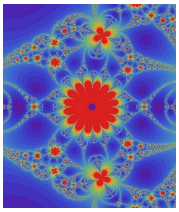


UNITAT 7: FUNCIONS

1. Definició

Una funció és una relació entre dues variables, de tal manera que al variar el valor d'una d'elles va variant el valor de l'altra.

Exemple:

x	$f(x) = x+1$
-2	$(-2) + 1 = -1$
-1	$(-1) + 1 = 0$
0	$(0) + 1 = 1$
1	$(1) + 1 = 2$
2	$(2) + 1 = 3$

Completa:

x	$g(x) = x - 2$
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	$h(x) = x^2 + 3x - 1$
-2	
-1	
0	
1	
2	

En l'exemple anterior, hem utilitzat 3 funcions diferents: f(x), g(x) i h(x)

Les lletres (f, g, h, etc.) són el nom que li donem a la funció per distingir-les entre elles.

El símbol (x) fa referència a la variable de la qual depèn la funció.

Per exemple:

f(x) vol dir que la funció f depèn de la variable x. Si donem diferents valors a x, va variant el valor de f.

g(z) vol dir que la funció g depèn de la variable z. Si donem diferents valors a z, va variant el valor de g.

Anomenem **imatge** al valor que pren la funció per a un determinat valor de la variable independent. Per exemple: la imatge de la funció f(x) per x=0 és 1.

Activitats:

1) Calcula la imatge de les següents funcions pels valors donats de la variable independent:

x	$j(x)=\frac{3x-2}{6}$
-2	
-1	
0	
1	
2	

y	$m(y)=3^y-1$
-2	
-1	
0	
1	
2	

z	$n(z)=\log(z^2)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

2. Variable dependent i variable independent

Per una funció qualsevol, com per exemple:

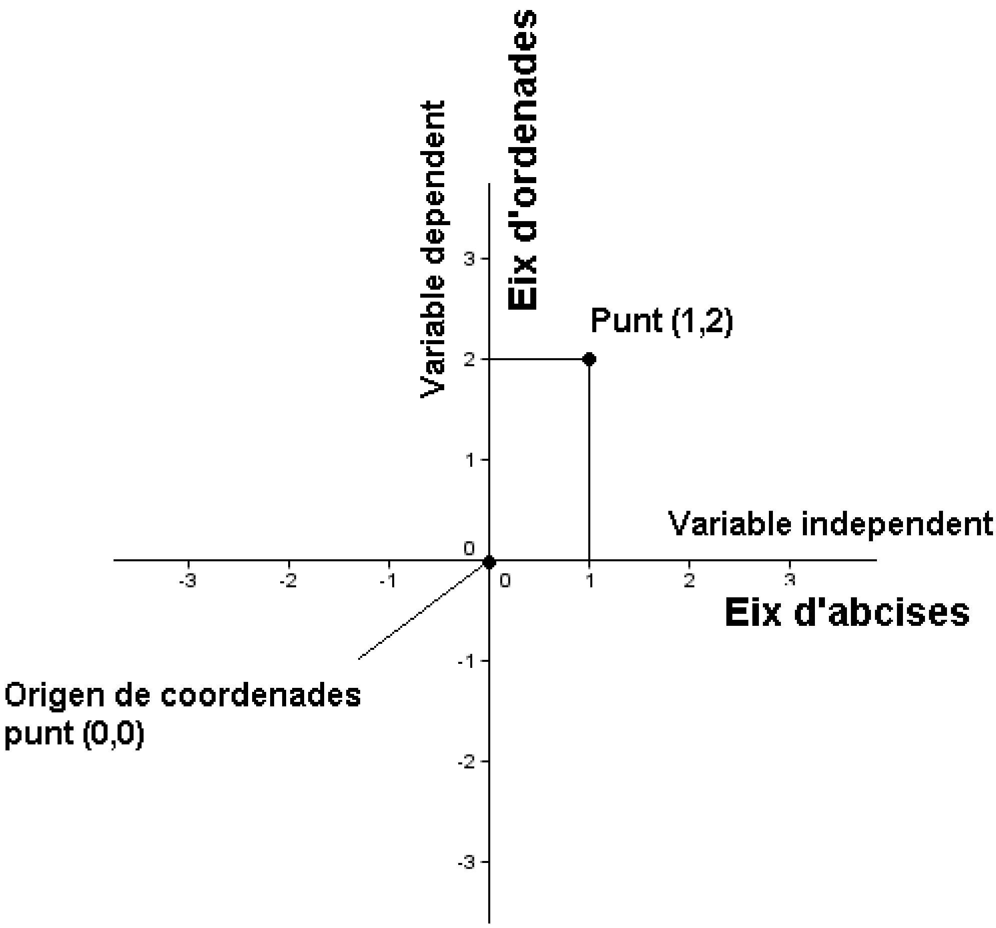
$$f(x) = x + 3$$

f(x) és la variable **dependent**.
El seu valor depèn del
valor que tingui x.
El valor de f(x) també
S'anomena **imatge**.

x és la variable **independent**.
A mesura que donem diferents
valors a x, anirà variant
el valor de la f(x)
El valor de la variable x
també rep el nom d'**antiimatge**

3. Representació de funcions

Les funcions es representen en eixos de coordenades com els següents:

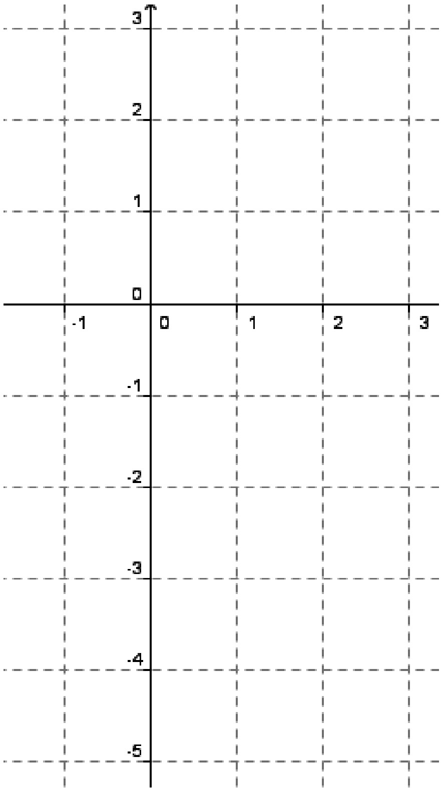


Activitats:

2) Representa les següents funcions:

x	A(x) = 2x-3
-1	
0	
1	
2	
3	

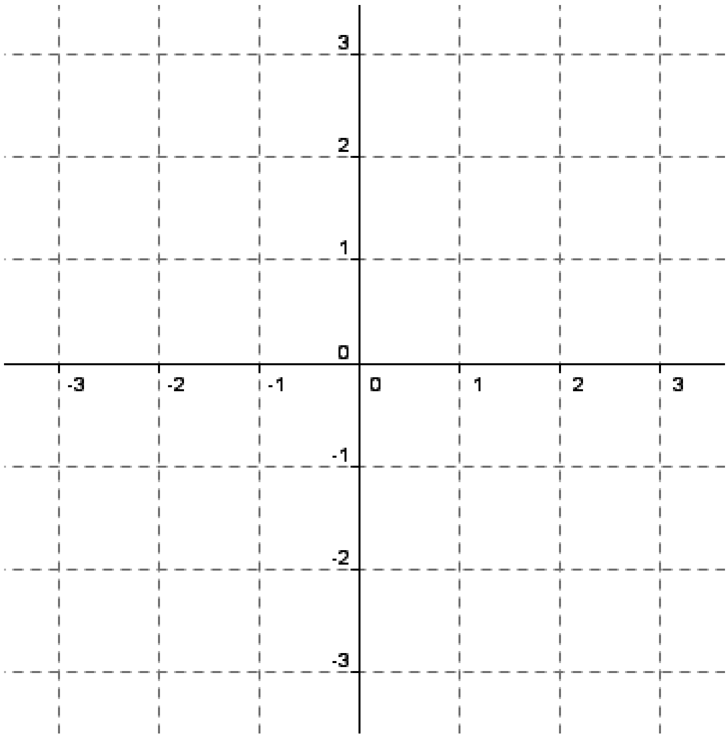
x	B(x) = -2x+1
-1	
0	
1	
2	
3	



3) Representa les següents funcions en els mateixos eixos de coordenades. No cal que representis els punts que quedin fora dels eixos:

M(x) = 2x-2
N(x) = 2x-1
O(x) = 2x
P(x) = 2x+1
Q(x) = 2x+2

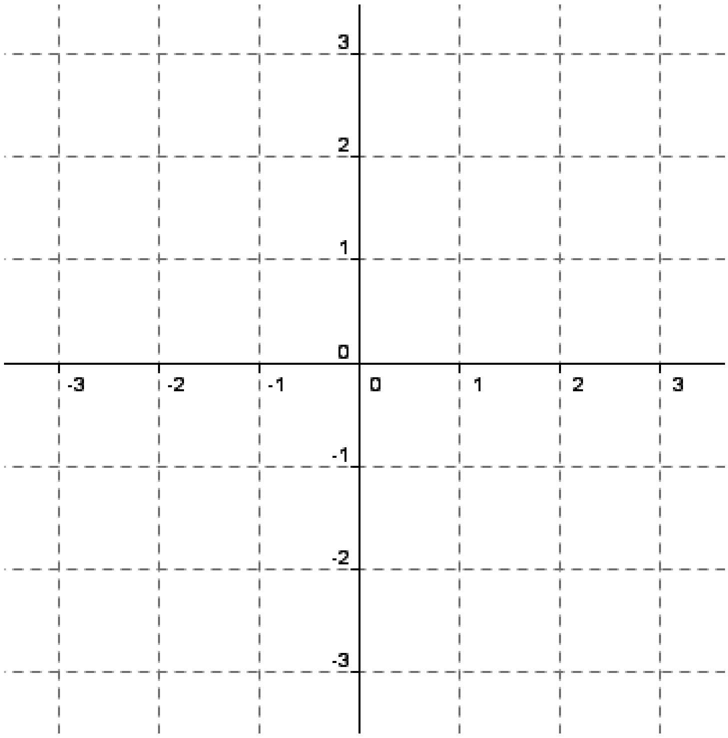
què observes?



4) Representa les següents funcions en els mateixos eixos de coordenades. No cal que representis els punts que quedin fora dels eixos:

$A(x) = 2x+1$
$B(x) = x+1$
$C(x) = 1$
$D(x) = -x+1$
$E(x) = -2x+1$

què observes?



Fixem-nos que fins ara només hem vist funcions definides per una expressió del tipus: ax + b
Aquest tipus de funcions sempre són una recta, però hi ha una infinitat de tipus diferents de funcions.

5) Representa les següents funcions:

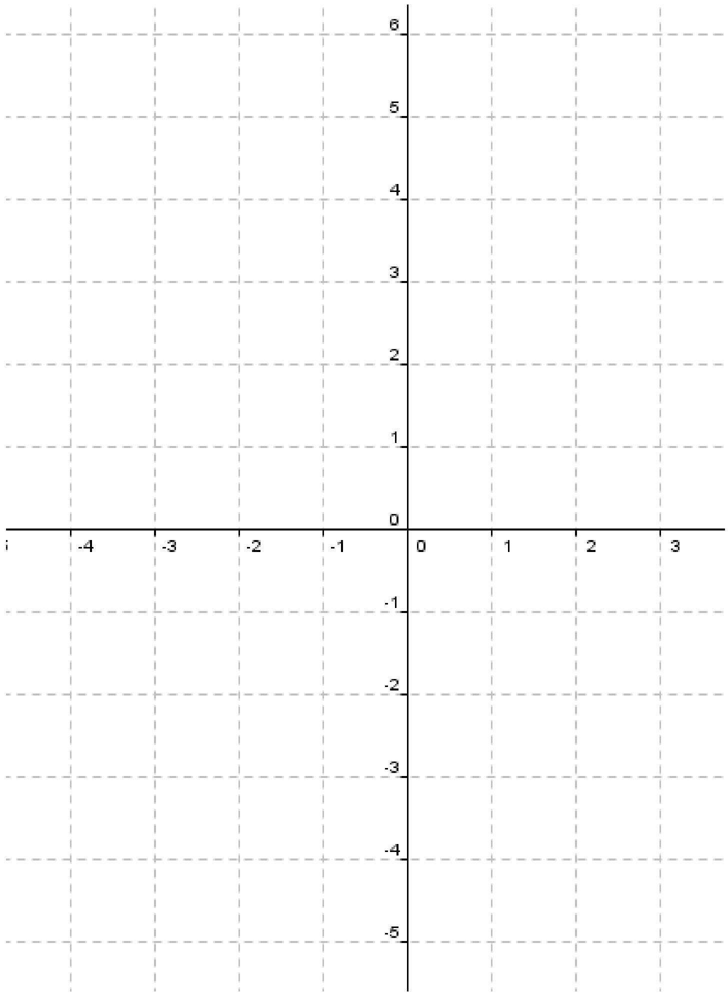
$A(x) = x^2 + 2x – 3$

$B(x) = x^3 + 3x^2$

$C(x) = \frac{6}{x}$

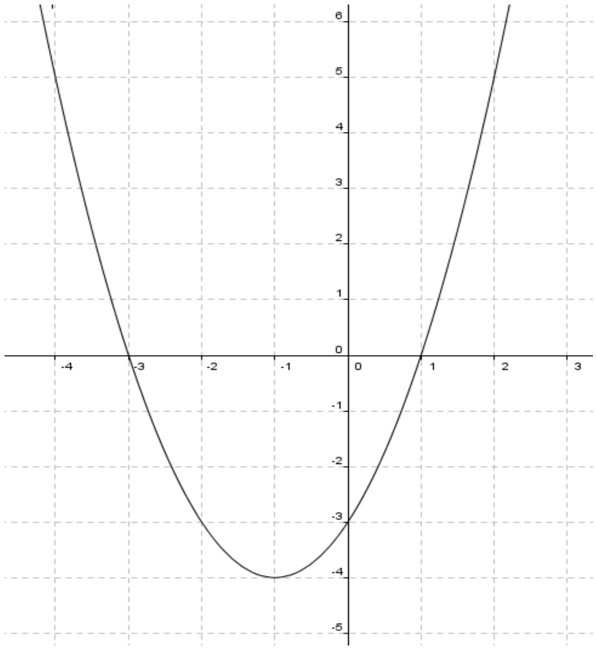
$D(x) = \frac{1}{x^2-4}$

$E(x) = \sqrt{x+3}$

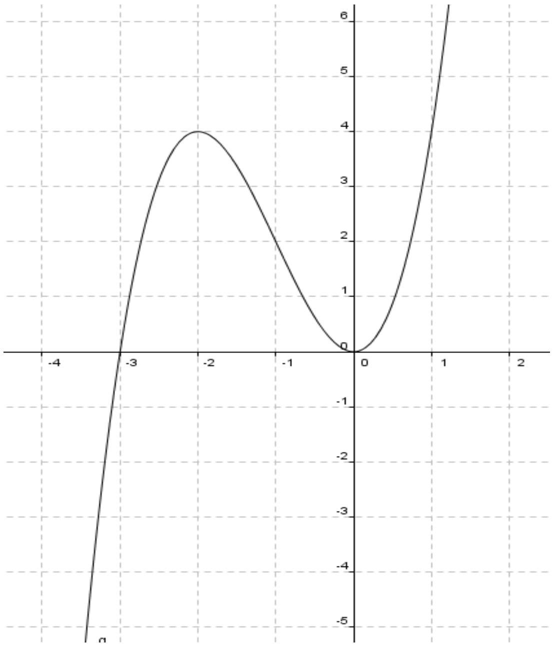


Solucions de l'activitat 5:

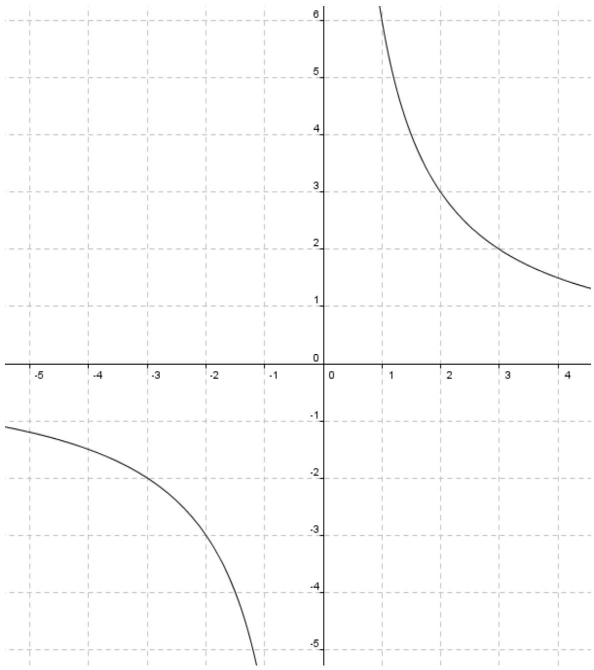
A(x):



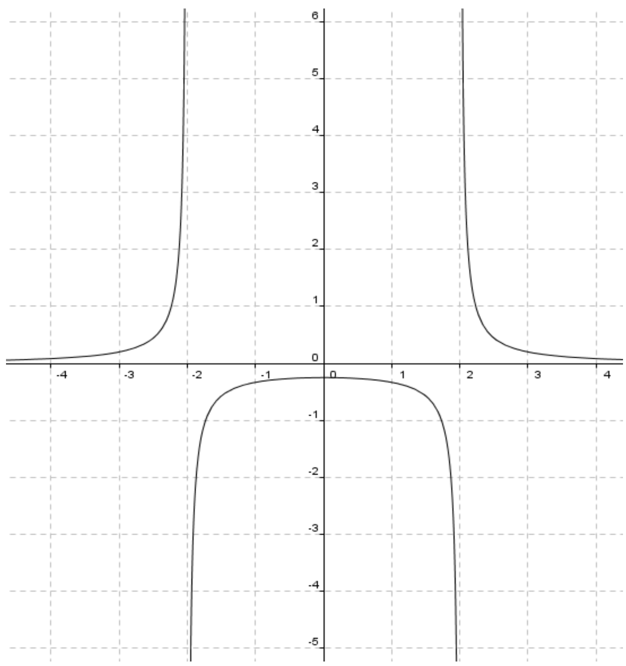
B(x):



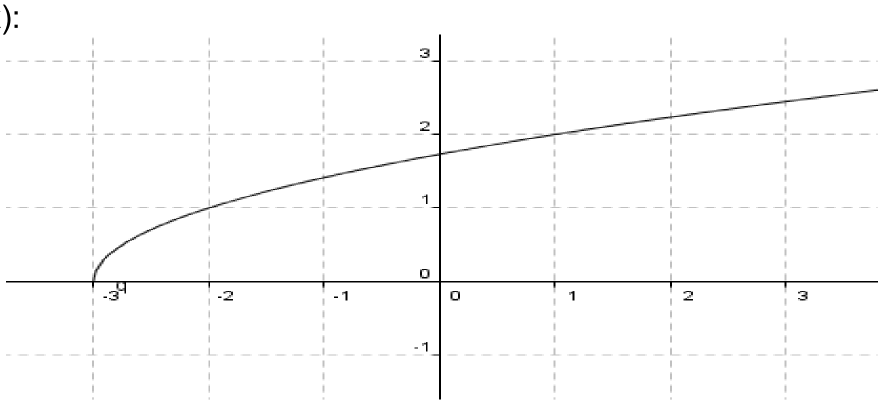
C(x):



D(x):



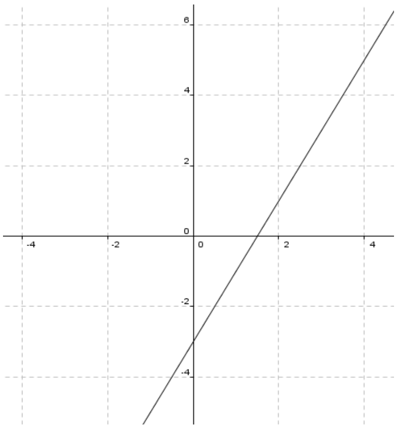
E(x):



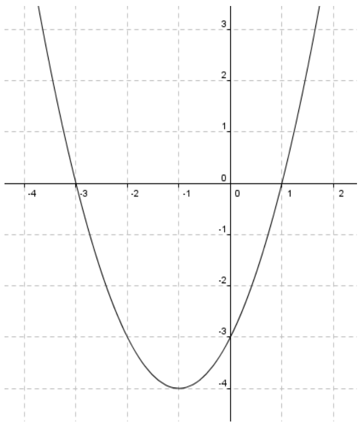
4. Tipus de funcions

Polinòmiques:

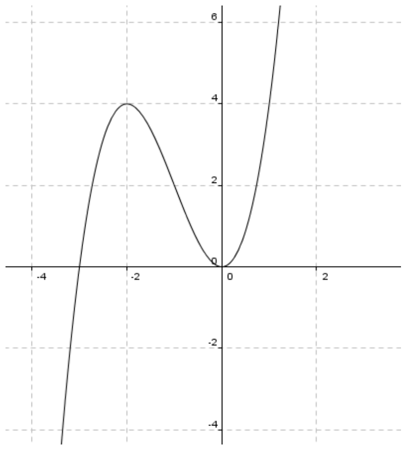
grau 1: $y = ax + b$



grau 2: $y = ax^2 + bx + c$

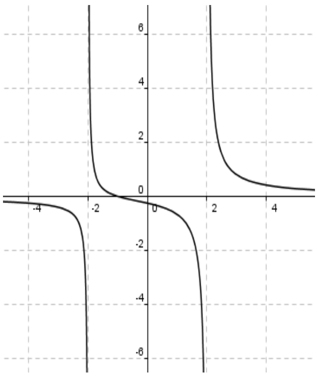


grau 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$



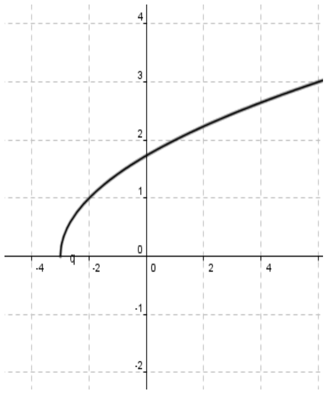
Racionals:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$



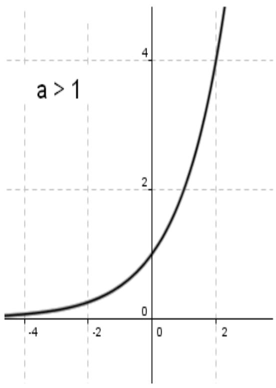
Irracionals:

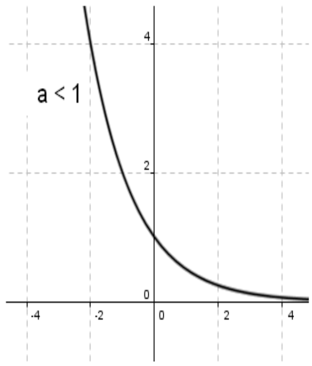
$$y = \sqrt{P(x)}$$



Exponencials:

$$y = a^x$$

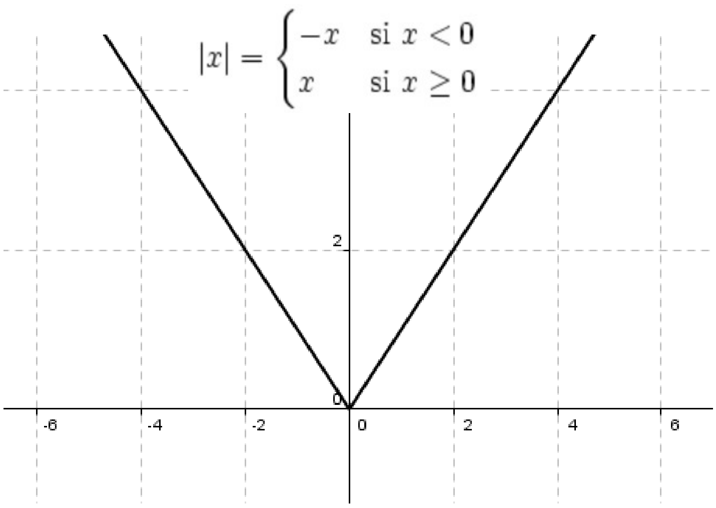




5. Funcions definides a trossos

En matemàtiques, una funció definida a trossos f(x) d'una variable real x és una funció amb una definició diferent en diferents subconjunts disjunts del seu domini. A aquestes funcions també s'anomenen funcions definides per intervals.

Un exemple molt conegut de funció definida a trossos és el valor absolut. La funció valor absolut per valors reals es pot definir com el mateix valor quan aquest valor és positiu, i canviant-li el signe si és negatiu.



6. Representa les següents funcions:

a) $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x\le 1\\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}$

b) $h(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\le -2\\ 3 & \text{si } x>-2\end{cases}$

c) $k(x)=\begin{cases}-2x+6 & \text{si } x<2\\ x & \text{si } x\ge 2\end{cases}$

d) $m(x)=\begin{cases}3+2x & \text{si } x\le 0\\ x^2-1 & \text{si } x>0\end{cases}$

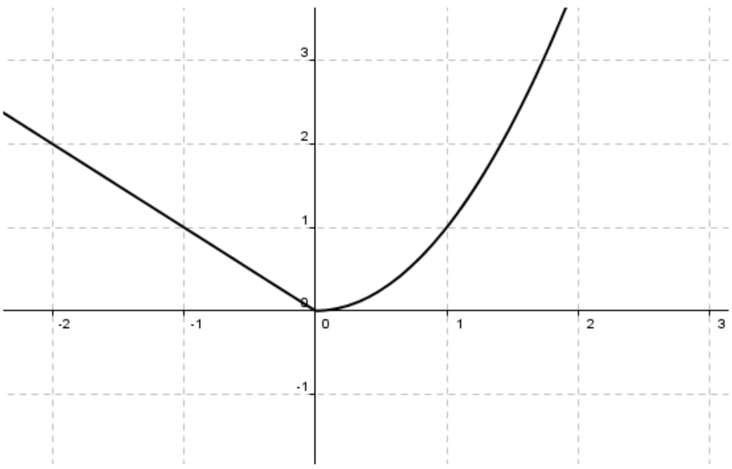
e) $q(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x<-1\\ x^2-4 & \text{si } -1\le x\le 2\\ 4 & \text{si } x>2\end{cases}$

f) $r(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x\le -4\\ -3 & \text{si } -4<x\le -2\\ x^2-4 & \text{si } -2<x<1\\ -x+4 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

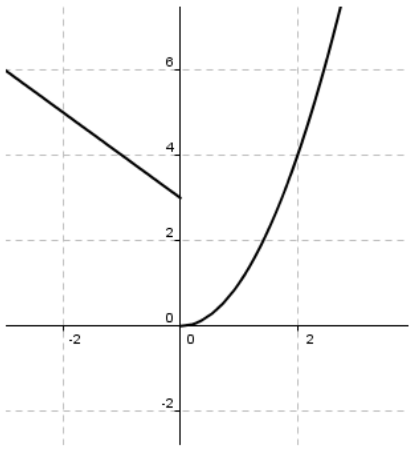
6. Continuïtat

Diem que una funció és contínua quan no cal aixecar el llapis del paper per dibuixar-la.

Contínua



Discontinua



7. Digues si les funcions següents són contínues i si no ho són, digues en quin punt tenen la discontinuïtat.

a) $\begin{cases}4 & si \quad x>1\\ \frac{1}{x} & si \quad x\le 1\end{cases}$

b) $y=\begin{cases}\frac{1}{2}x & si \quad x\le -2\\ x+1 & si \quad -2<x\le 2\\ 2x-1 & si \quad x>2\end{cases}$

c) $y=\begin{cases}3 & si \quad x\le -1\\ \frac{1}{2}x^2+1 & si \quad -1<x\le 4\\ -x & si \quad x>4\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x+3 & si \quad x\le -2\\ 1 & si \quad -2<x\le 1\\ -x+5 & si \quad x>1\end{cases}$

7. Límits

Posem per exemple la funció: $f(x) = x^2 + 1$

Si donem valors a x propers a 1, observem que f(x) s'apropa a 2. Aleshores direm que el límit de f(x) quan x tendeix a 1 és 2. I ho escriurem de la següent manera:

x	f(x)
0,8	1.64
0.9	1.81
0.99	1.98

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Fixem-nos que hem donat a x valors propers a 1 per sota, però què passa si ens hi apropem per sobre? En aquest cas, també ens apropem a 2 si fem que la x s'apropi a 1.

x	f(x)
1.2	2.44
1.1	2.21
1.01	2.02

En el primer cas, direm que hem buscat el límit per l'esquerra i ho escriurem així:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$$

En el segon cas, direm que hem buscat el límit per la dreta i ho escriurem així:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

En aquest cas, els límits per l'esquerra i per la dreta coincideixen, aleshores podem dir que el límit existeix. **Si els límits laterals (per l'esquerra i per la dreta) no coincideixen, el límit no existeix.**

Exemple 1: Calcula el límit per $x \to 2$ de la següent funció: $f(x) = 1-2x^2$

Primerament busquem el límit per l'esquerra

i seguidament, busquem el límit per la dreta.

Observem que en ambdós casos ens acostem a -7.

x	f(x)
1.8	-5.48
1.9	-6.22
1.99	-6.92

x	f(x)
2.2	-8.68
2.1	-7.82
2.01	-7.08

Aleshores podem dir que el límit de f(x) quan x tendeix a 2 $\lim_{x \to 2} f(x) = -7$ és -7.

Per altra banda, observem que el valor de la funció en x=2 també és -7: f(2) = -7

Exemple 2: Calcula el límit per $x \to 3$ de la següent funció: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{quan } x \leq 3 \\ x^2 & \text{quan } x > 3 \end{cases}$

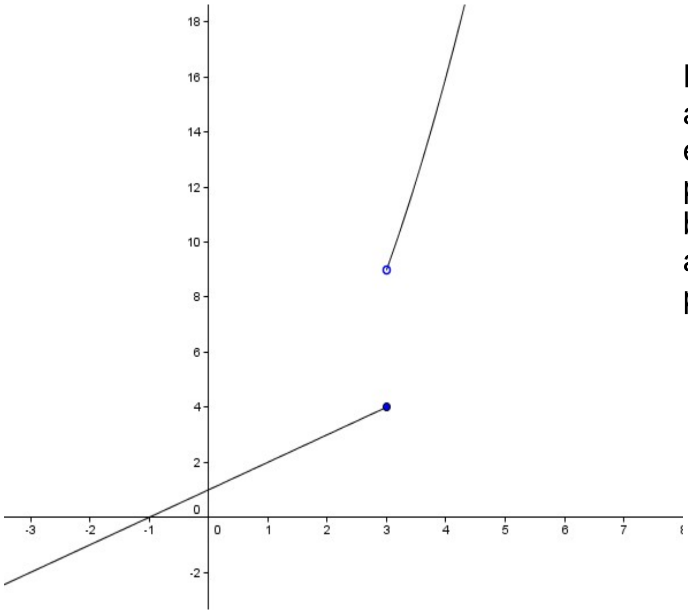
Primerament busquem el límit per l'esquerra. Quan ens apropem a 3 per l'esquerra, la funció ve regida per: x+1 i $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$

i seguidament, busquem el límit per la dreta. Quan ens apropem a 3 per l'esquerra, la funció ve regida per: x^2 i $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 9$

Observem que els límits laterals no coincideixen, aleshores el límit de f(x) per $x \to 3$ no existeix. $\lim_{x \to 3} f(x) = \nexists$

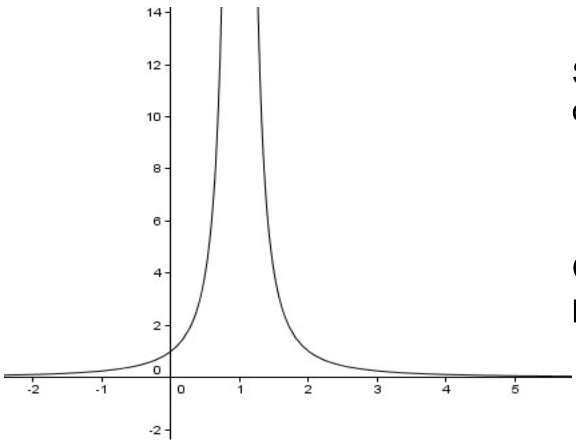
Per altra banda, observem que el valor de la funció en x=3 sí que existeix i és 4: $f(3) = 4$

Si representem la funció de l'exemple 2, obtenim el següent:



Fixem-nos que el punt (3,4) està marcat amb un cercle pintat, per representar que el punt pertany a la funció, en canvi, el punt (3,9) està marcat amb un cercle blanc, per representar que ens hi podem apropar tant com vulguem, però que no pertany a la funció.

Exemple 3: Calcula el límit per $x \to 1$ de la següent $f(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2$ funció:



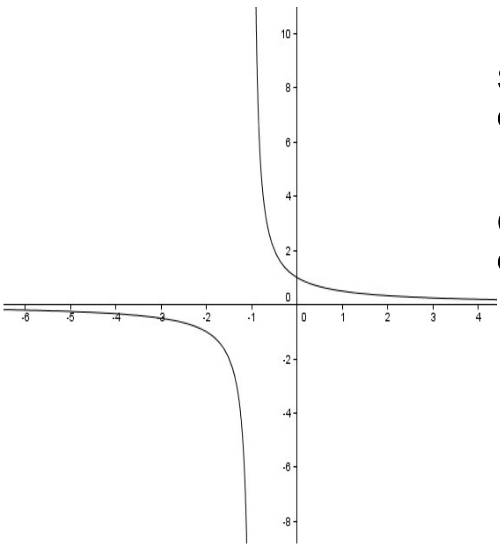
Si fem una representació de la funció, podem observar que:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

Com que ambdós límits laterals coincideixen, podem dir que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

Exemple 4: Calcula el límit per $x \to -1$ de la següent funció:



Si fem una representació de la funció, podem observar que:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

Com que els límits laterals no coincideixen, podem dir que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \nexists$$

8) Troba els límits de les següents funcions i digues si les funcions són continues en aquells punts i representa la funció de l'apartat f.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{quan } x \leq 2 \\ x^2 & \text{quan } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{quan } x \leq 4 \\ x-1 & \text{quan } x > 4 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{quan } x \leq 0 \\ -1 & \text{quan } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{quan } x \geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

Operacions amb límits

$\lim (f+g) = \lim f + \lim g$

$\lim (f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$

$\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim f}{\lim g}$ (només si $\lim g \neq 0$)

$\lim f^g = (\lim f)^{\lim g}$ (només si $\lim f \geq 0$)

Indeterminacions

$\dfrac{\infty}{\infty}$ $\dfrac{0}{0}$ $\infty - \infty$

$\infty \cdot 0$ 1^∞ 0^0 ∞^0

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$$

Límits a l'infinit

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^n + \ldots}{bx^m + \ldots} = \begin{cases} 0 & \text{si } n<m \\ +\infty & \text{si } n>m \text{ i } \dfrac{a}{b}>0 \\ -\infty & \text{si } n>m \text{ i } \dfrac{a}{b}<0 \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } n=m \end{cases}$$

Compte de la vella

$\infty \simeq 1 \cdot 10^6$

9) Troba els límits de la següent funció a partir de la representació:

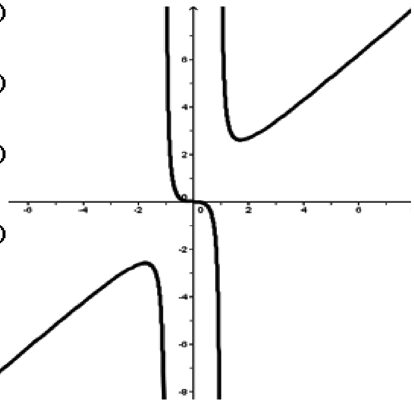
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$



10) Calcula els límits següents, especificant el valor dels límits laterals:

a.-) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ b.-) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{-3}{x+2}\right)$ c.-) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x-5}\right)$

d.-) $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{x+5}{x^2+6x+9}\right)$ e.-) $\lim\limits_{x\to-2^-}\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$

11) Calcula els límits següents:

a.-) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^2+x)^{-3}=$ b.-) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x+3}{(x-1)^2}=$

c.-) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-9x-15}{2x^3-16}$ d.-) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+x-6}{-4}\right)^x=$

e.-) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{2x^2+2}{x^2+1}\right)$ f.-) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^2+3}{x}-\dfrac{x^2+1}{2x-2}\right)$

g.-) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3}\right)^{x^2+1}$

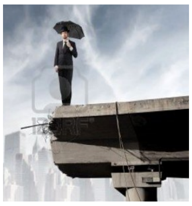
12) Calcula els límits següents

a.-) $\lim_{x\to-\infty}(3x^2-2x-4)=$ b.-) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-x\right)=$

c.-) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3}\right)$ d.-) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$

e.-) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+7}-(3x-4)\right)$ f.-) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{7x^5+2x-1}-\frac{x^3-2}{3x}\right)$

g.-) $\lim_{x\to+\infty}\left(\log_5(6x-7)-10^x\right)$

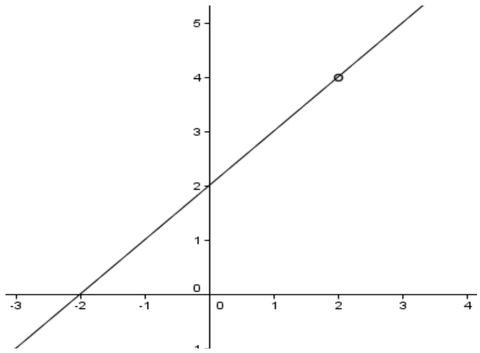


8. Discontinuïtats

Discontinuïtat evitable

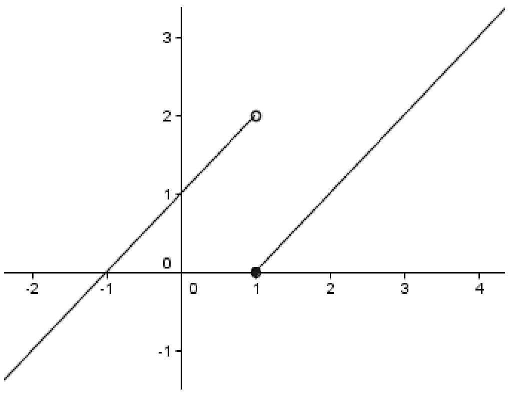
Exemple: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ Aquesta funció té una discontinuïtat en x=2, però la podem arreglar per tal que desaparegui:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2}=x+2$$



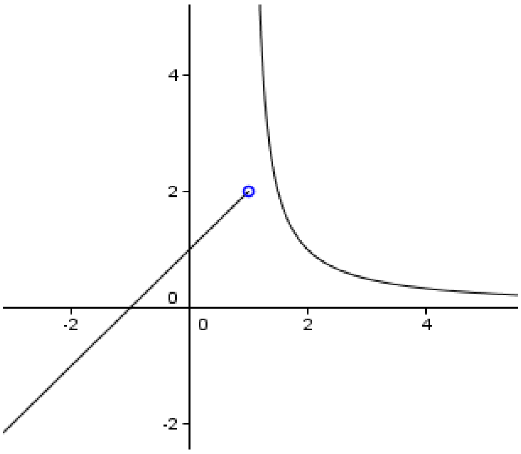
Discontinuïtat de salt finit

Exemple: $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{per } x<1\\ x-1 & \text{per } x\geq 1\end{cases}$



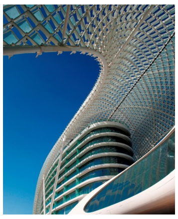
Discontinuïtat de salt infinit

Exemple: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{per } x<1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$

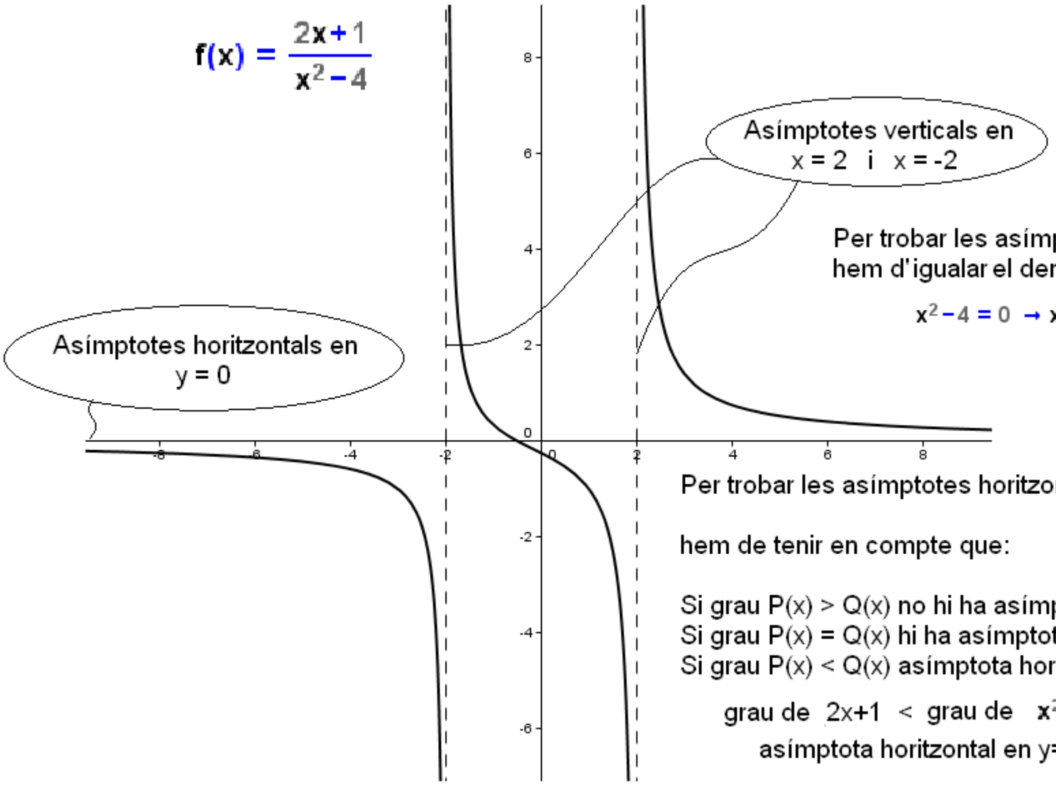


13)Estudia la continuïtat de les següents funcions:

$f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ $\quad h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{per } x \leq 3 \\ \dfrac{3}{x} & \text{per } x>3 \end{cases}$ $\quad j(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{per } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{per } x>1 \end{cases}$



9. Asímptotes



Per trobar les asímptotes verticals hem d'igualar el denominador a zero

$x^2-4=0 \rightarrow x=2\ ;\ x=-2$

Per trobar les asímptotes horitzontals d'una funció:

hem de tenir en compte que:

Si grau P(x) > Q(x) no hi ha asímptotes horitzontals
Si grau P(x) = Q(x) hi ha asímptotes horitzontals
Si grau P(x) < Q(x) asímptota horitzontal en y=0

grau de $2x+1$ < grau de x^2-4

asímptota horitzontal en y=0

14) Troba les asímptotes de les següents funcions:

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{2}{x} \qquad h(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

15) Fes els següents exercicis extrets de
blocs.xtec.cat/cairatnuriapascual/files/.../exercicis-de-branques-infinites.doc

Exercici n. 1.-

Troba les asímptotes verticals de: $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ **i situa la corba respecte d'elles.**

Solució:

- $4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2,\ x = 2.$

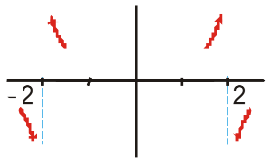
Les asímptotes verticals són x = -2 i x = 2.

Posició de la corba respecte a elles:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{(2-x)(2+x)}$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{4-x^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{4-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{4-x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to +2^+} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$$



Exercici n. 2.-

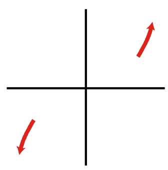
Troba les branques infinites, quan $x \to -\infty$ i $x \to +\infty$ de la següent funció i representa els resultats obtinguts:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

Solució:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) = -\infty$$



Exercici n. 3.-

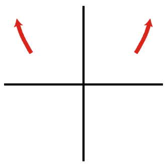
Troba les branques infinites, quan $x \to -\infty$ i $x \to +\infty$ de la següent funció i representa els resultats que obtinguis:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 1}}$$

Solució:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + 2x}{x^2 + 1} = +\infty$$



Exercici n. 4.-

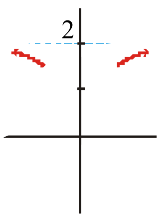
Troba les branques infinites, quan $x \to -\infty$ i $x \to +\infty$, de la següent funció i representa els resultats que obtinguis:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}}$$

Solució:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$



Amb calculadora podem comprovar que:

- Donant valors molt grans i negatius $(x \to +\infty)$, la corba va per sota de l'asímptota $y = 2$.
- Donant valors molt grans i negatius $(x \to -\infty)$, la corba va per sota de l'asímptota $y = 2$.

Exercici n. 5.-

Donada la funció: $$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+1}$$

Troba les seves asímptotes verticals i situa la corba respecte d'elles.

Solució:

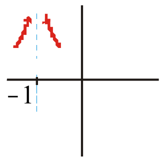
- $x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Només té una asímptota vertical: x = -1

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$$\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{(x+1)^2}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$$



Exercici n. 6.-

Troba les branques infinites, quan $x\to-\infty$ i $x\to+\infty$ de la funció:

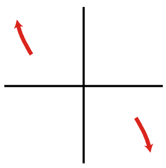
$$f(x)=\frac{-x^3+x}{2}$$

Representa gràficament les resultats obtinguts.

Solució:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^3+x}{2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^3+x}{2}=+\infty$$



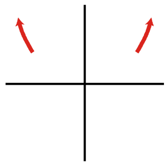
Exercici n. 7.-

Estudia el comportament de la següent funció, quan $x\to-\infty$ i $x\to+\infty$ i representa les branques que obtinguis:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{2x+1}$$

Solució:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{2x + 1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{2x + 1} = +\infty$$



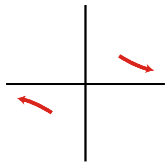
Exercici n. 8.-

Donada la funció: $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1 + x^2}{x^3}}$

troba les asímptotes.

Solució:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2}{x^3} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x^2}{x^3} = 0$$



Exercici n. 9.-

Troba les asímptotes verticals de la següent funció i situa la corba respecte d'elles:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2}{(x + 2)^2}}$$

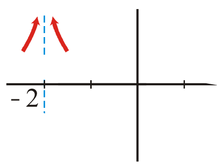
Solució:

- $(x + 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

Només té una asímptota vertical: x = -2

Posició de la corba respecte a l'asímptota:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2}{(x + 2)^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2}{(x + 2)^2} = +\infty$$



Exercici n. 10.-

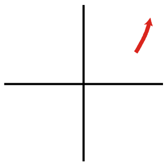
Troba les branques infinites, quan $x \to -\infty$ i $x \to +\infty$, de les següents funcions i representa la informació que obtinguis:

a) $f(x) = (x+2)^4$

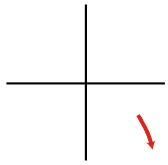
b) $f(x) = x - x^2$

Solució:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)^4 = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - x^2) = -\infty$



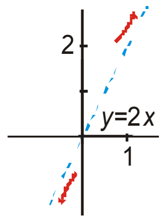
Exercici n. 11.-

Troba l'asímptota obliqua de la següent funció i representa la posició de la corba respecte d'ella:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$$

Solució:

- $\frac{2x^3}{x^2-1} = 2x + \frac{2x}{x^2-1} \quad \to \quad$ Asímptota obliqua: $y = 2x$
- Quan $x \to +\infty$, $\frac{2x}{x^2-1} > 0 \quad \Rightarrow$ La corba està per sobre de l'asímptota.
- Quan $x \to -\infty$, $\frac{2x}{x^2-1} < 0 \quad \Rightarrow$ La corba està per sota de l'asímptota.



Exercici n. 12.-

Estudia i representa el comportament de la següent funció, quan $x \to -\infty$ i quan $x \to +\infty$. Si té alguna asímptota, representa la posició de la corba respecte d'ella:

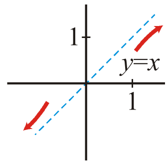
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Solució:

- $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x + \dfrac{-x}{x^2+1} \quad \rightarrow \quad$ Asímptota obliqua: $y = x$

- Quan $x \rightarrow +\infty$, $\dfrac{-x}{x^2+1} < 0 \quad \Rightarrow \quad$ La corba està per sota de l'asímptota.

- Quan $x \rightarrow -\infty$, $\dfrac{-x}{x^2+1} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ La corba està per sobre de l'asímptota.



16) La funció $f(x) = \dfrac{ax+3}{2x+b}$ té una asímptota vertical en $x = 3$ i una asímptota horitzontal en $y = -2$. Trobeu el valor dels paràmetres a i b.

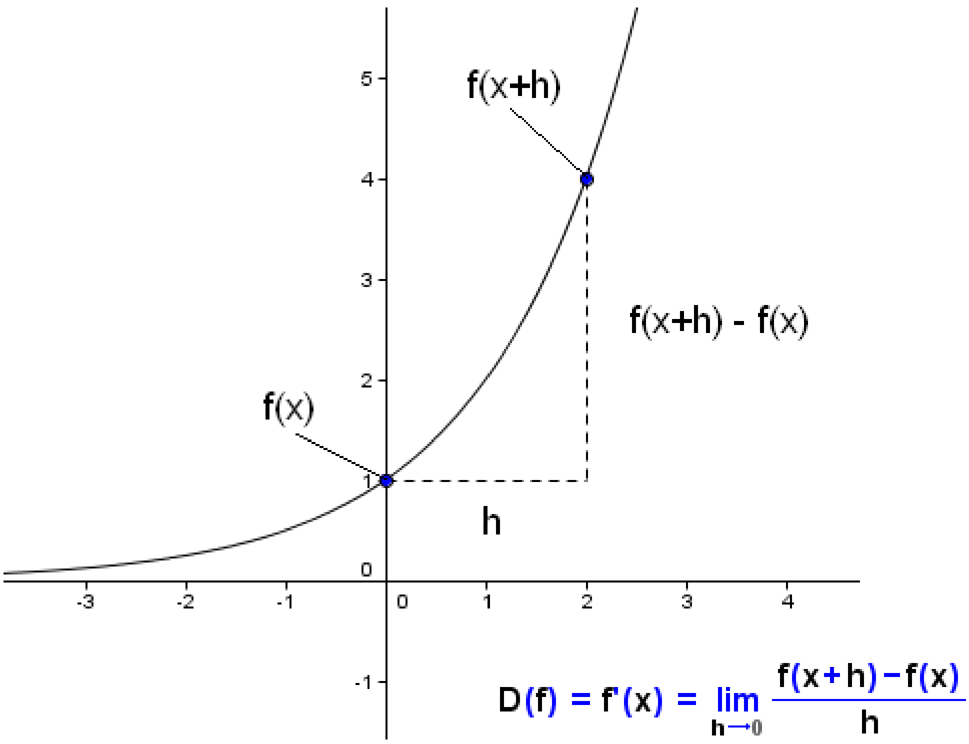
(solució: a=-4 i b=-6)

17) La funció $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{ax - 4}}{\mathbf{3x + b}}$ té una asímptota vertical en x = -1 i una asímptota horitzontal en y = 2. Trobeu els paràmetres a i b. (solució: a=6 i b=3)

10. Derivada

La derivada d'una funció en un punt és el pendent de la funció en aquest punt.

La funció derivada ens dóna el pendent de cada punt de la funció primitiva.



Taula de derivades elementals

Funció F: primitiva de f	funció f: derivada de F
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = a^x \quad (\text{amb } a > 0)$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln(b)}$

18) Deriva les següents funcions:

a) $x^3 - 2x^2 + x$ b) $x^3 - 2x^2 + x$ c) $4x^5 - 2x^2 + x - 2$ d) $-x^3 + 3x^2 - 7x - 1$ e) $-x^4 + 4x^2 - 3x - 7$

19) Deriva les següents funcions

Funció	Solució
$y = 5x^6 - 3x^5 + 3x^3 - 2$	$y' = 30x^5 - 15x^4 + 9x^2$
$y = x^{-4} + 2x^{-3} + x - 4$	$y' = -4x^{-5} - 6x^{-4} + 1$
$y = 3x^{10} + 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$	$y' = 30x^9 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}$
$y = \sqrt{3} \,.\, x^3 - \pi . x + \sqrt{3}$	$y' = 3\sqrt{3} \,.\, x^2 - \pi$
$y = 2\sqrt{x} + \dfrac{2}{x} + x^5$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2} + 5x^4$
$y = 4x^3 + 2x^3 - x^3 + 4$	$y' = 15x^2$

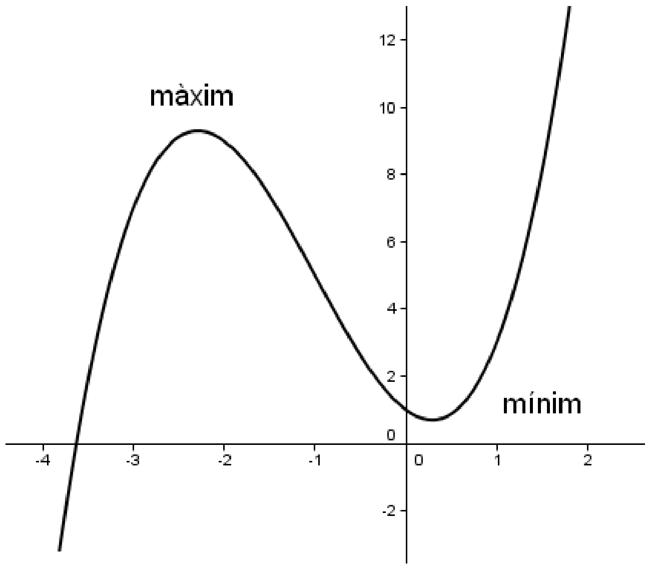
11. Màxims i mínims

Com que f'(x) ens dóna el pendent de la funció en cada punt, quan f'(x) = 0, la funció és plana. Això vol dir que estem en un extrem relatiu (un màxim o un mínim):

$$f'(x) = 3x^2+6x-2 = 0$$

$$x=\frac{\sqrt{15}}{3}-1 \quad , \quad x=-\frac{\sqrt{15}}{3}-1$$

$$f(x) = x^3+3x^2-2x+1$$



Per saber si es tracte d'un màxim o d'un mínim podem fer la 2a. derivada i

si és <0 es tracte d'un mínim

si és >0 es tracte d'un màxim

si és =0 es tracte d'un punt d'inflexió

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$\text{quan } x = \frac{\sqrt{15}}{3}-1 \rightarrow 6\cdot\left(\frac{\sqrt{15}}{3}-1\right)+6 = 2\sqrt{15} > 0 \rightarrow \text{MÍNIM}$$

$$\text{quan } x = -\frac{\sqrt{15}}{3}-1 \rightarrow 6\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}-1\right)+6 = -2\sqrt{15} < 0 \rightarrow \text{MÀXIM}$$

20) Troba els extrems relatius de les següents funcions:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3-4$ $\quad g(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+6x+\sqrt{2}$ $\quad h(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+100$ $\quad j(x) = \frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$ $\quad k(x) = \frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\sqrt{3}$

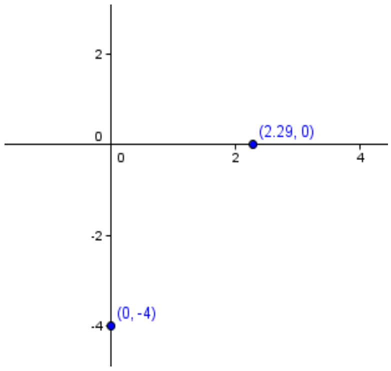
21) El benefici diari d'una empresa ve donat per: $B(x) = -2x^3+48x^2-184x-161$ on x és el nombre de cotxes que fabrica.

Calcula el nombre de cotxes fabricats que fa màxim el benefici.

12. Representació de funcions

Exemple: representa la funció: f(x) = $\frac{1}{3}x^3-4$

1. **Busquem el domini de la funció:** Dom(f) = Re



2. **Punts de tall amb els eixos.**

   Ordenades) x=0 → f(x=0) = $\frac{1}{3}\cdot 0^3-4 \rightarrow -4 \rightarrow (0,-4)$

   Abscisses) y=0 → $\frac{1}{3}x^3-4=0 \rightarrow x=\sqrt[3]{12} \rightarrow (\sqrt[3]{12},0)$

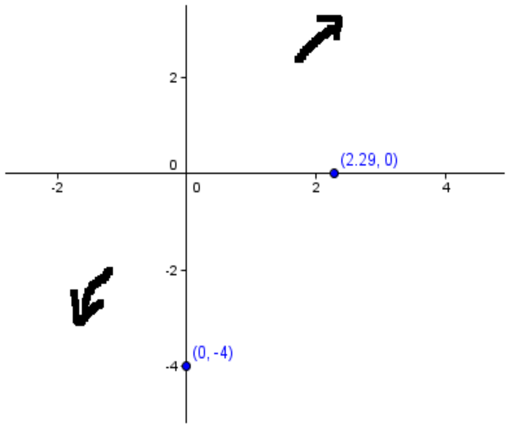
3. **Continuïtat**

   La funció és continua en tot el domini

4. **Assímptotes**

   $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}x^3-4 = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}x^3-4 = -\infty$

   No té asímptotes verticals ni horitzontals.



5. **Màxims i mínims**

   $f(x) = \frac{1}{3}x^3-4$

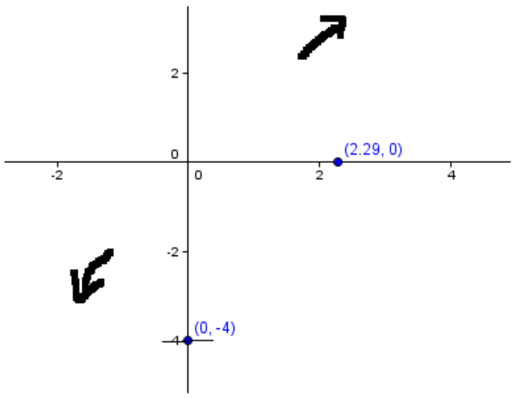
   $f'(x) = x^2$

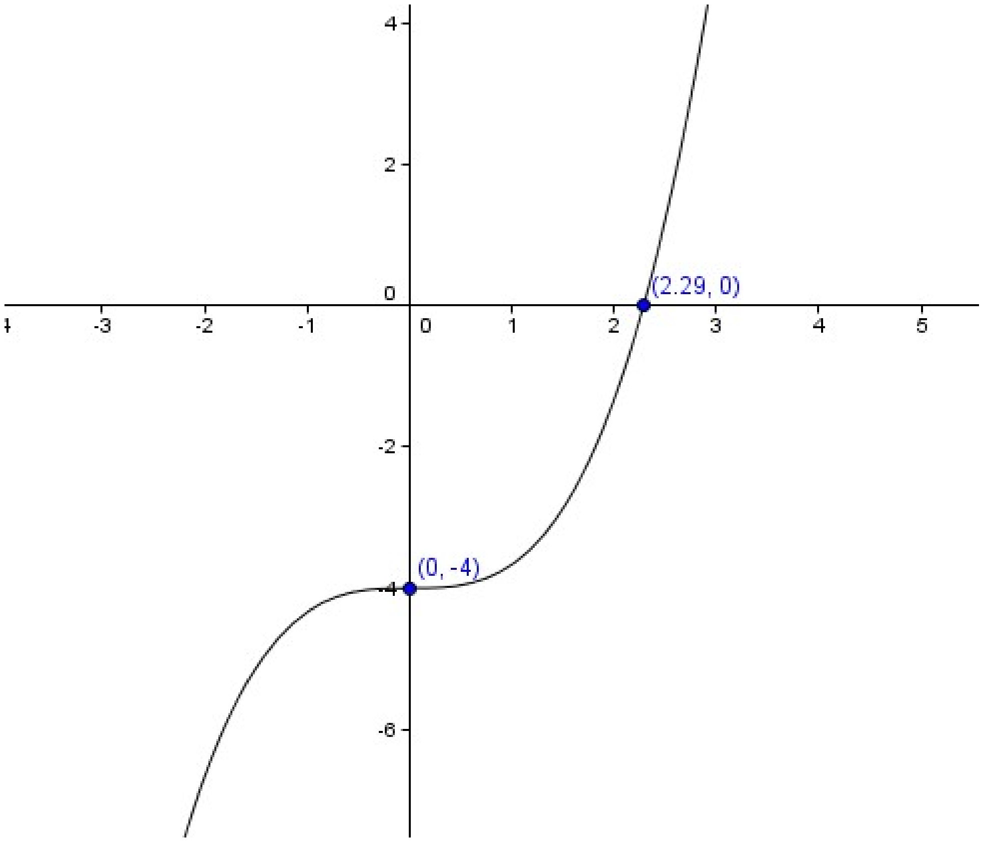
   $x^2 = 0 \rightarrow x=0$

   Anem a veure si es tracte d'un màxim o d'un mínm

   $f''(x) = 2x$

   $f''(x=0) = 0 \rightarrow$ És un punt d'inflexió





22) Representa les següents funcions:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x - 2$$

$$j(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 33x + 10$$

$$k(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$$

$$h(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 100$$

$$B(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x - 1$$