació absoluta respecte a la mitjana) també pot ser útil a l'hora de resumir dades, perquè dos conjunts de dades clarament diferenciats poden tenir la mateixa mediana i mitjana però es poden distingir per la seva dispersió. Els alumnes aprenen a descriure i a resumir conjunts de dades numèriques, identificar grups, puntes, espais buits i simetria d'acord amb el context en què s'han recollit les dades.

Els alumnes de grau 6 raonen sobre les relacions entre figures, aplicant allò que han après de l'àrea a primària, per determinar l'àrea, l'àrea de superfície i el volum. Troben àrees de triangles rectangles, altres triangles i quadrilàters especials dividint aquestes figures, canviant de lloc, col·locant o traient peces i relacionant les figures amb els rectangles. Gràcies a aquests mètodes, els alumnes debaten, desenvolupen i justifiquen fórmules per trobar les àrees de triangles i paral·lelograms. A més, troben les àrees de polígons i les àrees de superfície de prismes i piràmides dividint-los en parts, l'àrea de les quals puguin esbrinar. Raonen sobre prismes rectangulars rectes amb longituds de costat en nombres fraccionaris per ampliar les fórmules i trobar-ne el volum. Dibuixen polígons al pla de coordenades per preparar-se per a grau 7, on hauran de treballar amb dibuixos i construccions a escala.

Grau 6 (11-12 anys)

Raons i relacions proporcionals

- Entendre els conceptes de raó i fer-los servir per resoldre problemes

El sistema numèric

- Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre la multiplicació i la divisió per dividir fraccions entre fraccions
- Fer càlculs amb nombres de diversos dígitos amb fluïdesa i trobar factors i múltiples comuns
- Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre els nombres al sistema de nombres racionals

Expressions i equacions

- Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre l'aritmètica a expressions algebraïques
- Raonar i resoldre equacions i inequacions d'una variable
- Representar i analitzar relacions quantitatives entre variables dependents i independents

Geometria

- Resoldre problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular l'àrea, l'àrea de superfície i el volum

Estadística i probabilitat

- Introduir la dispersió estadística
- Resumir i descriure distribucions

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Raons i relacions proporcionals

6.RRP

Entendre els conceptes de raó i fer-los servir per resoldre problemes

- Entendre el concepte de raó i fer-lo servir per descriure una relació entre dues quantitats. *Per exemple: “La raó d’ales i becs a la gàbia del zoo era de 2:1, perquè per cada 2 ales hi havia 1 bec. Per cada vot que va rebre el candidat A, el candidat C en va rebre gairebé 3”.*
- Entendre el concepte d’una taxa unitària a/b associada a una raó $a:b$ amb $b \neq 0$ i fer servir el llenguatge de taxa en un context de relació. *Per exemple: “Aquesta recepta té una raó de 3 tasses de farina per 4 tasses de sucre, per tant, hi ha $3/4$ de tassa de farina per cada tassa de sucre. Vam pagar 75 dòlars per 15 hamburgueses, una taxa de 5 dòlars per hamburguesa”.*
- Aplicar la lògica de raó i taxa per resoldre problemes matemàtics i reals. Per exemple, raonar sobre taules amb raons equivalents, diagrames de segments, diagrames de línia de dos nombres o equacions.
 - Crear taules de raons equivalents relacionant quantitats amb mesures enteres, trobar els valors que falten a les taules i situar tots dos nombres al sistema de coordenades. Utilitzar taules per comparar les raons.
 - Resoldre problemes de taxa unitària, com ara els de preu unitari i de velocitat constant. *Per exemple, si vam trigar 7 hores per segar 4 trossos de terra, quants trossos de terra podríem segar en 35 hores a aquest ritme? A quin ritme se segueix?*
 - Trobar un percentatge d’una quantitat com una taxa per 100 (p.e. el 30% d’una quantitat significa 30/100 vegades la quantitat) i resoldre problemes en què s’hagi de trobar el tot a partir d’una part o del percentatge.
 - Utilitzar el concepte de raó per convertir unitats de mesura i manipular i transformar unitats de manera apropiada quan es multipliquin i es divideixin quantitats.

El sistema numèric

6.SN

Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre la multiplicació i la divisió per dividir fraccions entre fraccions

- Interpretar i calcular quocients de fraccions i resoldre problemes en què s’hagin de dividir fraccions entre si. Fer servir representacions gràfiques de fraccions i equacions per representar el problema. *Per exemple, es pot crear un enunciat per a $(2/3) \div (3/4)$ i fer servir la representació gràfica d’una fracció per mostrar-ne el quocient. També es pot fer servir la relació entre la multiplicació i la divisió per explicar que $(2/3) \div (3/4) = 8/9$ perquè $3/4$ de $8/9$ és $2/3$ (Generalment, $(a/b) \div (c/d) = ad/bc$). Quanta xocolata tocarà a cadascú si tres persones comparteixen $1/2$ quilo de xocolata en parts iguals? Quantes racions de $3/4$ de tassa hi ha en $2/3$ de tassa de iogurt? Quina amplada té una franja de terra que té $3/4$ de quilòmetre de longitud i una àrea de $1/2$ quilòmetre quadrat?*

Fer càlculs amb nombres de diversos dígit amb fluïdesa i trobar factors i múltiples comuns

- Dividir nombres de diversos dígit amb fluïdesa fent servir l’algoritme estàndard.
- Sumar, restar, multiplicar i dividir amb fluïdesa decimals de diversos dígit fent servir l’algoritme estàndard per a cada operació.
- Trobar el màxim comú divisor de dos nombres enters menors o iguals a 100 i el mínim comú múltiple de dos nombres enters menors o iguals a 12. Aplicar la propietat distributiva per expressar una suma de dos nombres enters entre l’1 i el 100 amb un divisor comú com a múltiple d’una suma de dos nombres enters sense divisor comú. *Per exemple, expressar $36+8$ com $4(9+2)$.*

¹En aquest grau, les taxes unitàries es limiten a fraccions senzilles.

Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre els nombres al sistema de nombres racionals

5. Entendre que els nombres positius i negatius s'utilitzen de manera conjunta per descriure quantitats amb direccions o valors oposats (p.e. les temperatures sobre/sota zero, l'elevació sobre/sota el nivell del mar, crèdits/dèbits, descàrrega elèctrica positiva/negativa), utilitzar nombres positius i negatius per representar quantitats en situacions reals i explicar el significat de 0 en cada context.
6. Entendre un nombre racional com un punt en una recta numèrica. Ampliar els diagrames de rectes numèriques i coordinar eixos, semblants als que s'han vist en cursos anteriors, per representar punts en una recta i en un pla amb coordenades negatives.
 - a. Reconèixer signes de nombres oposats que indiquin posicions en costats oposats de 0 en una recta numèrica; reconèixer que l'oposat de l'oposat d'un nombre és el mateix nombre, és a dir, $-(-3) = 3$, i que zero és l'oposat de si mateix.
 - b. Entendre que els nombres de dos parells ordenats indiquen punts en els quadrants del sistema de coordenades; reconèixer que quan dos parells ordenats es diferencien tan sols pels signes, les posicions dels punts estan relacionades per reflexions que passen per un o per tots dos eixos.
 - c. Trobar i col·locar nombres enters i altres nombres racionals en un diagrama d'una recta numèrica horitzontal o vertical; trobar i col·locar parells de nombres enters i altres nombres racionals en un pla de coordenades.
7. Entendre l'ordre i el valor absolut dels nombres racionals.
 - a. Interpretar la inequació com la posició relativa de dos nombres en una recta numèrica. *Per exemple, interpretar $-3 > -7$ com l'afirmació que -3 està situat a la dreta de -7 en una recta numèrica orientada d'esquerra a dreta.*
 - b. Escriure, interpretar i explicar l'ordre de nombres racionals en contextos reals. *Per exemple, escriure $-3^{\circ}\text{C} > -7^{\circ}\text{C}$ per expressar que -3°C és més calent que -7°C .*
 - c. Entendre el valor absolut d'un nombre racional com la seva distància respecte a 0 en la recta numèrica i interpretar el valor absolut com la magnitud d'una quantitat positiva o negativa en una situació real. *Per exemple, per a un saldo de -30 euros, es pot escriure $|-30|=30$ per descriure el deute en euros.*
 - d. Distingir entre comparacions de valor absolut i l'ordre. *Per exemple, reconèixer que un saldo inferior a -30 euros representa un deute superior a 30 euros.*
8. Resoldre problemes matemàtics i reals dibuixant punts als quatre quadrants del pla de coordenades. Incloure l'ús de coordenades i del valor absolut per trobar distàncies entre punts que tinguin la primera coordenada o la segona coordenada igual.

Expressions i equacions

6.EE

Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre l'àritmètica a expressions algebraïques

1. Escriure i avaluar expressions numèriques que tinguin exponents enters.
2. Escriure, llegir i avaluar expressions en què les lletres representin nombres.
 - a. Escriure expressions que representin operacions amb nombres i lletres en lloc de nombres. *Per exemple, expressar el càlcul "Restar y de 5" com $5-y$.*

- b. Identificar les parts d'una expressió fent servir termes matemàtics (suma, terme, producte, factor, quocient, coeficient) i veure una o més parts d'una expressió com una sola entitat. *Per exemple, descriure l'expressió $2(8+7)$ com un producte de dos factors i veure $(8+7)$ com una sola entitat i una suma de dos termes.*
- c. Avaluar expressions en funció dels valors específics de les seves variables. Incloure expressions que provenint de fórmules que s'utilitzin en problemes reals. Realitzar operacions aritmètiques, que inclouen aquelles que tenen exponents enters en l'ordre convencional, sense parèntesis per especificar un ordre en particular (ordre d'operacions). *Per exemple, es poden fer servir les fórmules $V=s^3$ i $A=6s^2$ per trobar el volum i l'àrea de superfície d'un cub, la longitud de costat del qual sigui $s=1/2$.*
3. Aplicar les propietats de les operacions per generar expressions equivalents. *Per exemple, aplicar la propietat distributiva a l'expressió $3(2+x)$ per produir l'expressió equivalent $6+3x$; aplicar la propietat distributiva a l'expressió $24x+18y$ per produir l'expressió equivalent $6(4x+3y)$; i aplicar les propietats de les operacions a $y+y+y$ per produir l'expressió equivalent $3y$.*
4. Identificar quan dues expressions són equivalents (és a dir, quan totes dues expressions es refereixen al mateix nombre, independentment del valor que representin). *Per exemple, les expressions $y+y+y$ i $3y$ són equivalents perquè es refereixen al mateix nombre, independentment de quin sigui.*

Raonar i resoldre equacions i inequacions d'una variable

5. Plantejar la resolució d'una equació o una inequació com el procés de respondre a una pregunta: quins valors d'un conjunt específic fan que l'equació o la inequació sigui vertadera? Fer servir la substitució per saber si un nombre d'un conjunt específic fa que una equació o una inequació sigui vertadera.
6. Fer servir variables per representar nombres i escriure expressions a l'hora de resoldre problemes matemàtics o reals; entendre que una variable pot representar un nombre desconegut o, en funció de la finalitat, pot representar qualsevol nombre d'un conjunt específic.
7. Escriure i resoldre equacions de la forma $x+p=q$ i $px=q$ en casos en què p , q i x siguin nombres racionals positius per resoldre problemes matemàtics i reals.
8. Escriure una inequació de la forma $x>c$ o $x<c$ per representar una restricció o una condició en un problema matemàtic o real. Reconèixer que les inequacions de la forma $x>c$ o $x<c$ tenen moltíssimes solucions i representar-les en rectes numèriques.

Representar i analitzar relacions quantitatives entre variables dependents i independents

9. Fer servir variables per representar dues quantitats d'un problema real que canvien l'una en funció de l'altra. Escriure una equació per expressar una quantitat, la variable dependent, i l'altra, la variable independent. Analitzar la relació entre la variable dependent i independent amb gràfics i taules i relacionar-les amb l'equació. *Per exemple, en un problema en què hi hagi un moviment a una velocitat constant, fer una llista i representar els parells ordenats de distàncies i temps i escriure l'equació $d=65t$ per representar la relació entre la distància i el temps.*

Geometria

6.G

Resoldre problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular l'àrea, l'àrea de superfície i el volum

1. Trobar l'àrea de triangles rectangles, altres triangles, quadrilàters especials i polígons formant rectangles o dividint-los en triangles i altres formes. Aplicar aquestes tècniques a l'hora de resoldre problemes matemàtics i reals.

2. Trobar el volum d'un prisma rectangular recte amb longituds d'aresta fraccionàries omplint-lo de cubs unitat, la longitud d'aresta de la fracció unitària del qual sigui adequada, i demostrar que el volum és el mateix que si es multipliquessin les longituds d'aresta del prisma. Aplicar les fórmules $V=l a a$ i $V=b a$ per trobar els volums de prismes rectangulars rectes amb longituds d'aresta fraccionàries per resoldre problemes matemàtics i reals.
3. Dibuixar polígons en un pla de coordenades a partir de les coordenades dels vèrtexs i fer-les servir per trobar la longitud de costat entre tots dos punts que tinguin la primera coordenada o la segona iguals. Aplicar aquestes tècniques a l'hora de resoldre problemes matemàtics i reals.
4. Representar figures tridimensionals amb xarxes formades per rectangles i triangles i fer-les servir per trobar l'àrea de superfície d'aquestes figures. Aplicar aquestes tècniques a l'hora de resoldre problemes matemàtics i reals.

Estadística i probabilitat

6.EP

Introduir la dispersió estadística

1. Reconèixer una pregunta estadística com aquella que anticipa la dispersió de les dades relacionades amb la pregunta i la té en compte en les respostes. *Per exemple, "Quants anys tinc?" no és una pregunta estadística, però "Quants anys tenen els alumnes de la meua escola?" sí, perquè anticipem la dispersió en les edats dels alumnes.*
2. Entendre que un conjunt de dades que s'han recollit per respondre a una pregunta estadística té una distribució i que aquesta es pot descriure segons la centralització, la dispersió i la forma general.
3. Reconèixer que una mesura de centralització d'un conjunt de dades numèriques resumeix els seus valors amb un sol nombre i que, en canvi, una mesura de variació descriu com varien els seus valors amb un sol nombre.

Resumir i descriure distribucions

4. Mostrar dades numèriques en punts d'una recta numèrica, que inclou diagrames de punts, histogrames i gràfics de caixa.
5. Resumir conjunts de dades numèriques en relació amb el seu context, com ara:
 - a. Notificar el nombre d'observacions.
 - b. Descriure les característiques de l'atribut en qüestió (p.e. explicar com s'ha mesurat i les unitats de mesura).
 - c. Aportar mesures de centralització quantitatives (mediana i/o mitjana) i dispersió (rang interquartílic i/o desviació absoluta de la mitjana). Descriure qualsevol patró general i qualsevol desviació notable en relació amb el context en què s'hagin recollit les dades.
 - d. Relacionar l'elecció de mesures de centralització i la dispersió amb la distribució de dades i el context en què s'han recollit.

Matemàtiques | Grau 7 (12-13 anys)

A grau 7, les classes s'haurien de centrar en quatre àrees crítiques: (1) desenvolupar la comprensió de les relacions proporcionals i aplicar-les; (2) desenvolupar la comprensió de les operacions amb nombres racionals i treballar amb expressions equacions lineals; (3) resoldre problemes en què hi hagi dibuixos a escala i construccions geomètriques informals i treballar amb figures bidimensionals i tridimensionals per resoldre problemes en què s'hagi de calcular l'àrea, l'àrea de superfície i el volum; i (4) fer inferències sobre poblacions basant-se en mostres.

(1) Els alumnes amplien els coneixements sobre el concepte de raó i apliquen el concepte de proporcionalitat per resoldre problemes d'una i de diverses operacions. Apliquen els coneixements de raó i proporcionalitat per resoldre una gran varietat de problemes amb percentatges, que inclouen problemes amb descomptes, interessos, taxes, propines i increments i disminucions de percentatges. Els alumnes resolen problemes sobre dibuixos a escala perquè relacionen les longituds corresponents entre els objectes o perquè les relacions de longitud d'un objecte es mantenen en objectes similars. A més, elaboren gràfics de relacions proporcionals i entenen la taxa unitària com una mesura de la inclinació de la recta, anomenada pendent, i distingeixen les relacions proporcionals d'altres relacions.

(2) Els alumnes desenvolupen una comprensió unificada dels nombres, del reconeixement de fraccions, dels decimals (de representació decimal finita o periòdica) i dels percentatges com a representacions variades de nombres racionals. Amplien la suma, la resta, la multiplicació i la divisió a tots els nombres racionals i mantenen les propietats de les operacions i les relacions entre la suma i la resta i la multiplicació i la divisió. En aplicar aquestes propietats i en veure els nombres negatius en situacions habituals (p.e. deute de diners o temperatures sota zero), els alumnes expliquen i interpreten les regles de la suma, la resta, la multiplicació i la divisió amb nombres negatius. També apliquen l'àritmètica dels nombres racionals quan formulen expressions i equacions en una variable i les fan servir per resoldre problemes.

(3) Els alumnes reprenen l'estudi de l'àrea, que van començar a grau 6, i resolen problemes en què s'hagi de calcular l'àrea i la circumferència d'un cercle i l'àrea de superfície d'objectes tridimensionals. A més, raonen sobre les relacions entre figures bidimensionals, mitjançant l'ús de dibuixos a escala, i construccions geomètriques informals i es familiaritzen amb les relacions entre els angles que es formen quan s'encreuen dues o més línies per preparar-se per treballar amb els conceptes de congruència i semblança a grau 8. Els alumnes treballen amb figures tridimensionals i les relacionen amb figures bidimensionals després d'examinar seccions transversals. També resolen problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular l'àrea, l'àrea de superfície i el volum d'objectes de dues i tres dimensions, entre els quals trobem triangles, quadrilàters, polígons, cubs i prismes rectes.

(4) Els alumnes segueixen treballant amb distribucions estadístiques senzilles, comparen dues distribucions de dades i resolen preguntes sobre diferències entre poblacions. Comencen a treballar amb mostres aleatòries senzilles per generar conjunts de dades i aprendre sobre la importància dels mostres representatius a l'hora de fer inferències.

Grau 7 (12-13 anys)

Raons i relacions proporcionals

- Analitzar relacions proporcionals i fer-les servir per resoldre problemes matemàtics i reals

El sistema numèric

- Aplicar i ampliar coneixements previs de les operacions amb fraccions per sumar, restar, multiplicar i dividir nombres racionals

Expressions i equacions

- Aplicar les propietats de les operacions per generar expressions equivalents
- Resoldre problemes matemàtics i reals amb expressions i equacions algebraïques

Geometria

- Dibuixar, construir i descriure figures geomètriques i explicar-ne les relacions
- Resoldre problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular la mesura, l'àrea, la superfície d'àrea i el volum de l'angle

Estadística i probabilitat

- Fer servir mostres aleatoris per fer inferències sobre una població
- Fer inferències comparatives informals sobre dues poblacions
- Investigar processos d'atzar i desenvolupar, utilitzar i avaluar models de probabilitat

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit .

Raons i relacions proporcionals

7.RP

Analitzar relacions proporcionals i fer-les servir per resoldre problemes matemàtics i reals

1. Calcular taxes unitàries associades a raons de fraccions, com ara raons de longituds, d'àrees i d'altres quantitats que es mesurin en unitats iguals o diferents. *Per exemple, si una persona camina $1/2$ quilòmetre cada $1/4$ d'hora, calcular la taxa unitària com la fracció complexa $^{1/2}/_{1/4}$ quilòmetres per hora, el mateix que 2 quilòmetres per hora.*
2. Reconèixer i representar relacions proporcionals entre quantitats.
 - a. Decidir si dues quantitats tenen una relació proporcional. Per exemple, es poden comprovar les raons equivalents en una taula o en la gràfica d'un pla de coordenades i observar si es tracta d'una línia recta que passa per l'origen.
 - b. Identificar la proporcionalitat constant (taxa unitària) en taules, gràfics, equacions, diagrames i descripcions orals de les relacions proporcionals.
 - c. Representar relacions proporcionals mitjançant equacions. *Per exemple, si el cost total t és proporcional al nombre n d'articles comprats al preu constant p , la relació entre el cost total i el nombre d'articles es pot expressar com $t=pn$.*
 - d. Explicar què significa un punt (x, y) a la gràfica d'una relació proporcional des del punt de vista de la situació. Posar una atenció especial als punts $(0, 0)$ i $(1, r)$, on r és la taxa unitària.
3. Fer servir relacions proporcionals per resoldre problemes amb taxes i percentatges de més d'una operació. *Exemples: interès simple, taxa, marges de benefici, gratificacions i comissions, honoraris, augments i disminucions de percentatges i percentatge d'error.*

El sistema numèric

7.SN

Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre les operacions amb fraccions per sumar, restar, multiplicar i dividir nombres racionals

1. Aplicar i ampliar coneixements previs sobre la suma i la resta per sumar i restar nombres racionals. Representar sumes i restes en una recta numèrica horitzontal i vertical.
 - a. Descriure situacions en què quantitats oposades es combinin per donar zero. *Per exemple, un àtom d'hidrogen té una càrrega 0 perquè els seus dos constituents tenen càrregues oposades.*
 - b. Entendre $p+q$ com al nombre situat a una distància $|q|$ de p , en la direcció positiva o negativa en funció de si q és positiu o negatiu. Demostrar que un nombre sumat al seu contrari és igual a 0 (inversos additius). Interpretar sumes de nombres racionals mitjançant la descripció de situacions reals.
 - c. Entendre la resta de nombres racionals com la suma de l'invers additiu, $p-q=p+(-q)$. Demostrar que la distància entre dos nombres racionals en una línia numèrica és el valor absolut de la seva diferència i aplicar aquest principi a contextos reals.
 - d. Aplicar les propietats de les operacions com a estratègies per sumar i restar nombres racionals.
2. Aplicar i ampliar els coneixements previs sobre la multiplicació i la divisió i sobre les fraccions per multiplicar i dividir nombres racionals.
 - a. Entendre que la multiplicació s'estén de les fraccions als nombres racionals, ja que les operacions satisfan les propietats de les operacions, especialment la propietat distributiva, que porta a productes com ara $(-1)(-1)=1$, i les regles per multiplicar nombres amb signes. Interpretar productes de nombres racionals mitjançant la descripció de contextos reals.

- b. Entendre que els nombres enters es poden dividir, menys quan el divisor sigui 0, i tots els quocients de nombres enters (sempre que el seu divisor no sigui 0) siguin nombres racionals. Si p i q són nombres enters, llavors $-(p/q) = (-p)/q = p/(-q)$. Interpretar els quocients de nombres racionals mitjançant la descripció de situacions reals.
 - c. Aplicar les propietats de les operacions com a estratègies per multiplicar i dividir nombres racionals.
 - d. Convertir un nombre racional en decimal mitjançant la divisió llarga; saber que la forma decimal d'un nombre racional acaba en 0 o bé és periòdica.
3. Resoldre problemes matemàtics i reals en què hi hagi les quatre operacions amb nombres racionals ¹.

Expressions i equacions

7.EE

Aplicar les propietats de les operacions per generar expressions equivalents

- 1. Aplicar les propietats de les operacions com a estratègies per sumar, restar, factoritzar i expandir expressions lineals amb coeficients racionals.
- 2. Comprendre que reescriure una expressió en formes diferents quan intentem resoldre un problema ens pot ajudar a entendre'l millor i a veure amb més claredat la relació entre totes les quantitats. *Per exemple, $a + 0,05a = 1,05a$ significa que "augmentar un 5%" és el mateix que "multiplicar per 1,05"*.

Resoldre problemes matemàtics i reals fent servir expressions i equacions algebraïques

- 3. Resoldre problemes matemàtics i reals de diverses operacions que estiguin plantejats amb nombres racionals positius i negatius en qualsevol forma (nombres enters, fraccions i nombres decimals) i fer servir les eines de què es disposi de forma estratègica. Aplicar les propietats de les operacions per calcular nombres en qualsevol forma, convertir-los en diverses formes segons convingui i avaluar el raonament de les respostes mitjançant estratègies de càlcul mental i d'estimació. *Per exemple: si a una dona que guanya 25€ l'hora li concedeixen un augment de sou del 10%, guanyarà 1/10 més cada hora, o 2,50€ més, i passarà a guanyar 27,50€ l'hora. Si vols posar un penjador per a tovalloles de 9 3/4 centímetres al centre d'una porta de 27 centímetres i 1/2 d'amplària, hauràs de col·locar el penjador a uns 9 centímetres de cada vora. Aquesta estimació es pot utilitzar per comprovar el càlcul exacte.*
- 4. Fer servir variables per representar quantitats en un problema matemàtic o real, construir equacions i inequacions senzilles per resoldre problemes i raonar els resultats.
 - a. Resoldre problemes que portin a equacions de la forma $px+q=r$ i $p(x+q)=r$, on p , q i r siguin nombres racionals específics. Resoldre equacions amb aquestes formes amb fluïdesa. Comparar una solució algebraica amb una solució aritmètica i identificar la seqüència de les operacions que s'hagin fet servir en cada aproximació. *Per exemple, el perímetre d'un rectangle és de 54 cm i la seva longitud, de 6 cm. Quina amplada té?*
 - b. Resoldre problemes que portin a inequacions de la forma $px+q>r$ o $px+q<r$, on p , q i r siguin nombres racionals específics. Representar el conjunt de solucions de la inequació i interpretar-lo en el context del problema. *Per exemple: treballes de comercial i et paguen 50€ per setmana i 3€ per venda. Aquesta setmana vols cobrar com a mínim 100€. Escriu una inequació del nombre de vendes que has de fer i descriu els resultats*.

Geometria

7.G

Dibuixar, construir i descriure figures geomètriques i explicar-ne les relacions

- 1. Resoldre problemes en què s'hagin de fer dibuixos a escala de figures geomètriques, calcular les longituds i les àrees reals d'un dibuix a escala i reproduir-lo a una escala diferent.

¹Els càlculs amb nombres racionals amplien les normes de la manipulació de fraccions a les fraccions complexes.

2. Dibuixar figures geomètriques amb unes condicions determinades a mà alçada, amb regle i transportador i amb alguna eina tecnològica. Centrar-se en la construcció de triangles a partir de tres mesures d'angles o costats. Identificar quan les condicions determinen un triangle únic, més d'un triangle o cap triangle.
3. Descriure les figures bidimensionals que s'obtinguin tallant figures tridimensionals, per exemple, seccions planes de prismes rectangulars rectes i piràmides rectangulars rectes.

Resoldre problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular la mesura, l'àrea, la superfície d'àrea i el volum de l'angle

4. Conèixer les fórmules per trobar l'àrea i la circumferència d'un cercle i aplicar-les per resoldre problemes. Fer una proposta de derivació informal de la relació entre la circumferència i l'àrea d'un cercle.
5. Aplicar els coneixements sobre els angles suplementaris, complementaris, verticals i adjacents en un enunciat de diverses operacions per escriure i resoldre equacions d'un angle desconegut d'una figura.
6. Resoldre problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular l'àrea, el volum i l'àrea de superfície d'objectes de dues i de tres dimensions formats per triangles, quadrilàters, polígons, cubs i prismes rectes.

Estadística i probabilitat

7.EP

Fer servir mostres aleatòries per fer inferències sobre una població

1. Entendre que es pot utilitzar l'estadística per obtenir informació sobre una població examinant-ne una mostra. Comprendre que les generalitzacions sobre una població a partir d'una mostra només són vàlides si aquesta és representativa d'aquella població. Entendre que el mostratge aleatori tendeix a produir mostres representatives i a validar les inferències.
2. Fer servir dades d'una mostra aleatòria per fer inferències sobre una població que tingui una característica d'interès desconeguda. Generar diverses mostres (o mostres simulades) de la mateixa mida per mesurar la variació en estimacions o prediccions. *Per exemple, estimar la mitjana de la longitud de les paraules d'un llibre a partir del mostratge aleatori de paraules del llibre; predir el guanyador d'unes eleccions estudiantils basant-se en un mostratge aleatori de les dades d'un sondeig. Calcular fins a quin punt es podria desviar la predicció o estimació.*

Fer inferències comparatives informals sobre dues poblacions

3. Avaluar, de manera informal, el grau de superposició de dues distribucions de dades numèriques de dispersions similars i mesurar la diferència entre els centres expressant-la com a múltiple d'una mesura de dispersió. *Per exemple, l'alçada mitjana dels jugadors de l'equip de bàsquet és 10 cm major que la mitjana de l'equip de futbol, aproximadament, el doble de la dispersió (desviació mitjana absoluta) en tots dos equips. En un diagrama de punts, la separació entre totes dues distribucions d'alçades és evident.*
4. Fer servir mesures de centralització i de dispersió de dades numèriques de mostres aleatòries per fer inferències comparatives informals sobre dues poblacions. *Per exemple, decidir si en un llibre de ciències de primer d'ESO les paraules són, en general, més llargues que les d'un llibre de ciència de quart de primària.*

Investigar processos d'atzar i desenvolupar, utilitzar i avaluar models de probabilitat

5. Entendre que la probabilitat d'un fet casual és un nombre entre 0 i 1 que expressa les possibilitats que hi ha que l'esdeveniment succeeixi. Com més grans siguin els nombres, major és la probabilitat. Una probabilitat a prop de 0 indica un esdeveniment improbable, una probabilitat al voltant de 1/2 ens indica que l'esdeveniment no és ni probable ni improbable i una probabilitat prop de 1 ens indica que l'esdeveniment és probable.

6. Aproximar la probabilitat d'un fet casual recollint dades del procés d'atzar que el produeix, observar la seva freqüència relativa a llarg termini i predir la freqüència relativa aproximada segons la probabilitat. *Per exemple, si es llença un dau 600 vegades, es pot predir que sortirà un 3 o un 6 una mica més de 200 vegades, però que, probablement, no sortiran 200 vegades exactes.*
7. Desenvolupar un model de probabilitat i utilitzar-lo per trobar probabilitats d'esdeveniments. Comparar les probabilitats d'un model en freqüències observades i, en cas que no hi hagi concordança, explicar els possibles orígens de la discrepància.
 - a. Desenvolupar un model de probabilitat uniforme assignant la mateixa probabilitat a tots els resultats i fer servir el model per determinar les probabilitats d'esdeveniments. *Per exemple, si en una classe se selecciona un alumne a l'atzar, es pot cercar la probabilitat que un alumne determinat sigui l'escollit i que sigui una noia.*
 - b. Desenvolupar un model de probabilitat (no necessàriament uniforme) observant freqüències de dades que provenguin d'un procés d'atzar. *Per exemple, cercar la probabilitat aproximada que surti cara quan llancem una moneda enlair o que quan llancem un got de cartró caigui dret i cap per avall. Segons les freqüències que s'han observat, hi ha les mateixes probabilitats en el cas de la moneda?*
8. Trobar probabilitats d'esdeveniments compostos mitjançant llistes, taules, diagrames d'arbre organitzats i la simulació.
 - a. Entendre que, tal com passa amb els esdeveniments senzills, la probabilitat d'un esdeveniment compost és la fracció de resultats de l'univers pel qual l'esdeveniment compost té lloc.
 - b. Representar universos per a esdeveniments compostos mitjançant mètodes, com ara llistes, taules i diagrames d'arbre organitzats. En un esdeveniment que hagi estat descrit en un llenguatge col·loquial (p.e. "treure un doble sis"), identificar els resultats possibles de l'univers que componen l'esdeveniment.
 - c. Crear i utilitzar una simulació per produir freqüències d'esdeveniments compostos. *Per exemple, fer servir dígit aleatoris com a eina de simulació per aproximar la resposta a la pregunta. Si un 40% dels donants tenen el tipus de sang A, quina és la probabilitat que caldrà treure sang a almenys quatre donants per trobar-ne un que sigui del tipus A?*

Matemàtiques | Grau 8 (13-14 anys)

A grau 8, les classes s'haurien de centrar en tres àrees crítiques: (1) formular i raonar sobre les expressions i les equacions, que inclouen modelatge i associacions en dades de dues variables amb una equació lineal, i resoldre equacions lineals i sistemes d'equacions lineals; (2) entendre el concepte de funció i fer servir funcions per descriure relacions quantitatives; (3) analitzar espais i figures de dues i tres dimensions fent servir la distància, l'angle, la semblança i la congruència i entendre i aplicar el teorema de Pitàgores.

(1) Els alumnes fan servir equacions lineals i sistemes d'equacions lineals per representar, analitzar i resoldre una varietat de problemes. També reconeixen les equacions de les proporcions ($y/x=m$ o $y=mx$) com a equacions lineals especials ($y=mx+b$) i entenen que la constant de la proporcionalitat (m) és el pendent i que les gràfiques són línies que passen a través de l'origen. Entenen que el pendent (m) d'una recta és una taxa de canvi constant i que si l'eix x o l'arribada canvia una quantitat A , l'eix y o la sortida canvia la quantitat $m \cdot A$. Els alumnes fan servir una equació lineal per descriure l'associació entre dues quantitats en dades de dues variables (com l'envergadura i l'alçada dels alumnes d'una classe). En aquest curs, s'ajusta el model i s'avalua si encaixa amb les dades de manera informal. Cal que els alumnes expressin una relació entre les dues quantitats en qüestió i que interpretin components de la relació (com el pendent i el punt d'intersecció y) segons la situació. Els alumnes elegeixen de manera estratègica i apliquen amb eficàcia procediments per resoldre equacions lineals d'una variable, entenen que quan fan servir les propietats de la igualtat i el concepte d'equivalència lògica, mantenen les solucions de l'equació original. També resolen sistemes de dues equacions lineals de dues variables i relacionen els sistemes amb parells de línies sobre el pla (s'encreuen, són paral·leles o són la mateixa línia). Els alumnes fan servir equacions lineals, sistemes d'equacions lineals, funcions lineals i el seu coneixement del concepte de pendent d'una recta per analitzar situacions i resoldre problemes.

(2) Els alumnes entenen el concepte de funció com a una norma que assigna a cada arribada una sortida. Comprenen que les funcions descriuen situacions on una quantitat en determina una altra. També saben traduir entre representacions i representacions parcials de funcions (i s'adonen que les representacions tabulars i gràfiques poden ser representacions parcials). A més, descriuen com els aspectes de la funció es reflecteixen en les diverses representacions.

(3) Els alumnes fan servir els conceptes de distància i angle, com es comporten en translacions, rotacions, reflexions i dilatacions i fan servir els conceptes de congruència i semblança per descriure i analitzar figures bidimensionals i resoldre problemes. A més, demostren que la suma dels angles d'un triangle és igual a l'angle d'una línia recta i que les diferents configuracions de rectes poden formar triangles semblants a partir dels angles que es creen quan una línia transversal talla línies paral·leles. Els alumnes entenen l'enunciat del teorema de Pitàgores, hi arriben a partir d'un resultat i saben explicar per què es compleix, per exemple, si es descompon un quadrat de dues maneres diferents. També apliquen el teorema de Pitàgores per trobar distàncies entre punts del pla de coordenades, trobar longituds i analitzar polígons. Els alumnes reprenen l'aprenentatge del volum resolent problemes amb cons, cilindres i esferes.

Grau 8 (13-14 anys)

El sistema numèric

- Saber que hi ha nombres que no són racionals i aproximar-los en nombres racionals

Expressions i equacions

- Treballar amb radicals i potències d'exponents enters
- Entendre les connexions entre relacions proporcionals, línies i equacions lineals
- Analitzar i resoldre equacions lineals i parelles d'equacions lineals simultànies

Funcions

- Definir, examinar i comparar funcions
- Fer servir funcions per modelar relacions entre quantitats

Geometria

- Entendre la congruència i la semblança mitjançant models físics, transparències, o programari de geometria
- Entendre i aplicar el teorema de Pitàgores
- Resoldre problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular el volum de cilindres, cons i esferes

Estadística i probabilitat

- Investigar patrons d'associació en dades de dues variables

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

El sistema numèric

8.SN

Saber que hi ha nombres que no són racionals i aproximar-los en nombres racionals

1. Saber que els nombres que no són racionals s'anomenen irracionals. Entendre, de manera informal, que tots els nombres tenen una expansió decimal. Cal ensenyar que en el cas dels nombres racionals, l'expansió decimal és periòdica. Aproximar una expressió decimal periòdica en un nombre racional.
2. Fer servir aproximacions racionals de nombres irracionals per comparar la mida de nombres irracionals, situar-los en una recta numèrica i estimar el valor d'algunes expressions (p.e. π^2). Per exemple, truncar l'expansió decimal de $\sqrt{2}$ i demostrar que $\sqrt{2}$ es troba entre 1 i 2 i entre 1,4 i 1,5. Explicar com es pot aconseguir una aproximació millor.

Expressions i equacions

8.EE

Treballar amb radicals i potències d'exponents enters

1. Conèixer i aplicar les propietats de les potències d'exponents enters per generar expressions numèriques equivalents. Per exemple $3^2 \times 3^{-5} = 3^{-3} = 1/3^3 = 1/27$.
2. Fer servir els símbols de l'arrel quadrada i de l'arrel cúbica per representar solucions a equacions com $x^2=p$ i $x^3=p$, en què p sigui un nombre racional positiu. Avaluar les arrels quadrades de quadrats petits i perfectes i les arrels cúbiques de cubs petits i perfectes. Saber que $\sqrt{2}$ és irracional.
3. Fer servir nombres que s'expressin en la forma d'un nombre d'un sol dígit multiplicat per una potència entera de 10 per calcular quantitats molt grans o molt petites i expressar el nombre de vegades que un nombre sigui major que l'altre. Per exemple, estimar la població dels Estats Units com 3×10^8 i la població mundial, com 7×10^9 . Determinar que la població mundial és més de 20 vegades major.
4. Realitzar operacions amb nombres que estiguin expressats en notació científica, que incloguin problemes en què es faci servir la notació decimal i la científica. Utilitzar la notació científica i escollir les unitats de la mida adequada per mesurar quantitats molt grans o molt petites (p.e. utilitzar els mil·límetres per any per mesurar l'expansió del fons oceànic). Interpretar la notació científica que hagi generat la tecnologia.

Entendre les connexions entre relacions proporcionals, línies i equacions lineals

5. Representar relacions proporcionals, interpretar la taxa unitària com al pendent de la gràfica. Comparar dues relacions proporcionals diferents que estiguin representades de manera diferent. Per exemple, comparar un gràfic de distància-temps i una equació distància-temps per determinar quin dels dos objectes en moviment es mou a més velocitat.
6. Fer servir triangles similars per explicar per què el pendent m és la mateixa entre dos punts d'una recta vertical del pla de coordenades. Derivar l'equació per una línia que passi per l'origen i l'equació $y = mx + b$ per una línia que intercepti l'eix vertical al punt b .

Anàlitzar i resoldre equacions lineals i parelles d'equacions lineals simultànies

7. Resoldre equacions lineals en una variable.
 - a. Donar exemples d'equacions lineals en una variable amb una solució, moltes solucions o cap solució. Demostrar quina d'aquestes possibilitats es dona transformant l'equació, de forma successiva, en formes més simples fins que s'arribi a una equació equivalent a la forma $x=a$, $a=a$, o $a=b$ (on a i b són nombres diferents).
 - b. Resoldre equacions lineals amb coeficients racionals i altres equacions, la solució de les quals requereixi expandir expressions mitjançant la propietat distributiva i la unió de termes iguals.

8. Analitzar i resoldre parelles d'equacions lineals simultànies.
 - a. Entendre que les solucions a un sistema de dues equacions lineals amb dues variables corresponen a punts d'intersecció de les seves gràfiques, perquè resolten totes dues equacions de manera simultània.
 - b. Resoldre, de forma algebraica, sistemes de dues equacions lineals amb dues variables i estimar solucions dibuixant les equacions d'un problema. Resoldre casos senzills mitjançant la inspecció. *Per exemple, $3x+2y=5$ i $3x+2y=6$ no tenen solució, ja que $3x+2y$ no pot ser 5 i 6 alhora.*
 - c. Resoldre problemes matemàtics i reals que portin a dues equacions en dues variables. *Per exemple, a partir de les coordenades de dues parelles de punts, determinar si la línia que passa per la primera parella de punts encreua la línia que passa per la segona parella.*

Funcions

8.F

Definir, examinar i comparar funcions

1. Entendre que una funció és una norma que assigna una sortida a cada arribada. El gràfic d'una funció és el conjunt de parelles ordenades que està formada per l'arribada i la sortida ¹.
2. Comparar les propietats de dues funcions representades de maneres diferents (de forma algebraica, gràfica, numèrica o mitjançant enunciats). *Per exemple, a partir d'una funció lineal que estigui representada per una taula de valors i una funció lineal que estigui presentada per una expressió algebraica, determinar quina funció té la taxa de canvi major.*
3. Interpretar l'equació $y=mx+b$ definint una funció lineal, la gràfica de la qual sigui una línia recta. Donar exemples de funcions que no siguin lineals. *Per exemple, la funció $A = s^2$ (que ens dona l'àrea d'un quadrat com a la funció de la seva longitud de costat) no és lineal, perquè el seu gràfic conté els punts (1,1), (2,4) i (3,9), que no formen cap línia recta.*

Fer servir funcions per modelar relacions entre quantitats

4. Construir una funció per crear una relació lineal entre dues quantitats. Determinar la taxa de canvi i el valor inicial de la funció a partir de la descripció d'una relació o de dos valors (x, y) i llegir-los en una taula o en un gràfic. Interpretar la taxa de canvi i el valor inicial d'una funció lineal a partir del seu gràfic o d'una taula de valors.
5. En analitzar un gràfic, descriure la relació funcional entre dues quantitats de forma qualitativa (p.e. on la funció augmenta o disminueix o si aquesta és lineal o no). Dibuixar un gràfic que expressi les característiques qualitatives d'una funció que s'hagi descrit en un enunciat.

Geometria

8.G

Entendre la congruència i la semblança mitjançant models físics, transparències o programari de geometria

1. Verificar, de forma experimental, les propietats de les rotacions, les reflexions i les translacions:
 - a. Es comparen línies amb línies i segments amb segment de la mateixa longitud.
 - b. Es comparen angles amb angles de la mateixa mida.
 - c. Es comparen línies paral·leles amb línies paral·leles.
2. Entendre que una figura bidimensional és congruent respecte a una altra si la segona es pot obtenir a partir de la primera mitjançant una seqüència de rotacions, reflexions i translacions. A partir de dues figures congruents, descriure una seqüència que en determini la congruència.

¹A grau 8, la notació funcional no és un requisit.

3. Descriure l'efecte de dilatacions, translacions, rotacions i reflexions en les figures bidimensionals mitjançant coordenades.
4. Entendre que una figura bidimensional és similar a una altra si la segona es pot obtenir a partir de la primera mitjançant una seqüència de rotacions, reflexions, translacions i dilatacions. A partir de dues figures bidimensionals determinades, descriure una seqüència que en determini la semblança.
5. Fer servir arguments informals per establir fets sobre la suma d'angles i l'angle exterior dels triangles pel que fa als angles que es creen quan una línia transversal talla línies paral·leles. Aplicar el criteri angle-angle en la semblança entre triangles. *Per exemple, disposar tres còpies del mateix triangle perquè sembli que la suma dels tres angles forma una recta i explicar el perquè des del punt de vista de les línies transversals.*

Entendre i aplicar el teorema de Pitàgores

6. Explicar una prova del teorema de Pitàgores i arribar al teorema de Pitàgores a partir d'un resultat.
7. Aplicar el teorema de Pitàgores per determinar longituds de costat desconegudes de triangles rectangles en problemes matemàtics i reals en dues i tres dimensions.
8. Aplicar el teorema de Pitàgores per trobar la distància entre dos punts en un sistema de coordenades.

Resoldre problemes matemàtics i reals en què s'hagi de calcular el volum de cilindres, cons i esferes

9. Conèixer les fórmules per trobar el volum de cons, cilindres i esferes. Fer-les servir per resoldre problemes matemàtics i reals.

Estadística i probabilitat

8.SP

Investigar patrons d'associació en dades de dues variables

1. Construir i interpretar diagrames de dispersió de dades de mesurament de dues variables per investigar patrons d'associació entre dues quantitats. Descriure diversos patrons, com ara l'agrupament de dades, l'observació atípica, l'associació positiva o negativa i l'associació lineal i no lineal.
2. Saber que les línies rectes es fan servir molt sovint per modelar relacions entre dues variables quantitatives. Afegir als diagrames de dispersió, que suggereixen una associació lineal, una línia recta. Avaluar, de forma informal, com encaixa el model i valorar la proximitat dels punts de dades respecte a la línia.
3. Fer servir l'equació d'un model lineal per resoldre problemes de dades de mesurament de dues variables i interpretar el pendent i la intersecció. *Per exemple, en un model lineal d'un experiment de biologia, interpretar que un pendent d'1,5 cm/h vol dir que 1 hora de llum solar més el dia farà que les plantes tinguin 1,5 cm més d'altura quan creixin.*
4. Entendre que els patrons d'associació també es poden veure en dades categòriques de dues variables si es mostren freqüències i freqüències relatives en una taula de contingència. Crear i interpretar una taula de contingència resumint dades de dues variables categòriques que s'hagin recollit dels mateixos orígens. Fer servir freqüències relatives que s'hagin calculat en files o columnes per descriure possibles associacions entre totes dues variables. *Per exemple, recollir dades dels alumnes de la classe sobre si s'han de quedar o no a casa els dies entre setmana o sobre si els fan ajudar amb les feines domèstiques o no. Hi ha cap indicatiu que aquells que s'han de quedar a casa entre setmana també acostumen a ajudar a fer les feines domèstiques?*

Estàndards matemàtics per a secundària (a partir de 14 anys)

Els estàndards per a l'educació secundària (a partir de 14 anys) especifiquen quins continguts matemàtics haurien d'assolir tots els alumnes per estar preparats per anar a la universitat i tenir una carrera professional. Són coneixements matemàtics addicionals que haurien d'aprendre per poder seguir amb cursos avançats, com ara l'anàlisi matemàtica, l'estadística avançada o la matemàtica discreta, que s'indiquen amb el símbol (+), com mostra aquest exemple:

(+) Representar nombres complexos del pla complex en forma rectangular i polar (també els nombres reals i imaginaris).

Tots els estàndards que no tinguin el símbol (+) s'han d'incloure en l'àrea curricular de tots els alumnes preparats per a la universitat i una carrera professional. També és possible que els estàndards amb el símbol (+) apareguin en cursos que s'adrecen a tots els alumnes.

A continuació, detallem els estàndards de l'educació secundària (a partir de 14 anys) per categories conceptuais:

- Nombre i quantitat
- Àlgebra
- Funcions
- Modelatge
- Geometria
- Estadística i probabilitat

Les categories conceptuais ofereixen una visió coherent sobre com són les matemàtiques en l'educació secundària (a partir de 14 anys). La feina d'un alumne amb les funcions, per exemple, travessa un gran nombre de barreres del sistema de cursos tradicional i encamina l'alumne cap a l'anàlisi matemàtica.

El modelatge no s'interpreta com a un conjunt de temes aïllats, sinó que es relaciona amb altres estàndards. Fer models matemàtics és un estàndard per a la pràctica matemàtica. Els estàndards de modelatge específic de l'educació secundària s'indiquen amb el símbol d'un asterisc (*). De vegades es pot trobar un asterisc a l'encapçalament d'un grup d'estàndards. En aquest cas, s'hauria d'aplicar a tots els estàndards d'aquell grup.

Matemàtiques | Educació secundària (a partir de 14 anys)

—Nombre i quantitat

Nombres i sistemes numèrics. Des de l'educació infantil fins a grau 8 (13-14 anys), els alumnes han d'anar ampliant els coneixements sobre el nombre. Al començament, “nombre” significa “nombre natural” (1, 2, 3...). Després, es fa servir el zero per representar “cap nombre” i a partir dels nombres naturals i el zero es formen els nombres enters. El pas següent són les fraccions. Al començament, les fraccions només són nombres lligats a representacions pictòriques, però tan bon punt els alumnes comprenen la divisió de fraccions, les veuen com a nombres i les relacionen, mitjançant les representacions decimals, amb el sistema decimal que fan servir per representar els nombres enters. Després de primària, les fraccions s'amplien a les fraccions negatives i els nombres racionals. A grau 8, els alumnes amplien els coneixements i introdueixen els nombres irracionals i els nombres reals. A partir de 14 anys, els alumnes ampliaran el concepte de nombre perquè s'afegiran els nombres imaginaris als nombres reals per formar els nombres complexos.

En ampliar el coneixement del concepte de nombre, també s'amplia el concepte de suma, resta, multiplicació i divisió. En cada nou sistema numèric (nombres enters, racionals, reals i complexos) les quatre operacions no varien per dues grans raons. D'una banda, tenen les propietats commutativa, associativa i distributiva i, de l'altra, els seus nous significats mantenen la coherència amb els antics. Ampliar les propietats dels exponents enters porta a una notació nova i productiva. Per exemple, les propietats dels exponents enters suggereixen que $(5^{1/3})^3$ hauria de ser $5^{(1/3) \cdot 3} = 5^1 = 5$ i que $5^{1/3}$ hauria de ser l'arrel cúbica de 5.

Les calculadores, els fulls de càlcul i els sistemes algebraics computacionals poden suposar unes eines útils perquè els alumnes entenguin millor aquests nous sistemes numèrics, així com la seva notació. A més, es poden fer servir per generar dades d'experiments numèrics, ajudar a entendre com funciona l'àlgebra matricial, vectorial i de nombres complexos i experimentar amb exponents que no siguin enters.

Quantitats. En problemes basats en situacions reals, les respostes no solen ser nombres, sinó quantitats, com ara nombres amb unitats, que inclouen una mesura. Fins a grau 8, quan treballen amb mesures, els alumnes mesuren atributs habituals, com ara la longitud, l'àrea i el volum. A partir de 14 anys, els alumnes es troben amb una varietat més àmplia d'unitats en el modelatge, com l'acceleració; el canvi de moneda; les quantitats derivades, com hora-persona i la quantitat d'escalfor per dia d'una casa; els índex socials, com ara els ingressos per càpita; i els índex de la vida diària, com ara la puntuació per partit o la mitjana de bateig d'un jugador de beisbol. També es troben amb situacions noves, en què hauran de deduir els atributs d'interès. Per exemple, per trobar una bona mesura de seguretat a les carreteres, podrien proposar mesures, com les morts anuals, les morts anuals per conductor o les morts per vehicle-quilòmetre que ha recorregut. De vegades, a un procés conceptual com aquest se l'anomena quantificació. La quantificació és important per a la ciència, com quan, per exemple, l'àrea d'una superfície “destaca” com a una variable important en l'evaporació. La quantificació també és important per a les empreses, que han de conceptualitzar atributs rellevants i crear o elegir mesures adequades.

Nombre i quantitat

El sistema de nombres reals

- Ampliar les propietats dels exponents a exponents racionals
- Utilitzar les propietats dels nombres racionals i irracionals

Quantitats

- Raonar de forma quantitativa i fer servir unitats per resoldre problemes

El sistema de nombres complexos

- Realitzar operacions aritmètiques amb nombres complexos
- Representar nombres complexos i les seves operacions en el pla complex
- Fer servir nombres complexos en identitats i equacions polinòmiques

Quantitats vectorials i de matriu

- Representar i modelar amb quantitats vectorials
- Realitzar operacions vectorials
- Realitzar operacions en matrius i fer-les servir en aplicacions

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

El sistema de nombres reals

N-SNR

Ampliar les propietats dels exponents a exponents racionals

1. Explicar que si s'entenen una notació radical des del punt de vista dels exponents racionals, la definició del significat d'exponents racionals es dedueix de l'extensió de les propietats d'exponents enters a aquells valors. *Per exemple, definim $5^{1/3}$ com l'arrel quadrada de 5 perquè volem que $(5^{1/3})^3$ sigui igual a $5^{(1/3)3}$ i que $(5^{1/3})^3$ sigui igual a 5.*
2. Reescriure expressions amb radicals i exponents racionals fent servir les propietats dels exponents.

Utilitzar les propietats dels nombres racionals i irracionals

3. Explicar per què la suma o producte de dos nombres racionals és racional. Explicar que la suma d'un nombre racional i un nombre irracional és irracional i que el producte d'un nombre racional que no sigui igual a zero i un nombre irracional és irracional.

Quantitats*

N-Q

Raonar de forma quantitativa i fer servir unitats per resoldre problemes

1. Fer servir unitats per entendre problemes i guiar la solució d'enunciats de diverses operacions. Escollir i interpretar unitats de forma coherent en fórmules; escollir i interpretar l'escala i l'origen en gràfics i representacions de dades.
2. Definir quantitats adequades per al modelatge descriptiu.
3. Escollir un nivell de precisió adequat a les limitacions del concepte de mesura quan es parli de quantitats.

El sistema de nombres complexos

N-SNC

Realitzar operacions aritmètiques amb nombres complexos

1. Saber que hi ha un nombre complex i , perquè $i^2 = -1$, i que tot nombre complex té la forma $a+bi$, on a i b són nombres reals.
2. Fer servir la relació $i^2 = -1$ i aplicar la propietat commutativa, associativa i distributiva per sumar, restar i multiplicar nombres complexos.
3. (+) Trobar el nombre conjugat d'un nombre complex; fer servir els nombres conjugats per trobar els mòduls i els quocients de nombres complexos.

Representar nombres complexos i les seves operacions en el pla complex

4. (+) Representar nombres complexos, nombres reals i imaginaris en la seva forma rectangular i polar en el pla complex. Explicar per què les formes rectangulars i polars d'un nombre complex determinat representen el mateix nombre.
5. (+) Representar la suma, la resta, la multiplicació i la conjugació de nombres complexos de forma geomètrica en el pla complex. Fer servir les propietats d'aquesta representació per al càlcul. *Per exemple, $(-1 + \sqrt{3}i)^3 = 8$ perquè $(-1 + \sqrt{3}i)^3 = 8$.*
6. (+) Calcular la distància entre nombres en el pla complex com al mòdul de la diferència i calcular el punt mitjà d'un segment com a la mitjana dels nombres en els seus extrems.

Fer servir nombres complexos en identitats i equacions polinòmiques

7. Resoldre equacions de segon grau amb coeficients reals que tinguin solucions complexes.
8. (+) Ampliar les identitats polinòmiques amb els nombres complexos. *Per exemple, reescriure $x^2 + 4$ com $(x+2i)(x-2i)$.*
9. (+) Conèixer el teorema fonamental de l'àlgebra i demostrar que és cert en polinomis de segon grau.

Quantitats vectorials i matricials

N-QVM

Representar i modelar amb quantitats vectorials

1. (+) Reconèixer quantitats vectorials que tinguin magnitud i direcció. Representar quantitats vectorials mitjançant segments de línia dirigits i fer servir els símbols adequats per als vectors i les seves magnituds (p.e. $\mathbf{v}$, $|\mathbf{v}|$, $\|\mathbf{v}\|$, v).
2. (+) Trobar els components d'un vector restant les coordenades d'un punt inicial de les coordenades d'un punt terminal.
3. (+) Resoldre problemes de velocitat i altres quantitats que es puguin representar amb vectors.

Realitzar operacions vectorials

4. (+) Sumar i restar vectors.
 - a. Sumar vectors posant-los l'un al costat de l'altre, segons els seus components i aplicant la regla del paral·lelogram. Entendre que la magnitud d'una suma de dos vectors no acostuma a ser la suma de les magnituds.
 - b. A partir de dos vectors, un de magnitud i l'altre de direcció, determinar la magnitud i la direcció de la seva suma.
 - c. Entendre la resta de vectors $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ com a $\mathbf{v}+(-\mathbf{w})$, on $-\mathbf{w}$ és l'additiu invers de $\mathbf{w}$, de la mateixa magnitud que $\mathbf{w}$ i que apunta en la direcció oposada. Representar la resta de vectors de manera gràfica, enllaçant els extrems en l'ordre adequat, i fer una resta de vectors utilitzant els seus components.
5. (+) Multiplicar un vector per un escalar.
 - a. Representar la multiplicació escalar de manera gràfica ajustant els vectors i, si és possible, invertint-ne la direcció. Realitzar multiplicacions escalars en relació als seus components. Per exemple, com $c(v_x, v_y) = (cv_x, cv_y)$.
 - b. Calcular la magnitud d'un múltiple escalar $c\mathbf{v}$ amb $\|c\mathbf{v}\| = |c|v$. Calcular la direcció de $c\mathbf{v}$ tenint en compte que quan $|c|v \neq 0$, la direcció de $c\mathbf{v}$ és la mateixa que $\mathbf{v}$ ($c > 0$) o oposada a $\mathbf{v}$ ($c < 0$).

Realitzar operacions en matrius i fer-les servir en aplicacions

6. (+) Fer servir matrius per representar i manipular dades, per exemple, per representar pagaments o relacions d'incidències d'una xarxa.
7. (+) Multiplicar matrius per escalars per produir noves matrius, per exemple, quan en un joc es doblen els premis.
8. (+) Sumar, restar i multiplicar matrius de dimensions adequades.
9. (+) Entendre que, a diferència de la multiplicació de nombres, la multiplicació matricial de matrius quadrades no és una operació commutativa, tot i que satisfà la propietat associativa i distributiva.
10. (+) Entendre que la matriu zero i la matriu identitat tenen un paper important en la suma i la multiplicació de matrius, que és similar al del 0 i l'1 en els nombres reals. El determinant d'una matriu quadrada és diferent a 0 només si la matriu té un invers multiplicatiu.
11. (+) Multiplicar un vector (que es considera una matriu amb una columna) per una matriu de les dimensions adequades per generar un altre vector. Treballar amb matrius com a transformacions de vectors.
12. (+) Treballar amb matrius 2×2 com a transformacions del pla i interpretar el valor absolut del determinant a partir de l'àrea.

Matemàtiques | Educació secundària (a partir de 14 anys)

—Àlgebra

Expressions. Una expressió és el registre d'un càlcul amb nombres, símbols que representen nombres, operacions aritmètiques, potènciació i, en nivells més avançats, l'operació d'avaluar una funció. Les convencions sobre l'ús dels parèntesis i de l'ordre de les operacions asseguren que cada expressió és inequívoca. Crear una expressió que descrigui un càlcul que inclogui una quantitat general requereix l'habilitat d'expressar el còmput en termes generals, resumint-lo a partir d'exemples específics.

Per llegir una expressió i entendre-la, cal analitzar la seva estructura subjacent. Això pot suggerir una manera diferent, però equivalent, d'escriure l'expressió que mostra un aspecte diferent del seu significat. Per exemple, $p+0,05p$ es pot interpretar com la suma d'una taxa del 5% a un preu p . Si reescrivim $p+0,05p$ com $1,05p$ veurem que sumar una taxa és el mateix que multiplicar el preu per un factor constant.

Les manipulacions algebraïques es regeixen per les propietats de les operacions i els exponents i les convencions de la notació algebraica. De vegades, una expressió és el resultat de l'aplicació d'una operació a expressions més senzilles. Per exemple, $p+0,05p$ és la suma de les expressions més senzilles p i $0,05p$. De vegades, si veiem una expressió com al resultat d'una operació amb expressions més senzilles, podem veure amb més claredat la seva estructura subjacent.

Es pot fer servir un full de càlcul o un sistema algebraic computacional (SAC) per experimentar amb expressions algebraïques, dur a terme manipulacions algebraïques complicades i entendre com funcionen.

Equacions i inequacions. Una equació és una declaració d'igualtat entre dues expressions, que sovint veiem com una pregunta sobre quins valors de les variables de les expressions, d'un costat i de l'altre, són iguals. Aquests valors són les solucions de l'equació. Tanmateix, una identitat és certa per a tots els valors de les variables. Sovint, es poden desenvolupar les identitats si es reescriu una expressió en una forma equivalent.

Les solucions d'una equació en una variable formen un conjunt de nombres; les solucions d'una equació en dues variables formen un conjunt de parells de nombres ordenats, que es poden situar en el pla de coordenades. Dues o més equacions i/o inequacions formen un sistema. La solució per a aquest sistema ha de resoldre totes les equacions i inequacions que contingui.

Sovint, una equació es pot resoldre si se'n dedueixen, de manera successiva, una o més equacions més senzilles. Per exemple, es pot sumar la mateixa constant a tots dos costats sense canviar les solucions, però elevar-los al quadrat ens podria portar a solucions alienes. La competència estratègica a l'hora de resoldre-la inclou buscar manipulacions productives i anticipar el tipus i el nombre de solucions.

Algunes equacions no tenen solució en un sistema numèric determinat, però sí en un sistema més gran. Per exemple, la solució de $x+1=0$ és un nombre natural, no un nombre enter; les solucions de $x^2-2=0$ són nombres reals, no nombres racionals; i les solucions de $x^2+2=0$ són nombres complexos, no reals.

Per reorganitzar fórmules, es poden utilitzar les mateixes tècniques per arribar a la solució, que es fan servir a l'hora de resoldre equacions. Per exemple, a partir de la fórmula d'àrea d'un trapezi, $A=((b_1+b_2)/2)h$, podem trobar h mitjançant el mateix procés deductiu.

Les inequacions es poden resoldre si raonem sobre les propietats de la inequació. Moltes, però no totes les propietats de la igualtat, es poden aplicar a la inequació i poden ser útils a l'hora de resoldre-les.

Relacions amb les funcions i el modelatge. Les expressions poden definir funcions i les expressions equivalents defineixen la mateixa funció. Si ens preguntem quan dues funcions tenen el mateix valor per a la mateixa sortida ens porta a una equació. A més, dibuixar les dues funcions ens permet trobar solucions aproximades de l'equació. Representar un enunciat en una equació, en una inequació o en un sistema d'equacions i inequacions és una habilitat essencial en el modelatge.

Àlgebra

Veure l'estructura en les expressions

- Interpretar l'estructura de les expressions
- Escriure expressions en formes equivalents per resoldre problemes

Aritmètica amb expressions polinòmiques i racionals

- Realitzar operacions aritmètiques amb polinomis
- Entendre la relació entre zeros i factors d'un polinomi
- Fer servir identitats polinòmiques per resoldre problemes
- Reescriure expressions racionals

Crear equacions

- Crear equacions que descriguin nombres o relacions

Raonar amb les equacions i les inequacions

- Entendre la resolució de problemes com un procés de raonament i explicar-lo
- Resoldre equacions i inequacions en una variable
- Resoldre sistemes d'equacions
- Representar i resoldre equacions i inequacions gràficament

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Veure l'estructura en les expressions

A-VEE

Interpretar l'estructura de les expressions

- Interpretar expressions que representen una quantitat segons el seu context*.
 - Interpretar parts d'una expressió, com per exemple termes, factors i coeficients.
 - Interpretar expressions complicades veient una o diverses parts com una sola entitat. *Per exemple, interpretar $P(1+r)^n$ com el producte de P i un factor que no depèn de P .*
- Fer servir l'estructura d'una expressió per identificar maneres de reescriure-la. *Per exemple, veure $x^4 - y^4$ com $(x^2)^2 - (y^2)^2$ i reconèixer-ho com una diferència de quadrats que es pot factoritzar de la manera següent: $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$.*

Escriure expressions en formes equivalents per resoldre problemes

- Escollir i produir una forma equivalent d'una expressió per revelar i explicar propietats de la quantitat que representa l'expressió*.
 - Factoritzar una expressió de segon grau per descobrir els zeros de la funció que defineix.
 - Completar el quadrat d'una expressió de segon grau per revelar el valor màxim o mínim de la funció que defineix.
 - Fer servir les propietats dels exponents per transformar expressions de funcions exponencials. *Per exemple, l'expressió $1,15^{-t}$ es pot reescriure com $(1,15^{1/12})^{12t} \approx 1,012^{12t}$ per saber la taxa d'interès equivalent aproximada si la taxa anual és del 15%.*
- Derivar la fórmula de la suma d'una sèrie geomètrica (quan la raó comuna no és 1) i fer servir la fórmula per resoldre problemes. *Per exemple, calcular pagaments d'hipoteques*.*.

Aritmètica amb expressions polinòmiques i racionals

A-AEPR

Realitzar operacions aritmètiques amb polinomis

- Entendre que els polinomis formen un sistema anàleg als nombres enters i que, concretament, es poden sumar, restar i multiplicar. Sumar, restar i multiplicar polinomis.

Entendre la relació entre zeros i factors d'un polinomi

- Conèixer i aplicar el teorema del residu: per un polinomi $p(x)$ i un nombre real a , el residu de la divisió per $x-a$ és $p(a)$, per tant, $p(a)=0$ només si $(x-a)$ és un factor de $p(x)$.
- Identificar zeros de polinomis quan hi hagi factoritzacions adequades disponibles i fer-los servir per crear una gràfica de la funció que defineix el polinomi.

Fer servir identitats polinòmiques per resoldre problemes

- Demostrar identitats polinòmiques i fer-les servir per descriure relacions numèriques. *Per exemple, es pot utilitzar la identitat polinòmica $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$ per generar terns pitagòrics.*
- (+) Conèixer i aplicar el teorema del binomi a l'expansió de $(x+y)^n$ en potències de x i y per a un enter positiu n , on x i y són qualsevol nombre, amb coeficients que estiguin determinats, per exemple, pel triangle de Pascal¹.

¹El teorema del binomi es pot demostrar per inducció matemàtica o mitjançant un argument combinatori.

Reescriure expressions racionals

- Reescriure expressions racionals simples en diverses formes. Per exemple, escriure $a(x) / b(x)$ com $q(x) + r(x) / b(x)$, on $a(x)$, $b(x)$, $q(x)$ i $r(x)$ són polinomis amb un grau de $r(x)$ inferior al grau de $b(x)$, a partir de la inspecció, la divisió llarga o, per als exemples més complicats, un sistema algebraic computacional.
- (+) Entendre que les expressions racionals formen un sistema anàleg als nombres racionals i que es poden sumar, restar, multiplicar i dividir per una expressió racional que no sigui zero. Sumar, restar, multiplicar i dividir expressions racionals.

Crear equacions*

A-CE

Crear equacions que descriguin nombres o relacions

- Crear equacions i inequacions en una variable i utilitzar-les per resoldre problemes. *Incloure equacions que provenen de funcions lineals i de segon grau i funcions racionals i exponencials senzilles.*
- Crear equacions en dues o més variables per representar relacions entre quantitats; dibuixar equacions als eixos de coordenades amb etiquetes i escales.
- Representar restriccions mitjançant equacions o inequacions i amb sistemes d'equacions i inequacions. Interpretar solucions com a opcions viables o no viables en modelatge. *Per exemple, representar inequacions descrivint restriccions nutritives i de cost a partir de combinacions de diversos aliments.*
- Reorganitzar fórmules per ressaltar una quantitat d'interès, aplicant el mateix raonament que quan es resolen equacions. *Per exemple, canviar l'ordre de la llei d'Ohm $V=IR$ per destacar la resistència R .*

Raonar amb les equacions i les inequacions

A-REI

Entendre la resolució de problemes com un procés de raonament i explicar-lo

- Explicar tots els passos a l'hora de resoldre una equació simple a partir de la igualtat de nombres del pas anterior i assumir que l'equació original té una solució. Crear un argument viable per justificar un mètode resolutiu.
- Resoldre equacions racionals i irracionals simples en una variable i donar exemples que demostrin com d'estranyes poden arribar a ser les solucions.

Resoldre equacions i inequacions en una variable

- Resoldre equacions i inequacions lineals en una variable i equacions amb coeficients que estiguin representats per lletres.
- Resoldre equacions de segon grau en una variable.
 - Fer servir el mètode de completar el quadrat per transformar qualsevol equació de segon grau en x en una equació amb la forma $(x - p)^2 = q$ que tingui les mateixes solucions. Derivar la fórmula quadràtica a partir d'aquesta forma.
 - Resoldre equacions de segon grau a partir de la inspecció (p.e. per $x^2=49$), la fórmula quadràtica i la factorització o bé calculant l'arrel quadrada o completant el quadrat, segons convingui en la forma inicial de l'equació. Reconèixer quan la fórmula quadràtica ofereix solucions complexes i escriure-les com $a \pm bi$ pels nombres reals a i b .

Resoldre sistemes d'equacions

- Demostrar que, a partir d'un sistema de dues equacions en dues variables, substituir una equació per la suma d'una equació i un múltiple de l'altra produeix un sistema amb les mateixes solucions.

6. Resoldre sistemes d'equacions lineals de manera exacta i aproximada (p.e. amb gràfiques) i centrar-se en els parells d'equacions lineals en dues variables.
7. Resoldre un sistema simple que consisteixi en una equació lineal i una equació de segon grau en dues variables de manera algebraica i gràfica. *Per exemple, trobar els punts d'intersecció entre la línia $y=-3x$ i el cercle $x^2+y^2=3$.*
8. (+) Representar un sistema d'equacions lineals com una sola equació matricial en una variable vectorial.
9. (+) Trobar l'invers d'una matriu, si existeix, i utilitzar-lo per resoldre problemes d'equacions lineals (fent servir la tecnologia per a matrius de dimensió 3×3 o superiors).

Representar i resoldre equacions i inequacions gràficament

10. Entendre que la gràfica d'una equació en dues variables és el conjunt de totes les seves solucions representades al pla de coordenades i que, sovint, forma una corba (que podria ser una recta).
11. Explicar per què les abscisses dels punts on les gràfiques de les equacions $y=f(x)$ i $y=g(x)$ s'intersequen són les solucions de l'equació $f(x)=g(x)$. Trobar les solucions de manera aproximada, p.e. fer servir la tecnologia per dibuixar les funcions, fer taules de valors o bé trobar aproximacions successives. Incloure casos on $f(x)$ i/o $g(x)$ siguin funcions lineals, polinòmiques, racionals, de valor absolut, exponencials i logarítmiques*.
12. Dibuixar les solucions d'una inequació lineal en dues variables com un semiplà (sense incloure la frontera en cas que sigui una inequació estricta) i dibuixar el conjunt de solucions d'un sistema d'inequacions lineals en dues variables com la intersecció dels semiplans corresponents.

Matemàtiques | Educació secundària (a partir de 14 anys)

—Funcions

Les funcions descriuen situacions en què una quantitat en determina una altra. Per exemple, els beneficis de 10.000€ invertits a una taxa anual equivalent del 4,25% és una funció que descriu quan temps han estat invertits els diners. Atès que no deixem mai de formular teories sobre les dependències entre quantitats en la natura i la societat, les funcions són eines importants a l'hora de crear models matemàtics.

A les classes de matemàtiques, les funcions acostumen a tenir elements d'arribada i de sortida i, sovint, estan definides per una expressió algebraica. Per exemple, el temps en hores que triga un cotxe a recórrer 100 quilòmetres és una funció de la velocitat del cotxe en quilòmetres per hora (v). La norma $T(v)=100/v$ expressa aquesta relació de forma algebraica i defineix una funció, el nom de la qual és T .

El conjunt d'arribada d'una funció s'anomena domini. Sovint, deduïm que el domini són tots els conjunts d'arribada pels quals l'expressió que defineix una funció té un valor o pels quals la funció té sentit en un context determinat.

Una funció es pot descriure de diverses maneres, per exemple, mitjançant una gràfica (p.e. els resultats d'un sismògraf); mitjançant una norma oral, com ara “Si et dic un país, me'n dius la capital”; mitjançant una expressió algebraica, com $f(x)=a+bx$; o amb una regla recursiva. La gràfica d'una funció acostuma a ser una manera útil de visualitzar la relació dels models de funció. A més, manipular una expressió matemàtica d'una funció pot explicar-nos coses sobre les propietats d'una funció.

Les funcions que es presenten com a expressions poden modelar molts fenòmens importants. Dues famílies importants de funcions caracteritzades per lleis del creixement són les funcions lineals, que creixen a una taxa constant, i les funcions exponencials, que creixen a una taxa percentual constant. Les funcions lineals amb un terme constant de zero descriuen les relacions proporcionals.

Es pot fer servir una eina gràfica o un sistema algebraic computacional per experimentar amb les propietats d'aquestes funcions i les seves gràfiques i per crear models computacionals o funcions, que inclouen les funcions definides de manera recursiva.

Relacions amb les expressions, les equacions, el modelatge i les coordenades.

Determinar un valor de sortida per a una arribada determinada consisteix en avaluar una expressió. Trobar arribades que donin una sortida determinada implica resoldre una equació. Si ens preguntem quan dues funcions tenen el mateix valor per la mateixa arribada, obtindrem equacions, les solucions de les quals es poden visualitzar en la intersecció de les seves gràfiques. Com que les funcions descriuen relacions entre quantitats, s'utilitzen amb freqüència en el modelatge. De vegades, les funcions es defineixen per un procés recursiu, que es pot visualitzar amb un full de càlcul o alguna altra eina tecnològica.

Funcions

Interpretar funcions

- Entendre el concepte de funció i fer servir la notació funcional
- Interpretar funcions que apareixen en les aplicacions segons el context
- Analitzar funcions fent servir representacions diferents

Construir funcions

- Construir una funció que model·li una relació entre dues quantitats
- Construir noves funcions a partir de funcions existents

Models lineals, quadràtics i exponencials

- Construir i comparar models lineals, quadràtics i exponencials per resoldre problemes
- Interpretar expressions de funcions segons la situació que model·lin

Funcions trigonomètriques

- Ampliar el domini de les funcions trigonomètriques mitjançant el cercle unitat
- Modelar fenòmens periòdics amb funcions trigonomètriques
- Demostrar i aplicar identitats trigonomètriques

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Interpretar funcions

F-IF

Entendre el concepte de funció i fer servir la notació funcional

1. Entendre que la funció d'un conjunt, anomenada domini, en un altre conjunt, anomenat rang o amplitud, assigna a cada element del domini exactament un element de l'amplitud. Si f és una funció i x és un element del seu domini, llavors $f(x)$ denota la sortida de f , que correspon a l'arribada x . La gràfica de f és la mateixa que la de l'equació $y=f(x)$.
2. Fer servir la notació funcional, avaluar funcions d'entrades en els seus dominis i interpretar enuncisats que utilitzin la notació decimal des del punt de vista d'un context.
3. Reconèixer que les seqüències són funcions, que, de vegades, es defineixen de manera recursiva i que el domini de les quals és un subconjunt dels enters. Per exemple, la seqüència de Fibonacci està definida de manera recursiva per $f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(n+1)=f(n)+f(n-1)$ per $n \geq 1$.

Interpretar funcions que apareixen en les aplicacions segons el context

4. Interpretar les característiques principals de gràfiques i taules segons les quantitats d'una funció que modela una relació entre dues quantitats. Dibuixar les gràfiques d'aquesta funció que representin característiques principals a partir d'una descripció verbal de la relació. *Les característiques principals són les següents: interseccions; intervals on la funció augmenta i disminueix; intervals on la funció és positiva o negativa; màxims i mínims relatius; simetries; comportament final; i periodicitat*.*
5. Relacionar el domini d'una funció amb la seva gràfica i, quan sigui possible, relacionar-lo amb la relació quantitativa que descriu. Per exemple, si la funció $h(n)$ indica el nombre d'hores-persones que calen en una fàbrica per muntar n motors, llavors, els enters positius serien un domini adequat per a la funció*.
6. Calcular i interpretar la taxa mitjana del canvi d'una funció (que ha estat presentada de manera simbòlica o en forma de taula) en un interval específic. Calcular la taxa de canvi d'una gràfica*.

Analitzar funcions fent servir representacions diferents

7. Dibuixar funcions que estiguin expressades de manera simbòlica i ressaltar les característiques principals de la gràfica a mà, en els casos senzills, i mitjançant alguna eina tecnològica, en els casos més complicats*.
 - a. Dibuixar funcions lineals i de segon grau i assenyalar interseccions i màxims i mínims.
 - b. Dibuixar funcions d'arrels quadrades i cúbiques i funcions definides per parts. Incloure funcions esglaonades i de valor absolut.
 - c. Dibuixar funcions polinòmiques i identificar-ne els zeros, quan hi hagi factoritzacions adequades, i mostrar el seu comportament final.
 - d. (+) Dibuixar funcions racionals i identificar-ne els zeros i les asímptotes, quan hi hagi factoritzacions adequades, i mostrar el seu comportament final.
 - e. Dibuixar funcions exponencials i logarítmiques i mostrar les interseccions i el comportament final. Dibuixar funcions trigonomètriques i mostrar el període, la línia mitjana i l'amplitud.
8. Escriure una funció que estigui definida per una expressió en formes diferents però equivalents per revelar i explicar diverses propietats de la funció.
 - a. Utilitzar el procés de la factorització i completar el quadrat d'una funció de segon grau. Mostrar els zeros, els valors extrems i la simetria de la gràfica i interpretar-los en un context.
 - b. Fer servir les propietats dels exponents per interpretar expressions de funcions exponencials. Per exemple, identificar la taxa de canvi percentual en funcions com $y=(1,02)^t$, $y=(0,97)^{-t}$, $y=(1,01)^{-12t}$, $y=(1,2)^{t/10}$ i classificar-les, tot representant el creixement o decreixement exponencial.

9. Comparar les propietats de dues funcions representades d'una manera diferent (de manera algebraica; gràfica; numèrica, fent servir taules; o mitjançant enunciats). *Per exemple, a partir de la gràfica i de l'expressió algebraica de dues funcions de segon grau, esbrinar quina té el màxim major.*

Construir funcions

F-CF

Construir una funció que modela una relació entre dues quantitats

1. Escriure una funció que descriu una relació entre dues quantitats*.
 - a. Determinar una expressió explícita, un procés recursiu o els passos per a un càlcul a partir d'un context.
 - b. Combinar tipus de funcions estàndard mitjançant operacions aritmètiques. *Per exemple, crear una funció que modela la temperatura d'un cos que s'està refredant afegint una funció constant a un decreixement exponencial i relacionar aquestes funcions amb el model.*
 - c. (+) Compondre funcions. *Per exemple, si $T(y)$ és la temperatura de l'atmosfera com a funció d'altura i $a(t)$ és l'altura d'un globus meteorològic com a funció de temps, llavors, $T(a(t))$ és la temperatura que hi ha en la posició del globus meteorològic com a funció de temps.*
2. Escriure seqüències aritmètiques i geomètriques de manera recursiva i amb una fórmula explícita i utilitzar-les per modelar situacions i fer conversions entre totes dues formes*.

Construir noves funcions a partir de funcions existents

3. Identificar l'efecte sobre la gràfica si substituïm $f(x)$ per $f(x) + k$, $k f(x)$, $f(kx)$ i $f(x + k)$ pels valors específics de k (tant els positius com els negatius) i trobar el valor de k a partir de les gràfiques. Experimentar amb casos i il·lustrar una explicació dels efectes sobre la gràfica mitjançant eines tecnològiques. Incloure el reconeixement de funcions parells i imparells a partir de les gràfiques i les expressions algebraiques.
4. Trobar funcions inverses.
 - a. Resoldre una equació de la forma $f(x)=c$ d'una funció simple f que tingui un invers i escriure una expressió per a l'invers. *Per exemple, $f(x)=2x^3$ o $f(x)=(x+1)/(x-1)$ per a $x \neq 1$.*
 - b. (+) Verificar mitjançant la composició que una funció és l'invers d'una altra.
 - c. (+) Llegir valors d'una funció inversa a partir d'una gràfica o una taula, tenint en compte que la funció té un invers.
 - d. (+) Crear una funció invertible a partir d'una funció no invertible restringint el domini.
5. (+) Entendre la relació inversa entre exponents i logaritmes i utilitzar aquesta relació per resoldre problemes on hi hagi logaritmes i exponents.

Models lineals, quadràtics i exponencials*

F-MLQE

Construir i comparar models lineals, quadràtics i exponencials i resoldre problemes

1. Distingir entre situacions que es puguin modelar amb funcions lineals i amb funcions exponencials.
 - a. Demostrar que les funcions lineals creixen a partir de les mateixes diferències sobre els mateixos intervals i que les funcions exponencials creixen a partir dels mateixos factors sobre els mateixos intervals.
 - b. Reconèixer situacions en què una quantitat canvia a una taxa constant per unitat interval relativa a un altre.
 - c. Reconèixer situacions en què una quantitat augmenta o disminueix a una taxa percentual constant per unitat interval relativa a un altre.

2. Crear funcions lineals i exponencials, així com seqüències aritmètiques i geomètriques, a partir d'una gràfica, una descripció d'una relació o dos parells arribada/sortida. Cal saber llegir-les en una taula.
3. Observar, a partir de gràfiques i taules, que una quantitat que augmenta de manera exponencial, acaba sobrepassant una quantitat que augmenta de manera lineal, quadràtica o, generalment, com una funció polinòmica.
4. Expressar, en forma de logaritme, la solució d' $ab^c = d$ en models exponencials, on a , c , i d són nombres i la base b és 2, 10 o e . Analitzar el logaritme mitjançant eines tecnològiques.

Interpretar expressions de funcions segons la situació que modelin

5. Interpretar els paràmetres d'una funció lineal o exponencial des del punt de vista d'un context.

Funcions trigonomètriques

F-FT

Ampliar el domini de les funcions trigonomètriques mitjançant la circumferència unitat

1. Entendre la mesura en radians d'un angle com la longitud de l'arc de la circumferència unitat que subtendeix l'angle.
2. Explicar com el cercle unitat del pla de coordenades fa possible l'extensió de funcions trigonomètriques a tots els nombres reals, interpretats com a mesures d'angles en radians que recorren, en el sentit contrari de les agulles del rellotge, la circumferència unitat.
3. (+) Fer servir triangles especials per determinar, de forma geomètrica, els valors del sinus, el cosinus i la tangent de $\pi/3$, $\pi/4$ i $\pi/6$. Fer servir la circumferència unitat per expressar els valors del sinus, el cosinus i la tangent de $\pi-x$, $\pi+x$ i $2\pi-x$ a partir dels seus valors de x , quan x és qualsevol nombre real.
4. (+) Fer servir la circumferència unitat per explicar la simetria (parell i imparell) i la periodicitat de les funcions trigonomètriques.

Modelar fenòmens periòdics amb funcions trigonomètriques

5. Escollir funcions trigonomètriques per modelar fenòmens periòdics d'amplitud, freqüència i mitjana específics*.
6. (+) Entendre que restringir una funció trigonomètrica a un domini sobre el qual sempre augmenta o disminueix permet construir el seu invers.
7. (+) Fer servir funcions inverses per resoldre equacions trigonomètriques que apareguin en contextos de modelatge. Avaluat-ne les solucions mitjançant eines tecnològiques i interpretar-les des del punt de vista del context*.

Demostrar i aplicar identitats trigonomètriques

8. Demostrar la identitat de Pitàgores $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ i aplicar-la per trobar $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ o $\tan(\theta)$ a partir de $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ o $\tan(\theta)$ i el quadrant de l'angle.
9. (+) Demostrar les fórmules de la suma i la resta de sinus, cosinus i tangent i aplicar-les per resoldre problemes.

Matemàtiques | Educació secundària (a partir de 14 anys)

—Modelatge

El modelatge relaciona les classes de matemàtiques i l'estadística a la vida, la feina i la presa de decisions que es fan diàriament. El modelatge és el procés d'escollir i d'aplicar les matemàtiques i l'estadística escaients per analitzar situacions empíriques, entendre-les millor i millorar les nostres decisions. Les quantitats i la seva relació amb les situacions físiques, econòmiques, de política pública, socials i quotidianes es poden modelar mitjançant l'ús de mètodes matemàtics i estadístics. A l'hora de crear models matemàtics, les eines tecnològiques són útils per avaluar diversos supòsits, explorar-ne les conseqüències i comparar les prediccions amb dades.

Un model pot ser molt senzill, com per exemple escriure el cost total com a un producte del preu unitari i la quantitat que se n'ha comprat o bé fer servir una figura geomètrica per descriure un objecte físic, com ara una moneda. Els models senzills, fins i tot, impliquen prendre decisions. Som nosaltres qui haurem de decidir si modelarem una moneda com a un cilindre tridimensional o si n'hi ha prou amb un disc bidimensional per satisfer les nostres necessitats. Altres situacions, com modelar una ruta d'entrega, el pla de producció d'un rodatge o comparar amortitzacions de préstecs, requereixen uns models més elaborats que facin servir altres eines de les ciències matemàtiques. Les situacions reals no estan organitzades ni preparades per ser analitzades. Formular models manuals, representar-los i analitzar-los és un procés més aviat creatiu, que depèn de l'experiència i la creativitat que s'han adquirit.

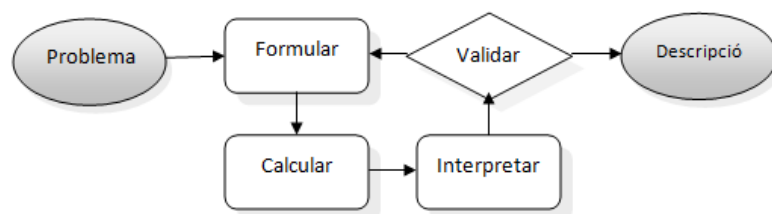
Vegeu alguns exemples de les situacions que acabem de mencionar:

- Calcular quanta aigua i menjar necessitaran els equips d'emergència en una ciutat de 3 milions de persones i com es podrien distribuir.
- Organitzar un torneig de tennis de taula de set jugadors en un club que tingui quatre taules, en què cada jugador jugui contra tots els seus adversaris.
- Dissenyar la distribució de les paradetes d'una fira escolar per guanyar el màxim de diners possible.
- Analitzar la distància de parada d'un cotxe.
- Modelar el balanç d'un compte o el creixement d'una colònia de bacteris o d'una inversió.
- Fer una anàlisi del camí crític, p.e. de les maniobres d'un avió en un aeroport.
- Analitzar situacions de risc, com els esports de risc, les pandèmies i el terrorisme.
- Relacionar estadístiques de població amb prediccions individuals.

En aquestes situacions, els models que s'han creat depenen d'una sèrie de factors: Quina precisió necessitem o volem que tinguin les respostes? Quins aspectes de la situació necessitem entendre, controlar o optimitzar? De quant temps i de quantes eines disposem? La varietat de models que podem crear i analitzar també està restringida per les limitacions de les nostres capacitats matemàtiques, estadístiques i tècniques i de la nostra habilitat a l'hora de reconèixer variables i relacions importants. Els diagrames de diferents tipus, els fulls de càlcul i altres eines tecnològiques i l'àlgebra són molt útils a l'hora d'entendre i de resoldre problemes de diversos tipus de situacions reals.

Un dels coneixements que ens aporta el modelatge matemàtic és que, de vegades, la mateixa estructura matemàtica o estadística pot modelar situacions que, aparentment, són diferents. Els models també ens poden donar informació sobre les pròpies estructures matemàtiques, per exemple, com quan un model de creixement bacteriològic fa que s'intensifiqui el creixement explosiu de la funció exponencial.

El cicle de modelatge bàsic es resumeix al diagrama següent: (1) identificar variables d'una situació i seleccionar aquelles que representin trets essencials; (2) formular un model creant i seleccionant representacions geomètriques, gràfiques, tabulars, algebraiques o estadístiques que descriguin relacions entre les variables; (3) analitzar i dur a terme operacions amb aquestes relacions per treure'n conclusions; (4) interpretar els resultats de les matemàtiques a partir de la situació original; (5) validar les conclusions comparant-les amb la situació i millorar el model o, en cas que sigui acceptable; (6) descriure'n les conclusions i el raonament. Les eleccions, les assumpcions i les aproximacions són presents en tot aquest cicle.



En el modelatge descriptiu, un model tan sols descriu els fenòmens o els resumeix en una forma compacta. Les gràfiques de les observacions són un model descriptiu conegut, com ara les gràfiques de la temperatura global i del CO_2 que hi ha a l'atmosfera d'un període de temps.

El modelatge analític cerca explicar dades a partir d'idees teòriques més profundes, encara que amb paràmetres de base empírica. Per exemple, el creixement exponencial de colònies de bacteris (fins que intervenen els factors que frenen el creixement, com ara la contaminació o la fam) segueix un ritme constant de reproducció. Les funcions són una eina important per analitzar aquests problemes.

Les eines de representació gràfica, els fulls de càlcul, els sistemes algebraics computacionals i el programari de geometria dinàmica són eines molt útils que es poden fer servir per modelar tant fenòmens purament matemàtics, per exemple el comportament dels polinomis, com fenòmens físics.

Estàndards de modelatge. *El modelatge no s'ha d'interpretar com un conjunt de temes aïllats, sinó com una relació d'altres estàndards. Fer models matemàtics és un estàndard per a la pràctica matemàtica. Els estàndards de modelatge específics apareixen a tots els estàndards de secundària acompanyats d'un asterisc (*).*

Matemàtiques | Educació secundària (a partir de 14 anys)

—Geometria

La comprensió dels atributs i de les relacions d'objectes geomètrics es pot aplicar a diversos contextos: interpretar un dibuix esquemàtic, estimar la quantitat de fusta que es necessita per cobrir un sostre inclinat, crear gràfics per ordinador o dissenyar un patró de costura per aprofitar millor el material.

Tot i que hi ha molts tipus de geometria, les matemàtiques que s'ensenyen als centres educatius segueixen, principalment, la geometria euclidiana plana, que s'estudia de manera sintètica (sense coordenades) i analítica (amb coordenades). La geometria euclidiana es caracteritza, sobretot, pel postulat de les paral·leles: per cada punt exterior a una recta, hi ha exactament una línia paral·lela. La geometria esfèrica, en canvi, no té línies paral·leles.

A partir de 14 anys, els alumnes comencen a formalitzar l'experiència amb la geometria de primària (fins a 13 anys) i fan servir definicions més precises i desenvolupen demostracions més acurades. Més endavant, a la universitat, alguns alumnes desenvolupen, amb cura, la geometria euclidiana i altres tipus a partir d'un petit conjunt d'axiomes.

Els conceptes de congruència, semblança i simetria es poden entendre des de la perspectiva de la transformació geomètrica. Els moviments rígids, com ara les translacions, les rotacions, les reflexions i les combinacions entre aquests, són fonamentals i mantenen la distància i els angles (i per tant, la figura en general). Les reflexions i les rotacions expliquen un tipus concret de simetria i les simetries d'un objecte ens donen informació sobre els seus atributs (com quan la simetria d'un triangle isòsceles ens indica que els angles de la seva base són congruents).

Segons aquest enfocament, dues figures geomètriques es consideren congruents si hi ha una seqüència de moviments rígids que en posa una sobre l'altra. Aquest és el principi de la superposició. En els triangles, la congruència significa la igualtat de tots els parells de costats i d'angles corresponents. Durant els graus intermedis, gràcies a les experiències de dibuixar triangles a partir d'unes condicions determinades, els alumnes detecten maneres d'especificar les mesures d'un triangle per assegurar que tots els triangles que es dibuixin amb aquelles mesures siguin congruents. Un cop s'estableixen aquests criteris de congruència de triangles mitjançant l'ús de moviments rígids, angle-costat-angle (ACA), costat-angle-costat (CAC) i costat-costat-costat (CCC), els poden fer servir per demostrar teoremes sobre triangles, quadrilàters i altres figures geomètriques.

Les transformacions de semblança (moviments rígids seguits per homotècies) defineixen la semblança de la mateixa manera en què els moviments rígids defineixen la congruència i, per tant, formalitzen el concepte de semblança de “mateixa forma” i “factor d'escala” en graus anteriors. Aquestes transformacions ens porten al criteri de la semblança de triangles, pel qual dos parells d'angles corresponents són congruents.

Les definicions de sinus, cosinus i tangent d'angles aguts es basen en els angles rectes i la semblança i, juntament amb el teorema de Pitàgores, són fonamentals en moltes situacions del món real i teòriques. El teorema de Pitàgores es generalitza a triangles que no són rectes gràcies al teorema dels cosinus. Els teoremes del sinus i del cosinus expressen els criteris de la congruència de triangles en els casos on tres dades són suficients per resoldre del tot un triangle. A més, aquests teoremes ofereixen dues possibles solucions en cas d'ambigüitat i ens demostren que costat-costat-angle (CCA) no és un criteri de congruència.

La geometria analítica relaciona l'àlgebra amb la geometria i ens aporta grans mètodes d'anàlisi de resolució de problemes. Així com la recta numèrica associa nombres amb posicions en una dimensió, un parell d'eixos perpendiculars associa parells de nombres amb posicions en dues dimensions. Aquesta correspondència entre coordenades numèriques i punts geomètrics permet aplicar els mètodes de l'àlgebra a la geometria i viceversa. El conjunt de solucions d'una equació es converteix en una corba geomètrica i fa que la visualització sigui una eina per entendre i fer àlgebra. Les figures geomètriques es poden descriure mitjançant equacions si s'utilitza la manipulació algebraica com a una eina per a la comprensió, el modelatge i la demostració geomètriques. Les transformacions geomètriques de les gràfiques d'equacions corresponen a canvis algebraics en les seves equacions.

Els entorns de geometria dinàmica aporten eines experimentals i de modelatge als alumnes, que els permeten investigar fenòmens geomètrics com els sistemes algebraics computacional els permeten experimentar amb fenòmens algebraics.

Relacions amb les equacions. La correspondència entre coordenades numèriques i punts geomètrics permet aplicar els mètodes de l'àlgebra a la geometria i viceversa. El conjunt de solucions d'una equació es converteix en una corba geomètrica i fa que la visualització sigui una eina per entendre i fer àlgebra. Les figures geomètriques es poden descriure mitjançant equacions, fet que converteix la manipulació en una eina per a la comprensió, el modelatge i la demostració geomètriques.

Geometria

Congruència

- Experimentar amb transformacions en el pla
- Entendre la congruència des del punt de vista dels moviments rígids
- Demostrar teoremes geomètrics
- Fer construccions geomètriques

Semblança, triangles rectes i trigonometria

- Entendre la semblança des del punt de vista de les transformacions de semblança
- Demostrar teoremes que estiguin relacionats amb la semblança
- Definir raons trigonomètriques i resoldre problemes en què hi hagi triangles rectes
- Aplicar la trigonometria a triangles generals

Circumferència

- Entendre i aplicar teoremes sobre circumferència
- Trobar longituds d'arc i àrees de sectors de circumferències

Expressar propietats geomètriques amb equacions

- Traslladar la descripció geomètrica a l'equació d'una secció cònica
- Fer servir coordenades per demostrar de forma algebraica teoremes geomètrics senzills

Mesurament geomètric i dimensió

- Explicar fórmules de volum i utilitzar-les per resoldre problemes
- Visualitzar relacions entre objectes bidimensionals i tridimensionals

Modelar amb la geometria

- Aplicar conceptes geomètrics en situacions de modelatge

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit .

Congruència

G-C

Experimentar amb transformacions en el pla

1. Conèixer definicions precises d'angle, cercle, línia perpendicular, línia paral·lela i segment de línia, que estiguin basades en els conceptes no definits de punt, línia, distància d'una línia i distància d'un arc circular.
2. Representar transformacions en el pla mitjançant transparències i programari de geometria. Descriure les transformacions com a funcions que prenen punts del pla com a arribades i donen altres punts com a sortides. Comparar transformacions que mantinguin la distància i l'angle amb aquelles que no ho facin (p.e. comparar translació i extensió horitzontal).
3. Descriure les rotacions i les reflexions que es facin d'un rectangle, un paral·lelogram, un trapezoide o un polígon regular.
4. Desenvolupar definicions de rotacions, reflexions i translacions d'angles, cercles, línies perpendiculars, línies paral·leles i segments de línia.
5. A partir d'una rotació, reflexió o translació d'una figura geomètrica, dibuixar la figura transformada amb paper mil·límetrat, paper de calc o programari de geometria. Especificar una seqüència de transformacions que superposin una figura amb l'altra.

Entendre la congruència des del punt de vista dels moviments rígids

6. Fer servir descripcions geomètriques de moviments rígids per transformar figures i predir l'efecte del moviment rígid determinat d'una figura determinada. A partir de dues figures, aplicar la definició de congruència als moviments rígids per decidir si són congruents.
7. Aplicar la definició de congruència als moviments rígids per demostrar que dos triangles són congruents només si els parells de costats i d'angles corresponents són congruents.
8. Explicar com els criteris de congruència de triangles (ACA, CAC i CCC) segueixen la definició de congruència pel que fa a moviments rígids.

Demostrar teoremes geomètrics

9. Demostrar teoremes sobre línies i angles. *Vegeu-ne alguns exemples: els angles verticals són congruents; quan una transversal travessa línies paral·leles, els angles alterns interns són congruents i els angles corresponents són congruents; els punts d'una bisectriu perpendicular d'un segment de línia són exactament aquells que equidisten dels extrems dels segments.*
10. Demostrar teoremes sobre triangles. *Vegeu-ne alguns exemples: les mesures dels angles interns d'un triangle sumen 180° ; els angles de la base dels triangles isòsceles són congruents; el segment que uneix els punts mitjans de dos costats d'un triangle és paral·lel al tercer costat i té la meitat de la seva longitud; totes les medians d'un triangle són concurrents.*
11. Demostrar teoremes sobre paral·lelograms. *Vegeu-ne alguns exemples: els costats oposats són congruents, els angles oposats són congruents, les diagonals d'un paral·lelogram es bissequen i, en canvi, els rectangles són paral·lelograms que tenen diagonals congruents.*

Fer construccions geomètriques

12. Fer construccions geomètriques formals amb una sèrie d'eines i mètodes (regle i compàs, corda, objectes reflectants, papiroflèxia, programari de geometria dinàmica, etc.). Copiar un segment; copiar un angle; bisecar un segment; bisecar un angle; construir línies perpendiculars, com per exemple la bisectriu perpendicular d'un segment de línia; i construir una línia paral·lela a una línia determinada a través d'un punt que no estigui sobre la línia.
13. Formar un triangle equilàter, un quadrat i un hexàgon regular dins d'una circumferència.

Semblança, triangles rectes i trigonometria

G-STRT

Entendre la semblança des del punt de vista de les transformacions de semblança

1. Verificar de manera experimental les propietats de les homotècies que ofereixen un centre i un factor d'escala:
 - a. Una homotècia porta una línia que no passa pel centre de l'homotècia cap a una línia paral·lela sense variar la línia que passa pel centre.
 - b. L'homotècia d'un segment de línia és més llarga o més curta en la raó determinada del factor d'escala.
2. A partir de dues figures, fer servir la definició de semblança, concretament les transformacions de semblança, per decidir si són similars. Explicar, mitjançant l'ús de transformacions de semblança, el significat de semblança en els triangles, com ara la igualtat de tots els parells d'angles corresponents i la proporcionalitat de tots els parells de costats corresponents.
3. Fer servir les propietats de les transformacions de semblança per establir el criteri AA perquè dos triangles siguin similars.

Demostrar teoremes que estiguin relacionats amb la semblança

4. Demostrar teoremes sobre triangles. *Vegeu-ne alguns exemples: una línia paral·lela al costat d'un triangle divideix els altres dos costats de manera proporcional i inversa; demostrar el teorema de Pitàgores mitjançant la semblança de triangles.*
5. Fer servir criteris de congruència i semblança de triangles per resoldre problemes i demostrar relacions en figures geomètriques.

Definir raons trigonomètriques i resoldre problemes en què hi hagi triangles rectes

6. Entendre que mitjançant la semblança, les raons de costat en angles rectes són propietats dels angles del triangle, que ens porten a definicions de raons trigonomètriques en angles aguts.
7. Explicar i utilitzar la relació entre el sinus i el cosinus d'angles complementaris.
8. Utilitzar raons trigonomètriques i el teorema de Pitàgores per resoldre triangles rectes en problemes aplicats*.

Aplicar la trigonometria a triangles generals

9. (+) Derivar la fórmula $A = 1/2 ab \sin(C)$ de l'àrea d'un triangle dibuixant una línia auxiliar des d'un vèrtex perpendicular fins al costat oposat.
10. (+) Demostrar els teoremes del sinus i del cosinus i utilitzar-los per resoldre problemes.
11. (+) Entendre i aplicar els teoremes del sinus i del cosinus per trobar mesures desconegudes d'angles rectes i d'angles no rectes (p.e. problemes d'acotació i de forces resultants).

Circumferències

G-C

Entendre i aplicar teoremes sobre circumferències

1. Demostrar que totes les circumferències són semblants.
2. Identificar i descriure relacions entre angles inscrits, radis i cordes. *Vegeu-ne alguns exemples: la relació entre angles centrals, inscrits i circumscrits; els angles inscrits d'un diàmetre són angles rectes; el radi d'una circumferència és perpendicular a la tangent on el radi s'entrecrua amb la circumferència.*
3. Formar les circumferències inscrites i circumscrites d'un triangle i demostrar les propietats dels angles d'un quadrilàter que estigui inscrit en una circumferència.
4. (+) Crear una tangent que vagi des d'un punt extern d'una circumferència determinada a la circumferència.

Trobar longituds d'arc i àrees de sectors de circumferències

5. Fer servir la semblança per derivar el fet que la longitud de l'arc que interseca un angle és proporcional al radi i definir la mesura en radians de l'angle com a la constant de proporcionalitat. Derivar la fórmula de l'àrea d'un sector.

Expressar propietats geomètriques amb equacions

G-EPG

Traslladar la descripció geomètrica a l'equació d'una secció cònica

1. Derivar l'equació d'una circumferència de centre i radi determinats mitjançant el teorema de Pitàgores. Completar el quadrat per trobar el centre i el radi d'una circumferència mitjançant una equació.
2. Derivar l'equació d'una paràbola a partir d'un focus i una directriu.
3. (+) Derivar les equacions d'el·lipsis i d'hipèrboles a partir dels focus aplicant que la suma o la diferència de distàncies dels focus és constant.

Fer servir coordenades per demostrar de forma algebraica teoremes geomètrics senzills

4. Fer servir coordenades per demostrar de forma algebraica teoremes geomètrics senzills. *Per exemple, demostrar o rebutjar que una figura que estigui definida per quatre punts determinats en el pla de coordenades és un rectangle. Demostrar o rebutjar que el punt $(1, \sqrt{3})$ es troba en la circumferència centrada en l'origen i que conté el punt $(0, 2)$.*
5. Demostrar els criteris de pendent de línies paral·leles i perpendiculars i fer-los servir per resoldre problemes geomètrics (p.e. trobar l'equació d'una línia paral·lela o perpendicular d'una línia determinada que passi per un punt).
6. Trobar el punt d'un segment de línia dirigit entre dos punts determinats que divideixi el segment en una raó determinada.
7. Fer servir coordenades per calcular perímetres de polígons i àrees de triangles i rectangles, per exemple, mitjançant la fórmula de distància*.

Mesurament geomètric i dimensió

G-MGD

Explicar fórmules de volum i utilitzar-les per resoldre problemes

8. Aportar un argument informal per a les fórmules de la circumferència d'un cercle, l'àrea d'una circumferència i el volum d'un cilindre, d'una piràmide i d'un con. *Fer servir arguments sobre la dissecció, el principi de Cavalieri i arguments informals sobre el límit.*
9. (+) Oferir un argument informal fent ús del principi de Cavalieri per a les fórmules del volum d'una esfera i altres figures sòlides.
10. Fer servir fórmules per trobar el volum de cilindres, piràmides, cons i esferes per resoldre problemes*.

Visualitzar relacions entre objectes bidimensionals i tridimensionals

11. Identificar les figures de les seccions transversals bidimensionals d'objectes tridimensionals i identificar objectes de tres dimensions que s'hagin format a partir de la rotació d'objectes de dues dimensions.

Modelar amb la geometria

G-MG

Aplicar conceptes geomètrics en situacions de modelatge

1. Fer servir figures geomètriques i les seves mesures i propietats per descriure objectes (p.e. modelar el tronc d'un arbre o un tors humà com a un cilindre)*.
2. Aplicar conceptes de densitat basats en l'àrea i el volum en situacions de modelatge (p.e. persones per quilòmetre quadrat o àtoms per centímetre cúbic)*.
3. Aplicar mètodes geomètrics per resoldre problemes de disseny (p.e. dissenyar un objecte o una estructura que compleixi unes restriccions físiques concretes que en redueixi el cost; treballar amb sistemes de quadrícula tipogràfica basats en raons aritmètiques)*.

Matemàtiques | Educació secundària (a partir de 14 anys)

—Estadística i probabilitat*

Sovint, les decisions o les prediccions es basen en dades-nombres dins d'un context. Aquestes decisions o prediccions serien fàcils si les dades sempre ens enviessin un missatge clar. Això no obstant, aquest acostuma a estar amagat darrere la variabilitat. L'estadística ens dona eines per descriure la variabilitat de les dades i prendre decisions informades que la tinguin en compte.

Les dades es recullen, es mostren, es resumeixen, s'examinen i s'interpreten per descobrir patrons i desviacions dels patrons. Les dades quantitatives es poden descriure a partir dels trets més importants: mesures de forma, centralització i dispersió. La forma d'una distribució de dades es podria descriure com a simètrica, esbiaixada, plana o en forma de campana i la podríem resumir amb mesures de centralització (com la mitjana o la mediana) o de dispersió (com la desviació estàndard o el rang interquartílic). Es poden comparar diverses distribucions de manera numèrica mitjançant aquestes estadístiques o de manera visual, a partir de diagrames. No n'hi ha prou amb conèixer la centralització i la dispersió per descriure una distribució. Les estadístiques que hem de comparar, els diagrames que hem de fer servir i el que poden significar els resultats d'una comparació depenen de la qüestió que s'ha d'investigar i de les accions que s'han de dur a terme.

L'aleatorització té dos usos importants a l'hora d'arribar a conclusions estadístiques. En primer lloc, si es té en compte la variabilitat, recollir dades d'una mostra aleatòria d'una població fa possible arribar a conclusions vàlides sobre el conjunt de la població. En segon lloc, assignar individus de manera aleatòria a diferents tractaments permet una comparació justa de la seva efectivitat. Un resultat estadísticament important és aquell que difícilment es deu només a l'atzar, fet que només es pot avaluar sota la condició de l'aleatorietat. Les condicions sota les quals es recullen les dades són importants a l'hora de treure'n conclusions. Quan fem una anàlisi crítica sobre l'ús de l'estadística en els mitjans de comunicació és important tenir en compte el disseny de l'estudi, com es van recollir les dades i les anàlisis que se n'han fet, així com els resums de dades i les conclusions que se n'han tret.

Els processos aleatoris es poden descriure de forma matemàtica mitjançant un model de probabilitat: una llista o descripció dels possibles resultats (l'univers). A cadascun se li assigna una probabilitat. En situacions com la de llençar una moneda enlaire, llençar els daus o escollir una carta, podria ser raonable assumir que tots els resultats tenen les mateixes probabilitats. En un model de probabilitat, els punts de mostreig representen resultats i es combinen per crear esdeveniments; les probabilitats d'esdeveniments es poden calcular si s'apliquen les regles de la suma i la multiplicació. Interpretar aquestes probabilitats exigeix entendre la independència i la probabilitat condicionada, que es poden estudiar mitjançant l'anàlisi de taules de contingència.

La tecnologia té un paper important en l'estadística i la probabilitat, ja que ens permet crear diagrames, funcions de regressió i coeficients de correlació, a més de simular múltiples resultats possibles en un període de temps molt reduït.

Relacions amb les funcions i el modelatge.

Les funcions es poden utilitzar per descriure dades. Si aquestes proposen una relació lineal, la relació es pot modelar amb una línia de regressió i la seva força i direcció es poden expressar mitjançant un coeficient de correlació.

Estadística i probabilitat

Interpretar dades categòriques i quantitatives

- Resumir, representar i interpretar dades d'un sol recompte o variable de mesura
- Resumir, representar i interpretar dades en dues variables categòriques i quantitatives
- Interpretar models lineals

Fer inferències i justificar-ne les conclusions

- Entendre i avaluar processos aleatoris subjacents als experiments estadístics
- Inferir i justificar les conclusions d'investigacions, experiments i estudis d'observacions de mostres

Probabilitat condicionada i regles de la probabilitat

- Entendre la independència estadística i la probabilitat condicionada i fer-les servir per interpretar dades
- Fer servir les regles de la probabilitat per calcular probabilitats d'esdeveniments compostos en un model uniforme de probabilitat

Prendre decisions mitjançant la probabilitat

- Calcular valors esperats i fer-los servir per resoldre problemes
- Avaluar resultats de decisions mitjançant la probabilitat

Pràctiques matemàtiques

1. Identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls.
2. Raonar de forma abstracta i quantitativa.
3. Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres.
4. Modelatge matemàtic.
5. Fer servir les eines adequades de forma estratègica.
6. Cercar precisió.
7. Cercar una estructura i utilitzar-la.
8. Cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit.

Interpretar dades categòriques i quantitatives

E-ID

Resumir, representar i interpretar dades d'un sol recompte o variable de mesura

1. Representar dades amb diagrames en la recta numèrica real (diagrames de punts, histogrames i diagrames de caixa).
2. Fer servir estadístiques adequades a la distribució de dades per comparar la centralització (mediana i mitjana) i la dispersió (rang interquartílic i desviació estàndard) de dos o més conjunts de dades.
3. Interpretar diferències en la forma, la centralització i la dispersió en el context de conjunts de dades, explicant els possibles efectes dels punts de dades extrems (dades atípiques).
4. Fer servir la mitjana i la desviació estàndard d'un conjunt de dades per ajustar-la a una distribució normal i calcular percentatges de població. Reconèixer que hi ha conjunts de dades pels quals no és adequat un procediment com aquest. Fer servir calculadores, fulls de càlcul i taules per estimar àrees sota la corba normal.

Resumir, representar i interpretar dades en dues variables categòriques i quantitatives

5. Resumir dades categòriques de dues categories en taules de contingència de freqüències. Interpretar freqüències relatives segons les dades (incloure freqüències relatives conjuntes, marginals i condicionades). Reconèixer possibles associacions i tendències en les dades.
6. Representar dades de dues variables quantitatives en un diagrama de dispersió i descriure la relació entre les variables.
 - a. Ajustar una funció a les dades; fer servir funcions que hagin estat ajustades per resoldre problemes segons les dades. *Fer servir funcions determinades o elegir una funció que hagi suggerit el context. Emfatitzar els models lineals, quadràtics i exponencials.*
 - b. Avaluar de manera informal l'ajust d'una funció mitjançant diagrames i l'anàlisi de residus.
 - c. Ajustar una funció lineal a un diagrama de dispersió que suggereixi una associació lineal.

Interpretar models lineals

7. Interpretar el pendent (raó de canvi) i la intersecció (terme constant) d'un model lineal segons les dades.
8. Calcular (mitjançant eines tecnològiques) i interpretar el coeficient de correlació d'un ajust lineal.
9. Distingir entre correlació i causalitat.

Fer inferències i justificar-ne les conclusions

E-IJC

Entendre i avaluar processos aleatoris subjacents als experiments estadístics

1. Entendre l'estadística com a un procés d'inferir sobre paràmetres de població basats en un mostreig aleatori d'aquella població.
2. Decidir si un model específic és coherent amb els resultats d'un procés de generació de dades determinat, per exemple, mitjançant la simulació. *Un model diu que quan llencem una moneda enlaire hi ha una probabilitat de 0,5 que surti cara. Un resultat de cinc creus seguides, et faria qüestionar el model?*

Inferir i justificar conclusions d'enquestes, experiments i estudis d'observació de mostres

3. Reconèixer els propòsits i les diferències entre enquestes, experiments i estudis d'observació de mostres. Explicar quina relació tenen amb l'aleatorietat.

4. Fer servir dades d'una enquesta de mostres per estimar una mitjana o una proporció de població. Desenvolupar un marge d'error mitjançant l'ús de models de simulació pel mostreig aleatori.
5. Fer servir dades d'un experiment aleatoritzat per comparar dos tractaments. Fer servir simulacions per decidir si les diferències entre paràmetres són importants.
6. Avaluar informes que estiguin basats en dades.

Probabilitat condicionada i regles de la probabilitat

E-PC

Entendre la independència estadística i la probabilitat condicionada i fer-les servir per interpretar dades

1. Descriure esdeveniments com a subconjunts d'un univers (el conjunt de resultats) fent servir característiques o categories dels resultats; o com a unions, interseccions o complements d'altres esdeveniments ("o", "i", "no").
2. Entendre que dos esdeveniments A i B són independents si la probabilitat que A i B succeeixin al mateix moment és el producte de les seves probabilitats. Fer servir aquesta caracterització per determinar si són independents.
3. Entendre la probabilitat condicionada d' A si B és $P(A \text{ i } B)/P(B)$ i interpretar la independència d' A i B : la probabilitat condicionada d' A si és B és la mateixa que la probabilitat d' A ; la probabilitat condicionada de B si és A és la mateixa que la probabilitat de B .
4. Crear i interpretar taules de contingència de freqüències de dades quan dues categories estan associades a tots els objectes que s'han classificat. Fer servir la taula de contingència com un univers per decidir si els esdeveniments són independents i aproximar probabilitats condicionades. *Per exemple, recollir dades d'una mostra aleatòria d'alumnes de la teva escola després de preguntar-los quina és la seva assignatura preferida entre Matemàtiques, Ciències i Llengua. Estimar la probabilitat que un alumne de l'escola seleccionat a l'atzar preferirà Ciències sabent que cursa un grau determinat. Fer el mateix amb les altres assignatures i comparar-ne els resultats.*
5. Reconèixer i explicar els conceptes de la probabilitat condicionada i la independència amb paraules i situacions quotidianes. *Per exemple, comparar les probabilitats de tenir càncer de pulmó si ets fumador amb les probabilitats de ser fumador si tens càncer de pulmó.*

Fer servir les regles de la probabilitat per calcular probabilitats d'esdeveniments compostos en un model uniforme de probabilitat

6. Trobar la probabilitat condicionada d' A si B és la fracció dels resultats de B que també pertanyen a A i interpretar la resposta segons el model.
7. Aplicar la regla de la suma $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ i } B)$ i interpretar la resposta segons el model.
8. (+) Aplicar la regla de la multiplicació general en un model de probabilitat uniforme $P(A \text{ i } B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$ i interpretar la resposta segons el model.
9. (+) Fer servir permutacions i combinacions per calcular les probabilitats d'esdeveniments compostos i resoldre problemes.

Fer servir la probabilitat per prendre decisions

E-PPD

Calcular valors esperats i fer-los servir per resoldre problemes

1. (+) Definir una variable aleatòria per a una quantitat d'interès assignant un valor numèric a cada esdeveniment d'un univers. Dibuixar la distribució de probabilitat corresponent fent servir les mateixes representacions gràfiques que per les distribucions de dades.
2. (+) Calcular el valor esperat d'una variable aleatòria; interpretar-la com a la mitjana de la distribució de probabilitat.

3. (+) Desenvolupar una distribució de probabilitat d'una variable aleatòria definida per a un univers en el qual les probabilitats teòriques es puguin calcular. Trobar el valor esperat. *Per exemple, trobar la distribució de probabilitat teòrica del nombre de respostes correctes que s'hagin obtingut endevinant les cinc preguntes en un examen tipus test en què cada pregunta té quatre opcions i trobar la nota que s'espera de diversos sistemes d'avaluació.*
4. (+) Desenvolupar una distribució de probabilitat d'una variable aleatòria definida per a un univers en el qual les probabilitats s'han assignat empíricament i trobar-ne el valor esperat. *Per exemple, trobar una distribució de dades actual del nombre de televisors per casa que hi ha als Estats Units i calcular el nombre esperat de televisors per llar. Quants aparells esperes trobar en 100 cases seleccionades a l'atzar?*

Fer servir la probabilitat per avaluar resultats de decisions

5. (+) Sospesar els possibles resultats d'una decisió assignant probabilitats als valors de resultat i trobar valors esperats.
 - a. Trobar el premi esperat en un joc d'atzar. *Per exemple, esbrinar el premi esperat d'un bitllet de loteria nacional o del joc d'un restaurant de menjar ràpid.*
 - b. Avaluar i comparar estratègies basant-se en els valors esperats. *Per exemple, comparar una assegurança d'automòbil d'alt risc amb una de baix risc fent servir diverses probabilitats raonables de tenir un accident lleu o greu.*
6. (+) Fer servir les probabilitats de prendre decisions justes (p. e. fer a la sort mitjançant un generador de nombres aleatoris).
7. (+) Analitzar decisions i estratègies mitjançant conceptes de probabilitat (p. e. un estudi d'un producte, proves mèdiques o jugar el final d'un partit d'hoquei sense porter).

Apunt sobre els cursos i les transicions

L'apartat dels Estàndards matemàtics a secundària (a partir de 14 anys) especifica les matemàtiques que haurien d'estudiar tots els alumnes per estar preparats per a la universitat i una futura carrera professional i no estableixen la seqüència didàctica de secundària. Això no obstant, l'organització dels cursos és un component crític perquè els estàndards s'apliquin. Per aquest motiu, els exemples d'itineraris de Matemàtiques a secundària (a partir de 14 anys) –en una seqüència didàctica tradicional (Àlgebra I, Geometria i Àlgebra II) i una seqüència didàctica integrada (Matemàtiques 1, Matemàtiques 2 i Matemàtiques 3)– estaran disponibles després de la publicació dels Estàndards per a la pràctica matemàtica. S'espera que també estigui disponible un model d'itinerari addicional basat en aquests estàndards.

Els propis estàndards no dicten àrees curriculars, pedagògiques o de continguts. En concret, cada estat dels Estats Units pot decidir la transició a secundària d'una manera diferent. Per exemple, avui dia, molts alumnes dels Estats Units fan Àlgebra I a grau 8 (13-14 anys) i, en alguns estats del país, és obligatori. Els estàndards de primària contenen els requisits previs perquè els alumnes estiguin preparats per fer Àlgebra I a grau 8. A més, els estàndards estan dissenyats per permetre que els estats continuïn amb la política vigent sobre Àlgebra I a grau 8.

Una segona transició important és aquella que va de secundària a l'educació superior a la universitat i a una futura carrera professional. Pel que s'ha pogut observar, els coneixements, les habilitats i les pràctiques importants per a aquesta preparació inclouen un elevat nombre de contingut matemàtic, anterior al límit definit pels símbols (+), que podem trobar en aquests estàndards. De fet, alguns dels continguts més prioritaris per a la preparació per a la universitat i una carrera professional es troben entre grau 6 i grau 8. Entre tot aquest material, hi trobem continguts molt útils, com per exemple, aplicar dels coneixements sobre la raó aritmètica a problemes matemàtics i reals, calcular amb fluïdesa amb fraccions positives i negatives i decimals i resoldre problemes matemàtics i reals en què hi hagi mesures d'angles, d'àrea, d'àrea de superfície i de volum. Atès que els estàndards importants per a la preparació per a la universitat i una carrera professional estan distribuïts en diversos graus i cursos, els sistemes per avaluar aquesta preparació haurien d'incloure els estàndards de grau 6 a 8. Cal tenir en compte que les notes de tall o qualsevol altra informació que aportin els sistemes d'avaluació per a aquesta preparació s'haurien de desenvolupar en col·laboració amb els representants dels estudis superiors i el personal dels programes de desenvolupament. A més, s'haurien de validar pel personal docent i en funció del posterior rendiment dels alumnes a la universitat.

Glossari

Algoritme de càlcul. L'algoritme de càlcul és un conjunt de passos predefinitos que es poden aplicar a una classe de problemes que sempre ens dona el resultat correcte en cada cas, sempre que els passos s'hagin donat de manera correcta. *Vegeu també:* estratègia de càlcul.

Comptar grups. Estratègia per trobar el nombre d'objectes que hi ha en un grup sense haver de comptar tots els membres d'aquell grup. Per exemple, si sabem que en una pila de llibres hi ha vuit llibres i n'hi afegim tres més, no cal tornar a comptar tota la pila de llibres. Un pot esbrinar el total a partir del primer grup, és a dir, a partir de vuit, i comptar: "Nou, deu, onze. Ara hi ha onze llibres".

Congruent. Dues figures planes i tridimensionals són congruents si una es pot obtenir a partir de l'altra mitjançant un moviment rígid (una seqüència de rotacions, reflexions i/o translacions).

Dades de dues variables. Parells d'observacions numèriques relacionats entre si. Exemple: una llista de l'alçada i el pes de cada jugador d'un equip de futbol.

Decimal finit. Un decimal és finit si el decimal que es repeteix és zero.

Decimal periòdic. La forma decimal d'un nombre racional. *Vegeu també:* decimal finit.

Desviació mitjana absoluta. Mesura de la variació d'un conjunt de dades numèriques que es calcula sumant les distàncies que hi ha entre els valors i la mitjana i, després, dividint pel nombre de valors de dades que hi ha. Per exemple: la desviació mitjana absoluta del conjunt de dades {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120} és 20.

Diagrama d'una recta numèrica. El diagrama de la recta que es fa servir per representar nombres i complementar-ne el raonament. En un diagrama d'una recta numèrica de quantitats de mesurament, l'interval de 0 a 1 representa la unitat de mesura de la quantitat.

Diagrama de caixa. Un mètode per representar de manera visual una distribució de valors de dades mitjançant la mediana, els quartils i els extrems del conjunt de dades. Una caixa ensenya la mediana de les dades ¹.

Diagrama de dispersió. Representació gràfica en el pla de coordenades d'un conjunt de dades de dues variables. Per exemple, en un diagrama de dispersió es podrien mostrar l'alçada i el pes d'un grup de persones ².

Diagrama de línies. Mètode per representar de forma visual una distribució de valors de dades en què cada valor apareix com un punt sobre una recta numèrica. També es coneix com a diagrama de punts ³.

Diagrama de punts. Vegeu diagrama de línies.

Distribució de probabilitat. El conjunt de valors possibles d'una variable aleatòria amb una probabilitat assignada.

Diagrama de segments. Una representació en forma de segment de cinta que s'utilitza per il·lustrar relacions numèriques.

Enter. Nombre que es pot expressar en la forma a o $-a$ d'algun nombre natural a .

Estratègia de càlcul. Manipulacions intencionades que es poden escollir per a problemes específics i que no sempre tenen un ordre fix. Es poden utilitzar per convertir un problema en un altre. *Vegeu també:* algoritme de càlcul. Exemple: $3/4$ i $-3/4$ són inversos additius l'un de l'altre perquè $3/4 + (-3/4) = (-3/4) + 3/4 = 0$.

Expressió racional. Un quocient de dos polinomis amb un denominador que no sigui zero.

Figura rectilínia. Un polígon, els angles del qual són rectes.

Forma expandida. Un nombre de diversos dígit s'expressa de forma expandida quan s'escriu com a una suma de múltiples de potències de deu d'un sol dígit. Per exemple, $643 = 600 + 40 + 3$.

Fracció complexa. Una fracció A/B en què A i/o B són fraccions (B no és zero).

Fracció. Un nombre que es pot expressar en la forma a/b on a és un nombre enter i b és un nombre enter positiu (En aquests estàndards, la paraula *fracció* sempre fa referència a un nombre que no és negatiu). *Vegeu també:* nombre racional.

Homotècia. Transformació que mou tots els punts de la semirecta que prové d'un centre fix i multiplica les distàncies respecte al centre per un factor d'escala comú.

Inversos additius. Dos nombres, la suma dels quals és zero, són inversos additius l'un de l'altre.

^{1, 2, 3} Adaptat del Departament d'educació pública de Wiconsin
<http://dpi.wi.gov/standards/mathglos.html>, el 2 de març de 2010.

Inversos multiplicatius. Dos nombres, el producte del qual és 1, són inversos multiplicatius l'un de l'altre. Exemple: $3/4$ i $4/3$ són inversos multiplicatius l'un de l'altre perquè $3/4 \times 4/3 = 4/3 \times 3/4 = 1$.

Línia mitjana. En la gràfica d'un funció trigonomètrica, la línia horitzontal que és a mig camí entre els valors màxims i els mínims.

Mediana. Una mesura de centralització en un conjunt de dades numèriques. La mediana d'una llista de valors és el valor que apareix al centre d'una versió ordenada de la llista (o la mediana dels dos valors centrals, si la llista conté un nombre enter de valors). Exemple: la mediana del conjunt de dades {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 90} és 11.

Mitjana. Mesura de centralització en un conjunt de dades numèriques que es calcula sumant els valors d'una llista i, llavors, dividint-los pel nombre de valors que hi ha en aquesta ⁴. Exemple: la mitjana del conjunt de dades {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120} és 21.

Model de probabilitat uniforme. Un model de probabilitat que designa la mateixa probabilitat a tots els resultats. *Vegeu també:* model de probabilitat.

Model de probabilitat. Un model de probabilitat es fa servir per assignar probabilitats a resultats d'un procés d'atzar examinant la naturalesa d'aquest procés. El conjunt de tots els resultats s'anomena univers i les probabilitats sumen 1. *Vegeu també:* model de probabilitat uniforme.

Models de probabilitat combinats de manera independent. Es diu que dos models de probabilitat es combinen de manera independent si la probabilitat de cada parell ordenat del model combinat és igual al producte de les probabilitats originals dels dos resultats individuals del parell ordenat.

Moviment rígid. Una transformació de punts en l'espai que consisteix en una seqüència d'una o més translacions, reflexions i/o rotacions. Els moviments rígids mantenen les distàncies i la mesura dels angles.

Multiplicació i divisió amb resultat igual o inferior a 100. Multiplicació o divisió de dos nombres enters amb respostes enteres i amb productes o dividendes entre 0 i 100. Exemple: $72 \div 8 = 9$.

Nombre racional. Un nombre que es pugui expressar en la forma a/b o $-a/b$ per alguna fracció a/b . Entre els nombres racionals hi ha els enters.

Nombres naturals. Els nombres 0, 1, 2, 3,

Primer quartil. En un conjunt de dades amb una mediana M , el primer quartil és la mediana dels valors de dades inferiors a M . Exemple: en el conjunt de dades {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, el primer quartil és 6 ⁵. *Vegeu també:* mediana, tercer quartil, rang interquartílic.

Principi de transitivitat pel mesurament indirecte. Si la longitud de l'objecte A és major que la longitud de l'objecte B i la longitud d'aquest és major a la de l'objecte A , llavors, la longitud de l'objecte A és major que la del C . Aquest principi també s'aplica a l'hora de mesurar d'altres quantitats.

Probabilitat. Un nombre entre zero i un que s'utilitza per quantificar les probabilitats de processos que tenen resultats incerts (com llençar una moneda enlair, seleccionar una persona d'un grup a l'atzar, llençar una bola cap a un objectiu o provar un medicament per a una malaltia poc coneguda).

Propietat associativa de la multiplicació. *Vegeu la taula 3 d'aquest glossari.*

Propietat associativa de la suma. *Vegeu la taula 3 d'aquest glossari.*

Propietat commutativa. *Vegeu la taula 3 d'aquest glossari.*

Propietat de l'element neutre. *Vegeu la taula 3 d'aquest glossari.*

Propietats d'igualtat. *Vegeu la taula 4 d'aquest glossari.*

Propietats de desigualtat. *Vegeu la taula 5 d'aquest glossari.*

Propietats de les operacions. *Vegeu la taula 3 d'aquest glossari.*

Propietats de les operacions. *Vegeu la taula 3 d'aquest glossari.*

Rang interquartílic. Mesura de la variació en un conjunt de dades numèriques. El rang interquartílic és la distància entre el primer i el tercer quartil del conjunt de dades. Exemple: en el conjunt de dades {1, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120}, el rang interquartílic és $15 - 6 = 9$. *Vegeu també:* primer quartil, tercer quartil.

Representació gràfica d'una fracció. Un diagrama de segments, un diagrama de recta numèrica o un model d'àrea.

Sumar i restar amb resultat igual o inferior a 5, 10, 20, 100 o 1000. Sumes o restes de dos nombres enters amb respostes en nombres enters i amb sumand o minuend entre 0 i 5, 0 i 10, 0 i 20 o 0 i 100, respectivament. Exemple: $8+2=10$ és una suma amb resultat igual o inferior a 10; $14-5=9$ és una resta amb resultat igual o inferior a 20; i $55-18=37$ és una resta amb resultat igual o inferior a 100.

⁴Concretament, defineix la mitjana aritmètica.

⁵S'utilitzen molts mètodes per calcular quartils. El mètode que es defineix aquí s'anomena, de vegades, mètode de Moore i McCabe. *Vegeu* Langford, E., "Quartiles in Elementary Statistics," *Journal of Statistics Education* Volume 14, Number 3 (2006).

Taxa de canvi percentual. Una taxa de canvi que s'expressa com a un percentatge. Exemple: si una població creix de 50 a 55 en un any, creix $5/50=10\%$ per any.

Tercer quartil. En un conjunt de dades de mediana M , el tercer quartil és la mediana dels valors de dades majors que M . Exemple: en el conjunt de dades {2, 3, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 120} el tercer quartil és 15. *Vegeu també:* mediana, primer quartil i rang interquartílic.

Transformació de semblança. Un moviment rígid seguit d'una homotècia.

Univers. Llista dels resultats individuals a considerar en el model de probabilitat d'un procés aleatori.

Valor esperat. La mitjana ponderada dels possibles valors d'una variable aleatòria, amb pesos estadístics que ens han donat les seves probabilitats respectives.

Variable aleatòria. L'assignació d'un valor numèric a cada resultat d'un univers.

Vector. Una quantitat amb magnitud i direcció en el pla o en l'espai, definida per una parella o un triplet de nombres reals.

Taula 1. Situacions comunes de suma i resta

6.

	Resultat desconegut	Segon factor desconegut	Primer factor desconegut
Afegir a	Hi ha dos conills que seuen sobre l'herba. Apareixen d'un salt tres conills més. Quants conills hi ha ara? $2 + 3 = ?$	Hi havia dos conills asseguts a l'herba. En van aparèixer més. En total n'hi havia cinc. Quants conills més van arribar? $2 + ? = 5$	Hi havia uns conills asseguts a l'herba. En van aparèixer tres més d'un salt. Llavors, n'hi havia cinc en total. Quants conills hi havia al principi? $? + 3 = 5$
Restar de	Hi havia cinc pomes sobre la taula. Me'n vaig menjar dues. Quantes pomes hi ha ara sobre la taula? $5 - 2 = ?$	Hi havia cinc pomes sobre la taula. Me'n vaig menjar unes quantes. Després, hi havia tres pomes. Quantes pomes em vaig menjar? $5 - ? = 3$	Hi havia pomes sobre la taula. Me'n vaig menjar dues. Després, van quedar tres pomes. Quantes pomes hi havia sobre la taula al principi? $?$ $? - 2 = 3$
	Total desconegut	Sumand desconegut	Ambdós sumands desconeguts ¹
Ajuntar/ separa r^2	Hi havia cinc pomes sobre la taula. Me'n vaig menjar dues. Quantes pomes hi ha ara sobre la taula? $3 + 2 = ?$	Hi ha cinc pomes sobre la taula. N'hi ha tres de vermelles i la resta són verdes. Quantes pomes verdes hi ha? $3 + ? = 5, 5 - 3 = ?$	L'àvia té cinc flors. Quantes en podrà posar dins del gerro vermell i quantes dins del blau? $5 = 0 + 5, 5 = 5 + 0$ $5 = 1 + 4, 5 = 4 + 1$ $5 = 2 + 3, 5 = 3 + 2$
	Diferència desconeguda	Major desconegut	Menor desconegut
Comparar ³	(Versió "quants més que") La Lucy té dues pomes. La Julie en té cinc. Quantes pomes més té la Julie que la Lucy? (Versió "quants menys que") La Lucy té dues pomes. La Julie en té cinc. Quantes pomes té la Julie menys que la Lucy? $2 + ? = 5, 5 - 2 = ?$	(Versió amb "més que") La Julie té tres pomes més que la Lucy. La Lucy té dues pomes. Quantes pomes té la Julie? (Versió amb "menys que") La Lucy té tres pomes menys que la Julie. La Lucy té dues pomes. Quantes pomes té la Julie? $2 + 3 = ?, 3 + 2 = ?$	(Versió amb "més que") La Julie té tres pomes més que la Lucy. La Julie en té cinc. Quantes pomes té la Lucy? (Versió amb "menys que") La Lucy té tres pomes menys que la Julie. La Julie té cinc pomes. Quantes pomes té la Lucy? $5 - 3 = ?, ? + 3 = 5$

¹Aquestes situacions de separació es poden fer servir per mostrar totes les descomposicions d'un nombre determinat. Les equacions associades, que tenen el total a l'esquerra del símbol d'igual, ajuden els nens a entendre que el símbol = no sempre significa "dóna" o "és igual a", sinó que sempre significa "el mateix nombre que".

²Els dos sumands poden ser desconeguts, de manera que hi ha tres variacions d'aquestes situacions. "Ambdós sumands desconeguts" és una extensió productiva d'aquesta situació bàsica, sobretot pels nombres petits, iguals o menors de 10.

³En les situacions de "Major desconegut" o "Menor desconegut", una versió condueix a l'operació correcta (la versió amb "més" del "Major desconegut" i la versió amb "menys" del "Menor desconegut"). Les altres versions són més difícils.

Taula 2. Situacions de multiplicació i divisió comuns

7.

	Producte desconegut	Mida grup desconeguda ("Quants n'hi ha a cada grup?" Divisió)	Nombre de grup desconegut ("Quants grups hi ha?" Divisió)
	$3 \times 6 = ?$	$3 \times ? = 18; 18 \div 3 = ?$	$? \times 6 = 18; 18 \div 6 = ?$
Grups iguals	Hi ha tres bosses amb sis prunes a cada una. Quantes prunes hi ha en total? <i>Exemple de mesurament.</i> Necessites tres trossos de fil de 6 cm cadascun. Quant fil necessites ?	Si repartim 18 prunes en tres bosses, quantes prunes hi haurà a cada bossa ? <i>Exemple de mesurament.</i> Tens 18 cm de fil i el talles en tres parts iguals. Quina longitud tindrà cada tros?	Si hem de posar 18 prunes en bosses i en posem 6 per bossa, quantes bosses ens calen ? <i>Exemple de mesurament.</i> Tens 18 cm de fil i el talles en trossos de 6 cm. Quants trossos de fil tens?
Grups, àrees ⁴ ⁵	Hi ha tres files de pomes amb sis pomes per fila. Quantes pomes hi ha ? <i>Exemple d'àrea.</i> Quina és l'àrea d'un rectangle de 3 cm per 6 cm?	Si distribuïm 18 pomes en tres files idèntiques, quantes pomes hi haurà a cada fila ? <i>Exemple d'àrea.</i> Un rectangle té una àrea de 18 cm ² . Si un costat fa 3 cm de llarg, quant mesura el costat que hi ha a la seva vora?	Si distribuïm 18 pomes en files de sis pomes per fila, quantes files hi haurà ? <i>Exemple d'àrea.</i> Un rectangle té una àrea de 18 cm ² . Si un costat mesura 6 cm, quant medeix el costat que hi ha a la seva vora?
Comparar	Un barret blau val 6€. Un barret vermell val tres vegades més. Quant costa el barret vermell? <i>Exemple de mesurament.</i> Una goma elàstica mesura 6 cm de llarg. Quant mesurarà si l'estirem tres vegades la seva longitud ?	Un barret vermell val 18€, tres vegades més que un barret blau. Quant val un barret blau? <i>Exemple de mesurament.</i> Estirem una goma elàstica fins que mesuri 18 cm, tres vegades més que el que mesurava abans. Quant mesura la goma elàstica ?	Un barret vermell val 18€ i un de blau, 6€. Quantes vegades més val el barret vermell que el blau? <i>Exemple de mesurament.</i> Abans, una goma elàstica mesurava 6cm. Si l'estirem fins que en mesuri 18, quantes vegades més mesura la goma ara ?
General	$a \times b = ?$	$a \times ? = p; p \div a = ?$	$? \times b = p; p \div b = ?$

⁴El llenguatge en els exemples de grups ens ensenya la forma més fàcil de problemes d'aquest tipus. Una manera més difícil és fer servir els termes fila i columna: les pomes de l'aparador de la fruiteria estan repartides en tres files i sis columnes.

Quantes pomes hi ha? Totes dues formes són vàlides.

⁵L'àrea implica grups de quadrats que s'han ajuntat, sense espais buits ni superposats. Per tant, els problemes de grups inclouen aquestes situacions de mesurament especialment importants.

⁷Els primers exemples de cada casella són exemples de coses diferenciades. Aquests resulten més fàcils per als alumnes i se'ls hauria d'ensenyar abans que els exemples de mesurament.

Taula 3. Les propietats de les operacions. En aquesta taula, a , b i c representen nombres arbitraris en un sistema numèric determinat. Les propietats de les operacions s'apliquen als sistemes numèrics racional, real i complex.

Propietat associativa de la suma	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Propietat conmutativa de la suma	$a + b = b + a$
Propietat de l'element neutre de la suma de 0	$a + 0 = 0 + a = a$
Existència dels inversos additiu	Per cada a hi ha $-a$ per tant $a + (-a) = (-a) + a = 0$. ($a \times$
Propietat associativa de la multiplicació.	$b) \times c = a \times (b \times c)$
Propietat commutativa de la multiplicació	$a \times b = b \times a$
Propietat de l'element neutre de la multiplicació d'1	$a \times 1 = 1 \times a = a$
Existència d'inversos multiplicatius	Per cada $a \neq 0$ hi ha $1/a$ per tant $a \times 1/a = 1/a \times a = 1$.
Propietat distributiva de la multiplicació sobre la suma	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Taula 4. Les propietats de l'equació. En aquesta taula, a , b i c representen nombres arbitraris dels sistemes numèrics racional, real i complex.

Propietat reflexiva	$a = a$
Propietat simètrica	Si $a = b$, llavors $b = a$.
Propietat transitiva	Si $a = b$ i $b = c$, llavors $a = c$.
Propietat de la suma	Si $a = b$, llavors $a + c = b + c$.
Propietat de la resta	Si $a = b$, llavors $a - c = b - c$.
Propietat de la multiplicació	Si $a = b$, llavors $a \times c = b \times c$.
Propietat de la divisió	Si $a = b$ i $c \neq 0$, llavors $a \div c = b \div c$.
Propietat de la substitució	Si $a = b$, llavors b es pot substituir per a en qualsevol expressió que contingui a .

Taula 5. Les propietats de la inequació. En aquesta taula, a , b i c representen nombres arbitraris dels sistemes numèrics racional o real.

Exactament una d'aquestes és certa: $a < b$, $a = b$, $a > b$.
Si $a > b$ i $b > c$ llavors $a > c$.
Si $a > b$, llavors $b < a$.
Si $a > b$, llavors $-a < -b$.
Si $a > b$, llavors $a \pm c > b \pm c$.
Si $a > b$ i $c > 0$, llavors $a \times c > b \times c$.
Si $a > b$ i $c < 0$, llavors $a \times c < b \times c$.
Si $a > b$ i $c > 0$, llavors $a \div c > b \div c$.
Si $a > b$ i $c < 0$, llavors $a \div c < b \div c$.

Obres de consulta

Documents estàndards estatals actuals.

Research summaries i briefs provided to the Working Group by researchers.

National Assessment Governing Board, *Mathematics Framework for the 2009 National Assessment of Educational Progress*. U.S. Department of Education, 2008.

NAEP Validity Studies Panel, Validity Study of the NAEP Mathematics Assessment: Grades 4 i 8. Daro et al., 2007.

Mathematics documents from: Alberta, Canada; Belgium; China; Chinese Taipei; Denmark; Engli; Finli; Hong Kong; India; Irel; Japan; Korea; New Zeali; Singapore; Victoria (British Columbia).

Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics. National Research Council, Mathematics Learning Study Committee, 2001.

Benchmarking for Success: Ensuring U.S. Students Receive a World-Class Education. National Governors Association, Council of Chief State School Officers, i Achieve, Inc., 2008.

Crossroads in Mathematics (1995) i *Beyond Crossroads* (2006). American Mathematical Association of Two-Year Colleges (AMATYC).

Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence. National Council of Teachers of Mathematics, 2006.

Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. U.S. Department of Education: Washington, DC, 2008.

Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A PreK-12 Curriculum Framework.

How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School. Bransford, J.D., Brown, A.L., i Cocking, R.R., eds. Committee on Developments in the Science of Learning, Commission on Behavioral i Social Sciences i Education, National Research Council, 1999.

Mathematics and Democracy, The Case for Quantitative Literacy, Steen, L.A. (ed.). National Council on Education i the Disciplines, 2001.

Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity. Cross, C.T., Woods, T.A., i Schweingruber, S., eds. Committee on Early Childhood Mathematics, National Research Council, 2009.

The Opportunity Equation: Transforming Mathematics and Science Education for Citizenship and the Global Economy. The Carnegie Corporation of New York i the Institute for Advanced Study, 2009. Online: <http://www.opportunityequation.org/>

Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

The Proficiency Illusion. Cronin, J., Dahlin, M., Adkins, D., i Kingsbury, G.G.; foreword by C.E. Finn, Jr., i M. J. Petrilli. Thomas B. Fordham Institute, 2007.

Ready or Not: Creating a High School Diploma That Counts. American Diploma Project, 2004.

A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

Sizing Up State Standards 2008. American Federation of Teachers, 2008.

A Splintered Vision: An Investigation of U.S. Science and Mathematics Education. Schmidt, W.H., McKnight, C.C., Raizen, S.A., et al. U.S. National Research Center for the Third International Mathematics i Science Study, Michigan State University, 1997.

Stars By Which to Navigate? Scanning National and International Education Standards in 2009. Carmichael, S.B., Wilson, W.S. Finn, Jr., C.E., Winkler, A.M., i Palmieri, S. Thomas B. Fordham Institute, 2009.

Askey, R., "Knowing i Teaching Elementary Mathematics," *American Educator*, Fall 1999.

Aydogan, C., Plummer, C., Kang, S. J., Bilbrey, C., Farran, D. C., & Lipsey, M. W. (2005). An investigation of prekindergarten curricula: Influences on classroom characteristics i child engagement. Paper presented at the NAEYC.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W. i Niss, M. (Eds) *Applications and Modeling in Mathematics Education*, ICMI Study 14. Amsterdam: Springer.

Brosterman, N. (1997). *Inventing kindergarten*. New York: Harry N. Abrams.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A.-M. (2004). Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A.-M. (2004). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb i Moore, "Mathematics, Statistics, i Teaching," *Amer. Math. Monthly* 104(9), pp. 801-823, 1997.

Confrey, J., "Tracing the Evolution of Mathematics Content Standards in the United States: Looking Back i Projecting Forward." K12 Mathematics Curriculum Standards conference proceedings, February 5-6, 2007.

Conley, D.T. *Knowledge and Skills for University Success*, 2008.

Conley, D.T. *Toward a More Comprehensive Conception of College Readiness*, 2007.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., i Mark, J., "Habits of Mind: An Organizing Principle for a Mathematics Curriculum," *Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402, 1996.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Van de Walle, J. A., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (Seventh ed.). Boston: Allyn i Bacon.

Ginsburg, A., Leinwi, S., i Decker, K., "Informing Grades 1-6 Standards Development: What Can Be Learned from High-Performing Hong Kong, Korea, i Singapore?" American Institutes for Research, 2009.

Ginsburg et al., "What the United States Can Learn From Singapore's World-Class Mathematics System (i what Singapore can learn from the United States)," American Institutes for Research, 2005.

Ginsburg et al., "Reassessing U.S. International Mathematics Performance: New Findings from the 2003 TIMMS i PISA," American Institutes for Research, 2005.

Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Stevenson-Boyd, J. (2008). Mathematics education for young children: What it is i how to promote it. *Social Policy Report*, 22(1), 1-24.

- Harel, G., "What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question," in R. B. Gold i R. Simons (eds.), *Current Issues in the Philosophy of Mathematics from the Perspective of Mathematicians*. Mathematical Association of America, 2008.
- Henry, V. J., & Brown, R. S. (2008). First-grade basic facts: An investigation into teaching i learning of an accelerated, high-demi memorization stiard. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 153-183.
- Howe, R., "From Arithmetic to Algebra."
- Howe, R., "Starting Off Right in Arithmetic," <http://math.arizona.edu/~ime/2008-09/MIME/BegArith.pdf>.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., i Locuniak, M. N., "Early math matters: kinder garten number competence i later mathematics outcomes," *Dev. Psychol.* 45, 850-867, 2009.
- Kader, G., "Means i MADS," *Mathematics Teaching in the Middle School*, 4(6), 1999, pp. 398-403.
- Kilpatrick, J., Mesa, V., i Sloane, F., "U.S. Algebra Performance in an International Context," in Loveless (ed.), *Lessons Learned: What International Assessments Tell Us About Math Achievement*. Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 2007.
- Leinwi, S., i Ginsburg, A., "Measuring Up: How the Highest Performing State (Massachusetts) Compares to the Highest Performing Country (Hong Kong) in Grade 3 Mathematics," American Institutes for Research, 2009.
- Niss, M., "Quantitative Literacy i Mathematical Competencies," in *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*, Madison, B. L., i Steen, L.A. (eds.), National Council on Education i the Disciplines. Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy held at the National Academy of Sciences in Washington, D.C., December 1-2, 2001.
- Pratt, C. (1948). *I learn from children*. New York: Simon i Schuster.
- Reys, B. (ed.), *The Intended Mathematics Curriculum as Represented in State-Level Curriculum Standards: Consensus or Confusion?* IAP-Information Age Publishing, 2006.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.
- Schmidt, W., Houang, R., i Cogan, L., "A Coherent Curriculum: The Case of Mathematics," *American Educator*, Summer 2002, p. 4.
- Schmidt, W.H., i Houang, R.T., "Lack of Focus in the Intended Mathematics Curriculum: Symptom or Cause?" in Loveless (ed.), *Lessons Learned: What International Assessments Tell Us About Math Achievement*. Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 2007.
- Steen, L.A., "Facing Facts: Achieving Balance in High School Mathematics," *Mathematics Teacher*, Vol. 100. Special Issue.
- Wu, H., "Fractions, decimals, i rational numbers," 2007, <http://math.berkeley.edu/~wu/> (March 19, 2008).
- Wu, H., "Lecture Notes for the 2009 Pre-Algebra Institute," September 15, 2009.
- Wu, H., "Preservice professional development of mathematics teachers," <http://math.berkeley.edu/~wu/pspd2.pdf>.
- Massachusetts Department of Education. Progress Report of the Mathematics Curriculum Framework Revision Panel, Massachusetts Department of Elementary i Secondary Education, 2009.
- www.doe.mass.edu/boe/docs/0509/item5_report.pdf.
- ACT College Readiness Benchmarks™
- ACT College Readiness Stiards™ ACT
- National Curriculum Survey™
- Adelman, C., *The Toolbox Revisited: Paths to Degree Completion From High School Through College*, 2006.
- Advanced Placement Calculus, Statistics and Computer Science Course Descriptions*. May 2009, May 2010. College Board, 2008.
- Aligning Postsecondary Expectations and High School Practice: The Gap Defined* (ACT: Policy Implications of the ACT National Curriculum Survey Results 2005-2006).
- Condition of Education, 2004: Indicator 30, Top 30 Postsecondary Courses*, U.S. Department of Education, 2004.
- Condition of Education, 2007: High School Course-Taking*. U.S. Department of Education, 2007.
- Crisis at the Core: Preparing All Students for College and Work*, ACT.
- Achieve, Inc., Florida Postsecondary Survey, 2008.
- Golfin, Peggy, et al. CNA Corporation. *Strengthening Mathematics at the Postsecondary Level: Literature Review and Analysis*, 2005.
- Camara, W.J., Shaw, E., i Patterson, B. (June 13, 2009). *First Year English i Math College Coursework*. College Board: New York, NY (Available from authors).
- CLEP Precalculus Curriculum Survey: Summary of Results. The College Board, 2005.
- College Board Stiards for College Success: Mathematics i Statistics. College Board, 2006.
- Miller, G.E., Twing, J., i Meyers, J. "Higher Education Readiness Component (HERC) Correlation Study." Austin, TX: Pearson.
- On Course for Success: A Close Look at Selected High School Courses That Prepare All Students for College and Work*, ACT.
- Out of Many, One: Towards Rigorous Common Core Standards from the Ground Up*. Achieve, 2008.
- Ready for College and Ready for Work: Same or Different?* ACT.
- Rigor at Risk: Reaffirming Quality in the High School Core Curriculum, ACT.
- The Forgotten Middle: Ensuring that All Students Are on Target for College and Career Readiness before High School*, ACT.
- Achieve, Inc., Virginia Postsecondary Survey, 2004.
- ACT Job Skill Comparison Charts.
- Achieve, Mathematics at Work, 2008.
- The American Diploma Project Workplace Study*. National Alliance of Business Study, 2002.
- Carnevale, Anthony i Desrochers, Donna. *Connecting Education Standards and Employment: Course-taking Patterns of Young Workers*, 2002.
- Colorado Business Leaders' Top Skills, 2006.
- Hawai'i Career Ready Study: access to living wage careers from high school*, 2007.
- States' Career Cluster Initiative. *Essential Knowledge and Skill Statements*, 2008.
- ACT WorkKeys Occupational Profiles™.
- Program for International Student Assessment (PISA), 2006.
- Trends in International Mathematics i Science Study (TIMSS), 2007.

- International Baccalaureate, Mathematics
Standard Level, 2006.
- University of Cambridge International
Examinations: General Certificate of
Secondary Education in Mathematics,
2009.
- EdExcel, General Certificate of Secondary
Education, Mathematics, 2009.
- Blachowicz, Camille, i Fisher, Peter.
“Vocabulary Instruction.” In *Handbook
of Reading Research*, Volume III, edited
by Michael Kamil, Peter Mosenthal,
P. David Pearson, i Rebecca Barr, pp.
503-523. Mahwah, NJ: Lawrence
Erlbaum Associates, 2000.
- Gándara, Patricia, i Contreras, Frances. *The
Latino Education Crisis: The
Consequences of Failed Social Policies*.
Cambridge, Ma: Harvard University
Press, 2009.
- Moschkovich, Judith N. “Supporting the
Participation of English Language
Learners in Mathematical Discussions.”
For the Learning of Mathematics 19
(March 1999): 11-19.
- Moschkovich, J. N. (in press). Language,
culture, i equity in secondary
mathematics classrooms. To appear
in F. Lester & J. Lobato (ed.), *Teaching i
Learning Mathematics: Translating
Research to the Secondary Classroom*,
Reston, VA: NCTM.
- Moschkovich, Judith N. “Examining
Mathematical Discourse Practices,” *For
the Learning of Mathematics* 27 (March
2007): 24-30.
- Moschkovich, Judith N. “Using Two
Languages when Learning Mathematics:
How Can Research Help Us Understand
Mathematics Learners Who Use Two
Languages?” *Research Brief and
Clip*, National Council of Teachers of
Mathematics, 2009 [http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_
i_Advocacy/Research/Clips_i_
Briefs/Research_brief_12_Using_2.pdf](http://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_News_i_Advocacy/Research/Clips_i_Briefs/Research_brief_12_Using_2.pdf).
(accessed November 25, 2009).
- Moschkovich, J.N. (2007) Bilingual
Mathematics Learners: How views of
language, bilingual learners, i
mathematical communication impact
instruction. In Nasir, N. i Cobb, P. (eds.),
*Diversity, Equity, and Access to
Mathematical Ideas*. New York: Teachers
College Press, 89-104.
- Schleppegrell, M.J. (2007). The linguistic
challenges of mathematics teaching i
learning: A research review. *Reading &
Writing Quarterly*, 23:139-159.
- Individuals with Disabilities Education Act
(IDEA), 34 CFR §300.34 (a). (2004).
- Individuals with Disabilities Education
Act (IDEA), 34 CFR §300.39 (b)(3).
(2004).
- Office of Special Education Programs, U.S.
Department of Education. “IDEA
Regulations: Identification of Students
with Specific Learning Disabilities,”
2006.
- Thompson, S. J., Morse, A.B., Sharpe,
M., i Hall, S., “Accommodations
Manual: How to Select, Administer i
Evaluate Use of Accommodations i
Assessment for Students with
Disabilities,” 2nd Edition. Council of
Chief State School Officers, 2005.