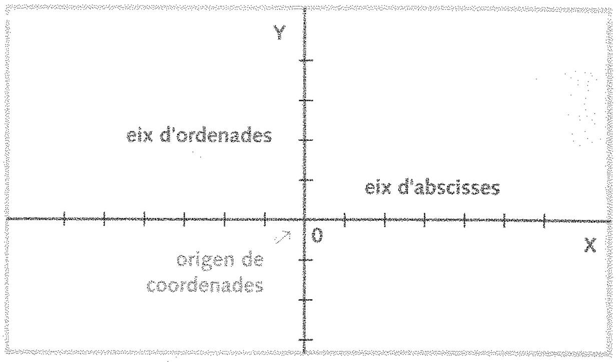
1. EL PLA COM A CONJUNT DE PUNTS

Per representar punts en el pla necessitem dues rectes graduades i perpendiculars que es tallin en el 0 d'ambdues.

- La recta horitzontal s'anomena **eix d'abscisses** o **eix** *OX*.
- La recta vertical s'anomena **eix d'ordenades** o **eix** *OY*.
- El punt de tall és l'**origen de coordenades**.

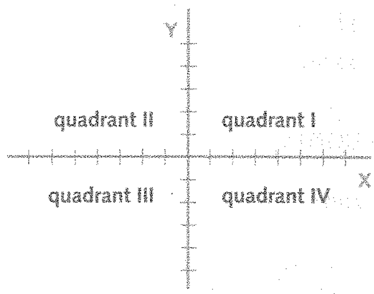
Ens referim a les dues rectes conjuntament anomenant-les eixos de coordenades.



Semieixos i quadrants

L'origen de coordenades divideix cada eix en dos **semieixos**: el *semieix positiu* i el *semieix negatiu*. Els semieixos positius són el dret d'abscisses i el superior d'ordenades; els negatius, l'esquerre d'abscisses i l'inferior d'ordenades.

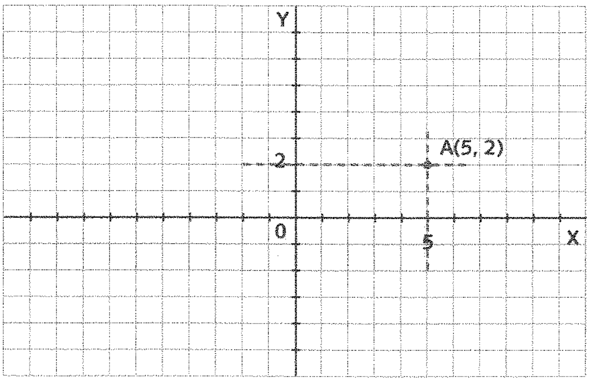
Els eixos de coordenades divideixen el pla en quatre regions. Cadascuna d'aquestes regions és un **quadrant**. Els quadrants es numeren tal com s'indica a la figura del marge.



Els eixos de coordenades divideixen el pla en quatre quadrants.

1.1 Coordenades d'un punt

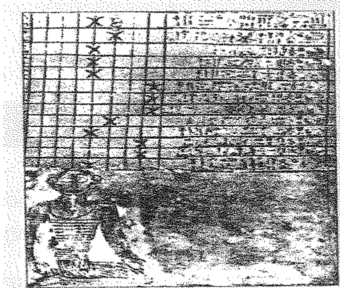
Cada punt del pla porta associat un parell ordenat de nombres (x, y). Per trobar, per exemple, el parell corresponent al punt A de la figura procedim d'aquesta manera:



- Tracem una recta vertical per A. Aquesta recta talla l'eix d'abscisses al punt 5.
- Tracem una recta horitzontal per A. Aquesta recta talla l'eix d'ordenades al punt 2.

Al punt A li associem el parell ordenat (5, 2) i diem que aquestes són les seves **coordenades cartesianes**. La primera coordenada, 5, és l'**abscissa** del punt i la segona, 2, l'**ordenada** del punt.

Nota històrica

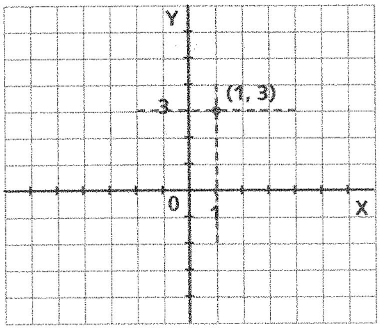


Aquesta pintura, feta al sostre de la tomba del faraó egipci Ramsés VII, que va viure al voltant del segle XI a.C., representa un cel estrellat sobre un pla quadriculat i recorda les coordenades cartesianes que utilitzem ara.

De la mateixa manera que cada punt del pla porta associat un parell ordenat de nombres, a qualsevol parell ordenat de nombres li correspon un punt del pla.

Per exemple, donat el parell (1, 3), per trobar el punt corresponent seguim aquests passos:

- Ens situem en el punt de l'eix d'abscisses corresponent a l'abscissa, en aquest cas 1, i hi tracem una recta vertical.
- Ens situem en el punt de l'eix d'ordenades corresponent a l'ordenada, en aquest cas 3, i hi tracem una recta horitzontal.



El punt on es tallen aquestes dues rectes és el punt del pla corresponent al parell (1, 3).

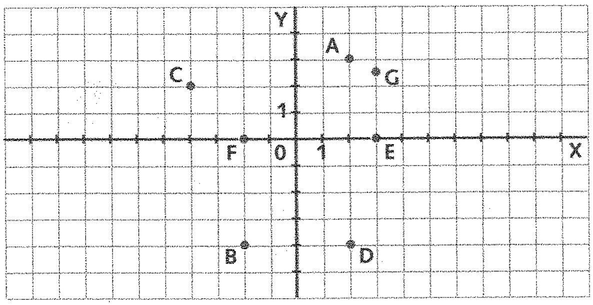
Un altre mètode

Una altra manera de trobar el punt corresponent a un parell ordenat és aquesta:

- Ens situem a l'origen de les coordenades i ens desplacem en horitzontal tantes unitats com indica l'abscissa, cap a la dreta si és positiva i cap a l'esquerra si és negativa.
- Tot seguit, ens desplacem en vertical tantes unitats com indica l'ordenada, cap amunt si és positiva i cap avall si és negativa.

EXEMPLE

Indica les coordenades dels punts representats:



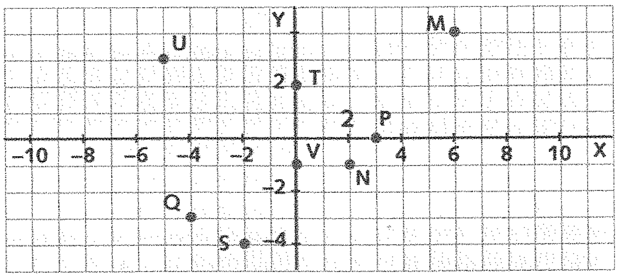
Procedint tal com hem vist, obtenim:

$A(2, 3)$ $B(-2, -4)$ $C(-4, 2)$ $D(2, -4)$ $E(3, 0)$ $F(-2, 0)$ $G\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$

- Segons l'ordre en què escrivim les coordenades, obtenim punts diferents. Així doncs, els punts $C(-4, 2)$ i $D(2, -4)$ són diferents.
- Els punts situats a l'eix d'abscisses tenen ordenada zero, i els situats a l'eix d'ordenades tenen abscissa zero.

ACTIVITATS

1. Escriu al quadern les coordenades que corresponen a cadascun dels punts assenyalats:



2. Dibuixa uns eixos de coordenades i representa aquests punts:

$A(3, 0)$	$C(2, 2)$	$E(-1, 4)$	$G(-2, -2)$
$B(-3, 1)$	$D(0, 3)$	$F(3, -1)$	$H(0, -3)$

3. Quina és l'ordenada de tots els punts de l'eix d'abscisses?

4. Quina és l'abscissa de tots els punts de l'eix d'ordenades?

2. VECTORS

2.1 Vectors fixos

Si A i B són dos punts, el segment dirigit des de A fins a B s'anomena **vector fix d'origen A i extrem B**.

Se simbolitza amb $\overrightarrow{AB}$ i es representa gràficament amb una fletxa que comença al punt A i acaba al punt B:

El vector $\overrightarrow{BA}$ és diferent del vector $\overrightarrow{AB}$, perquè $\overrightarrow{BA}$ va des de B fins a A.

Les característiques d'un vector són:

- **Mòdul**: el nombre que expressa la longitud del vector. El mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$ es representa per $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Direcció**: la que defineix la recta en la qual es recolza el vector.
- **Sentit**: l'orientació que té el vector dins de la recta. Hi ha dos sentits, depenent de si el segment està dirigit cap a un costat o cap a l'altre de la recta. Així doncs, els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ tenen sentits contraris.

Magnituds escalars i magnituds vectorials

Les **magnituds escalars** s'expressen utilitzant un nombre real seguit de la unitat corresponent.

Per exemple, la longitud, la superfície, el volum, la massa, la temperatura i el temps són magnituds escalars.

Les **magnituds vectorials** són aquelles que per expressar-les es necessita:

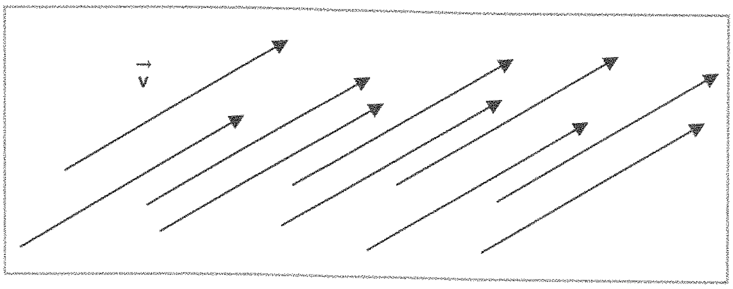
- Un nombre real seguit de la unitat de mesura.
- Una direcció.
- Un sentit.

Per exemple, la força, la velocitat i l'acceleració són magnituds vectorials.

2.2 Vectors lliures

Un **vector lliure** és la col·lecció formada pels infinits vectors fixos que tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit.

Se simbolitza amb $\vec{v}$ i es representa per mitjà d'un conjunt de fletxes paral·leles, de la mateixa longitud i que apunten en el mateix sentit.



Si el vector $\overrightarrow{AB}$ és un dels vectors que pertanyen al vector lliure $\vec{v}$, diem que $\overrightarrow{AB}$ és un **representant** del vector lliure $\vec{v}$. Fixa't que un vector lliure $\vec{v}$ té infinits representants.

Per conveniència, anomenem vector nul $\vec{0}$ el vector que té l'origen i l'extrem en el mateix punt, que té un mòdul igual a 0 i que no té direcció ni sentit.

Igualtat de vectors lliures

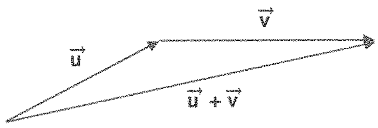
Dos vectors lliures $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són **iguals** si els seus representants tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i el mateix sentit.

En aquesta unitat estudiarem els vectors lliures que pertanyen a un mateix pla i, a partir d'aquest moment, ens hi referirem anomenant-los simplement vectors.

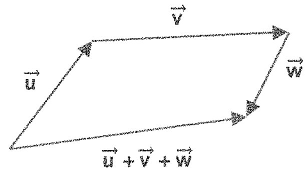
2.3 Operacions amb vectors de manera gràfica

Suma

Per sumar gràficament els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, situem l'origen de $\vec{v}$ coincidint amb l'extrem de $\vec{u}$. El vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ és el vector que té com a origen el de $\vec{u}$ i com a extrem el de $\vec{v}$.



També es poden sumar més de dos vectors:

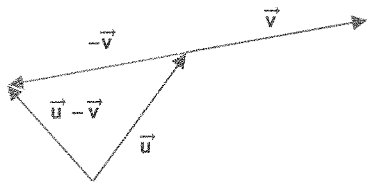


Vector oposat

Anomenem **vector oposat al vector** $\vec{v}$ el vector $-\vec{v}$ tal que $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$. El vector $-\vec{v}$ té el mateix mòdul i la mateixa direcció que el vector $\vec{v}$ però sentit contrari:

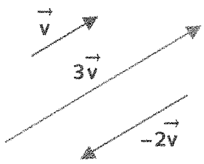
Resta

La diferència $\vec{u}-\vec{v}$ entre els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ es defineix com la suma de $\vec{u}$ i el vector $-\vec{v}$. Per tant, el vector $\vec{u}-\vec{v}$ s'obté unint l'origen de $\vec{u}$ amb l'extrem de $-\vec{v}$.



Producte d'un nombre per un vector

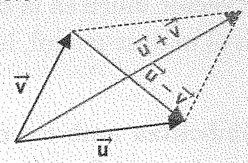
El producte d'un nombre real k, $k \neq 0$, per un vector $\vec{v}$, $k \cdot \vec{v}$, és un vector el mòdul del qual és $|k|$ vegades el mòdul de $\vec{v}$, té la mateixa direcció que $\vec{v}$, i el seu sentit és el de $\vec{v}$ si $k > 0$ i contrari al de $\vec{v}$ si $k < 0$.



Regla del paral·lelogram

Per sumar o restar dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dibuixem un paral·lelogram els costats del qual siguin representants de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

- La suma és la diagonal del paral·lelogram que surt del vèrtex que és origen comú de tots dos vectors.
- L'altra diagonal és la diferència entre tots dos vectors.



2.4 Propietats de les operacions amb vectors

La suma de vectors té les propietats següents:

- Commutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Associativa: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
- Element neutre: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- Element oposat: $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

On $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són vectors qualssevol.

El producte d'un nombre per un vector verifica les propietats:

- $1 \cdot \vec{u}=\vec{u} \cdot 1=\vec{u}$
- $0 \cdot \vec{v}=\vec{v} \cdot 0=\vec{0}$
- $k \cdot \vec{u}=\vec{u} \cdot k$
- $k \cdot (h \cdot \vec{v})=(kh) \cdot \vec{v}$
- $k \cdot (\vec{u}+\vec{v})=k \cdot \vec{u}+k \cdot \vec{v}$
- $(k+h) \cdot \vec{u}=k \cdot \vec{u}+h \cdot \vec{u}$

On $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors i k i h són nombres reals.

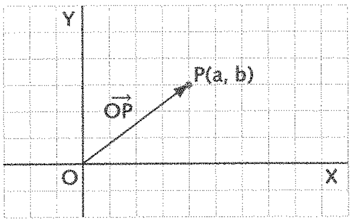
ACTIVITATS

5. Dibuixa al quadern els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i troba gràficament els vectors $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $-\vec{u}$, $2\vec{u}$ i $3\vec{u}$.

3. COMPONENTS D'UN VECTOR

3.1 Vector de posició d'un punt

El vector $\overrightarrow{OP}$ l'origen del qual coincideix amb l'origen de coordenades s'anomena **vector de posició** del punt P.

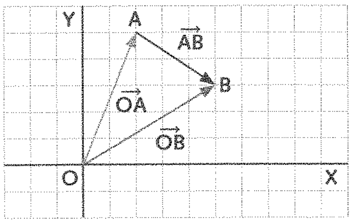


Així, a cada punt del pla li correspon un vector, i viceversa.

Per definició, s'anomenen **components** del vector de posició $\overrightarrow{OP}$ les coordenades del seu extrem P, i s'escriu $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ o bé $\overrightarrow{OP}\,(a, b)$.

3.2 Components d'un vector

Per trobar els components d'un vector qualsevol $\overrightarrow{AB}$ del pla, considerem els vectors de posició $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.



Com que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, s'obté:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Els components del vector $\overrightarrow{AB}$ s'obtenen restant a les coordenades de l'extrem B les de l'origen A.

Per exemple, donats $A(2, 5)$ i $B(5, 3)$, els components del vector $\overrightarrow{AB}$ són:

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 2, 3 - 5) = (3, -2)$$

És a dir, es pot anar del punt A al punt B avançant 3 unitats a la dreta a l'eix OX i 2 unitats cap avall a l'eix OY.

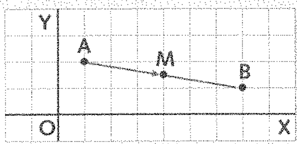
Els components d'un vector lliure són els de qualsevol dels seus representants.

En conseqüència, dos vectors lliures són **iguals** si tenen els mateixos components.

Punt mitjà d'un segment

Si $M(x, y)$ és el punt mitjà del segment d'extrems $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$, es verifica:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$



Per tant:

$$(x - a_1, y - a_2) = \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2}\right)$$

Si aïllem x i y, obtenim:

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

Per exemple, les coordenades del punt mitjà M del segment d'extrems $A(5, -2)$ i $B(7, 6)$ són:

$$x = \frac{5 + 7}{2},\quad y = \frac{-2 + 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(6, 2)$$

ACTIVITATS

6. En un sistema de coordenades, dibuixa els vectors de posició dels punts $A(3, 4)$, $B(-2, 5)$, $C(-4, -1)$, $D(0, 3)$, $E(0, -5)$, $F(6, 0)$ i $G(-5, 0)$.

7. Troba els components dels vectors següents:

   a) Origen $A(2, 1)$ i extrem $B(5, 7)$.

   b) Origen $C(4, -3)$ i extrem $D(7, -2)$.

   c) Origen $E(-1, -3)$ i extrem $F(-5, 3)$.

8. Dibuixa els vectors de posició corresponents als punts $A(3, 5)$ i $B(6, -2)$.

9. Calcula x i y perquè els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ siguin iguals:

   a) $\vec{u} = (x, 5)$ i $\vec{v} = (6, y)$

   b) $\vec{u} = (2 - x, 4)$ i $\vec{v} = (6, y - 1)$

   c) $\vec{u} = (3x, 8)$ i $\vec{v} = (2, 4y)$

   d) $\vec{u} = (x - 1, 3)$ i $\vec{v} = (2x, y)$

3.3 Operacions amb components

Suma

La **suma** dels vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ s'obté sumant els seus components:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Per exemple, si $\vec{u} = (3, 5)$ i $\vec{v} = (1, -3)$, llavors:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 5) + (1, -3) = \big(3 + 1, 5 + (-3)\big) = (4, 2)$$

Alguns components

- El vector nul és $\vec{0} = (0, 0)$.
- El vector oposat del vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ és $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$.

Resta

La **diferència** dels vectors $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ s'obté restant els seus components:

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

Per exemple, si $\vec{u} = (4, 6)$ i $\vec{v} = (2, -2)$, llavors:

$$\vec{u} - \vec{v} = (4, 6) - (2, -2) = \big(4 - 2, 6 - (-2)\big) = (2, 8)$$

Producte per un nombre real

El **producte d'un nombre k per un vector** $\vec{u} = (u_1, u_2)$ s'obté multiplicant k per cada component:

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot (u_1, u_2) = (ku_1, ku_2)$$

Per exemple, el producte de 5 per $\vec{u} = (3, 7)$ és:

$$5 \cdot \vec{u} = 5 \cdot (3, 7) = (5 \cdot 3, 5 \cdot 7) = (15, 35)$$

Vectors paral·lels

Quan multipliquem un vector per un nombre obtenim un vector de la mateixa direcció.

El recíproc també és cert: si dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen la mateixa direcció, existeix un nombre real k tal que:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

Els vectors que tenen la mateixa direcció diem que són **paral·lels**.

ACTIVITATS

10. Sent $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (5, 3)$ i $\vec{w} = (-2, 4)$, troba el resultat d'aquestes operacions en forma geomètrica sobre uns eixos de coordenades i en forma analítica:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ e) $\vec{u} + \vec{w}$ i) $\vec{v} + \vec{w}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$ f) $\vec{v} - \vec{u}$ j) $\vec{u} - \vec{w}$

c) $2\vec{u}$ g) $-3\vec{v}$ k) $\frac{1}{2}\vec{w}$

d) $3\vec{u} - 2\vec{v}$ h) $\vec{v} + 2\vec{u}$ l) $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$

11. Donats els punts $A(4, -1)$, $B(2, 5)$ i $C(6, 4)$, troba les coordenades d'un punt D perquè els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ siguin iguals.

12. Sortint del punt $A(2, 3)$, avances en la direcció del vector $\vec{u} = (1, 2)$ tres vegades la seva longitud, continues en la direcció de $\vec{v} = (3, -1)$ dues vegades la seva longitud i, finalment, avances en la direcció de $\vec{w} = (-8, -3)$ una vegada la seva longitud. A quin punt arribes? Raona si hi ha més d'una possibilitat.

4. PRODUCTE ESCALAR

El **producte escalar** de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, que es denota $\vec{u} \cdot \vec{v}$, és el producte dels mòduls de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ pel cosinus de l'angle que formen:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

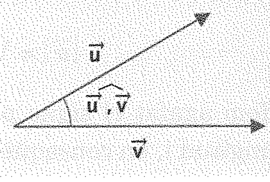
Com a conseqüència d'aquesta definició tenim:

1. El resultat del producte escalar de dos vectors és un nombre real, perquè $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ i $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ho són.
2. Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, aleshores $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
3. Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors perpendiculars, aleshores $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, perquè $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos 90° = 0$.
4. Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ no són vectors nuls i $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, aleshores $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars, perquè $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ ha de ser 0 i, per tant, $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 90°$.
5. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, aleshores $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ perquè, com que $\widehat{\vec{u}, \vec{u}} = 0°$ i $|\vec{u}| \neq 0$:
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}||\vec{u}|\cos 0° = |\vec{u}||\vec{u}| \cdot 1 = (|\vec{u}|)^2 > 0$$

Angle entre dos vectors

L'angle entre dos vectors és el més petit dels angles que formen les semirectes que contenen dos representants de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ amb el mateix origen.

Es denota $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$.



4.1 Expressió analítica del producte escalar

Quan coneixem els components dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, el seu producte escalar ve donat per l'expressió següent:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

on $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $v = (v_1, v_2)$.

EXEMPLE

Calcula el producte escalar de $\vec{u} = (2, 4)$ i $\vec{v} = (1, -1)$.

Apliquem l'expressió anterior i obtenim:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 2 - 4 = -2$$

Propietats

El producte escalar verifica les propietats següents:

1. Commutativa:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. Distributiva:
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})k$

on $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són vectors i k és un nombre real.

ACTIVITATS

13. Si $\vec{u} = (2, -3)$, $\vec{v} = (3, 4)$ i $\vec{w} = (1, 4)$ calcula el valor de:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $\vec{u} \cdot (2\vec{w} - 3\vec{v})$

d) $(\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot 4\vec{u}$

e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

f) $2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

14. Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sent $\vec{u} = (2, -3)$ i $\vec{v} = (6, 4)$. Quin angle formen $\vec{u}$ i $\vec{v}$?

15. Si $\vec{u} = (2, -3)$ i $\vec{v} = (x, 4)$, calcula quin valor ha de prendre x perquè el producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sigui igual a 4. I perquè el producte escalar sigui igual a 0?

4.2 Aplicacions del producte escalar

Càlcul del mòdul d'un vector

Hem vist que es verifica que $\vec{u} \cdot \vec{u} = (|\vec{u}|)^2 > 0$. Per tant: $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, utilitzant l'expressió analítica del producte escalar, obtenim:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

EXEMPLE

Calcula el mòdul del vector $\vec{u} = (\sqrt{3}, -1)$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Hem agafat el signe positiu de l'arrel quadrada perquè el mòdul és una longitud i, en conseqüència, no pot ser negatiu.

Vector unitari

Anomenem **vector unitari** un vector el mòdul del qual és 1.

Quan multipliquem un vector $\vec{u}$ pel nombre real $\frac{1}{|\vec{u}|}$, obtenim un vector de mòdul 1 i que té la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector donat.

D'aquesta manera, si $\vec{u} = (4, 3)$, el seu mòdul és $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ i un vector unitari de la mateixa direcció i el mateix sentit que $\vec{u}$ és el vector:

$$\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{5} \cdot (4, 3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Càlcul de l'angle entre dos vectors

Per definició de producte escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Per tant:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$, substituint per les expressions analítiques obtingudes anteriorment, resulta:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

EXEMPLE

Calcula l'angle que formen els vectors $\vec{u} = (3, 4)$ i $\vec{v} = (1, 2\sqrt{2})$.

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{3 + 8\sqrt{2}}{5 \cdot 3} \simeq \frac{14{,}314}{15} \simeq 0{,}954$$

Per tant, $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \simeq 17° \, 26' \, 46''$.

PENSA I RESPON

En la definició de producte d'un nombre per un vector, hem dit que el mòdul de $k\vec{u}$ és $|k|$ vegades el mòdul de $\vec{u}$. Comprova analíticament que:

$$|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$$

ACTIVITATS

16. Troba el mòdul dels vectors següents:

a) $\vec{u} = (1, 2)$

b) $\vec{v} = (2, 4\sqrt{2})$

17. Troba, en cada cas, dos vectors unitaris de la mateixa direcció que:

a) $\vec{u} = (5, \sqrt{11})$

b) $\vec{v} = (12, 16)$

18. Calcula l'angle que formen els vectors:

a) $\vec{u} = (1, 3)$ i $\vec{v} = (-10, 0)$

b) $\vec{u} = (5, 7)$ i $\vec{v} = (6, 8)$

19. Donats els vectors $\vec{u} = (x, 3)$ i $\vec{v} = (8, -y)$, calcula x i y, sabent que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars i que $|\vec{u}| = \sqrt{45}$.

5. Equacions de la recta

Una recta queda determinada si es coneixen:

- Un punt A de la recta i un vector de direcció $\vec{v}$ de la recta.

O bé:

- Dos punts A i B de la recta.

Si es coneixen dos punts A i B de la recta, aleshores el vector $\overrightarrow{AB}$ és un vector de direcció de la recta.

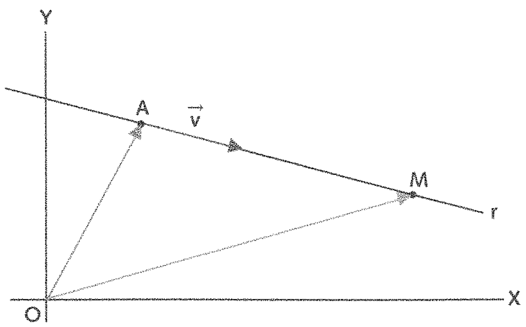
NOTACIÓ

Un vector de direcció d'una recta també s'anomena **vector director**.

5.1 Equació vectorial

Sigui la recta r determinada pel punt A i el vector de direcció $\vec{v}$.

L'equació de la recta r relaciona les coordenades del punt A, els components del vector de direcció $\vec{v}$ i les coordenades de qualsevol punt M pertanyent a la recta.



Fixa't que el vector $\overrightarrow{AM}$ té la mateixa direcció que el vector $\vec{v}$. Per tant, $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{v}$, on λ és un nombre real.

Es verifica: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v} = \overrightarrow{OM}$

L'equació:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

s'anomena **equació vectorial** de la recta.

Una mica d'història

La geometria analítica sorgeix el segle XVII, amb els treballs de Descartes i Fermat, dos matemàtics francesos.

- Descartes (1596-1650) va utilitzar les coordenades en l'estudi d'alguns problemes geomètrics.
- Fermat (1601-1655) va relacionar les equacions de dues incògnites amb línies rectes o corbes.

Des d'aleshores, la geometria analítica ha esdevingut una eina necessària per al progrés de la física.

ACTIVITATS

20. Escriu l'equació vectorial de la recta que passa pel punt A i té vector de direcció $\vec{v}$, on:

a) $A(3, -5)$ i $\vec{v} = (2, 9)$

b) $A(4, 0)$ i $\vec{v} = (-2, 5)$

c) $A(6, -1)$ i $\vec{v} = (7, 0)$

21. Escriu l'equació vectorial de la recta que passa pels punts següents:

a) $A(1, 4)$ i $B(2, 5)$

b) $A(3, -1)$ i $B(5, 2)$

c) $A(-2, -4)$ i $B(-7, -1)$

d) $A(4, 3)$ i $B(2, 3)$

e) $A(6, -2)$ i $B(3, 3)$

f) $A(0, -1)$ i $B(-4, 2)$

5.2 Equacions paramètriques

Siguin $A(a_1, a_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un punt i un vector de direcció que determinen una recta r.

Suposem que $M(x, y)$ és un punt qualsevol de la recta r. Aleshores podem escriure:

$$\overrightarrow{OM} = (x - 0, y - 0) = (x, y)$$

$$\overrightarrow{OA} = (a_1 - 0, a_2 - 0) = (a_1, a_2)$$

$$\lambda\vec{v} = \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$$

Substituint a l'equació vectorial de la recta podem escriure:

$$(x, y) = (a_1, a_2) + (\lambda v_1, \lambda v_2) \Rightarrow (x, y) = (a_1 + \lambda v_1, a_2 + \lambda v_2)$$

Si igualem els components corresponents de tots dos vectors obtenim les **equacions paramètriques** de la recta r:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Per exemple, les equacions paramètriques de la recta determinada per $A(6, 5)$ i $\vec{v} = (2, 3)$, són:

$$\begin{cases} x = 6 + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Per obtenir un punt pertanyent a una recta r donada en forma paramètrica:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

s'assigna un valor numèric al paràmetre λ i es fan els càlculs indicats per obtenir x i y.

El punt obtingut és (x, y).

5.3 Equació contínua

Si a les equacions paramètriques de la recta aïllem λ i, a continuació, igualem les expressions obtingudes, en resulta:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x - a_1}{v_1} \\ y = a_2 + \lambda v_2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{y - a_2}{v_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

L'equació:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

s'anomena **equació contínua** de la recta.

Per exemple, l'equació contínua de la recta determinada pel punt $A(3, -1)$ i el vector $\vec{v} = (7, 2)$ és:

$$\frac{x - 3}{7} = \frac{y + 1}{2}$$

ACTIVITATS

22. Escriu l'equació vectorial, les equacions paramètriques i l'equació contínua de la recta que passa pel punt $A(3, -5)$ i té vector de direcció $\vec{v} = (2, 9)$.

23. Troba les equacions paramètriques de la recta que passa pels punts $A(-2, -5)$ i $B(6, 3)$ i calcula les coordenades de tres punts de la recta diferents dels donats.

5.4 Equació general

L'equació contínua de la recta és una proporció. Si en multipliquem en creu els termes, obtenim:

$$\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2} \Rightarrow v_2\cdot(x-a_1)=v_1\cdot(y-a_2) \Rightarrow v_2x-v_2a_1=v_1y-v_1a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2x-v_1y-v_2a_1+v_1a_2=0$$

Si anomenem $A=v_2$, $B=-v_1$ i $C=v_1a_2-v_2a_1$, en resulta:

$$Ax+By+C=0$$

que rep el nom d'**equació general** de la recta.

Vector normal a una recta

Un **vector normal** $\vec{n}$ a una recta r és un vector que és perpendicular a la recta i, per tant, al vector de direcció de la recta.

Donada una recta r amb equació general $Ax+By+C=0$, un vector de direcció és:

$$\vec{v}=(v_1,v_2)=(-B,A)$$

El vector $\vec{n}=(A,B)$ és normal a la recta r, perquè el producte escalar de $\vec{n}$ pel vector de direcció $\vec{v}$ de la recta és zero.

Efectivament:

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=(A,B)\cdot(-B,A)=$$
$$=A\cdot(-B)+B\cdot A=$$
$$=-AB+BA=0$$

EXEMPLE 1

Obtén l'equació general de la recta r, que té com a equació en forma contínua $\frac{x-3}{7}=\frac{y+1}{2}$.

Multiplicant en creu els termes de l'equació contínua i operant, obtenim l'equació general de la recta r:

$$\frac{x-3}{7}=\frac{y+1}{2} \Rightarrow 2(x-3)=7(y+1) \Rightarrow 2x-6=7y+7 \Rightarrow 2x-7y-13=0$$

EXEMPLE 2

Sigui r la recta que passa pels punts $A(2, 1)$ i $B(5, -3)$. Obtén l'equació de la recta en les formes paramètrica, contínua i general.

La recta r està determinada pel punt $A(2, 1)$ i el vector de direcció $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=(5-2,-3-1)=(3,-4)$$

- Equacions paramètriques: $\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=1-4\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$
- Equació contínua: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-4}$
- Equació general: $-4(x-2)=3(y-1) \Rightarrow 4x+3y-11=0$

ACTIVITATS

24. Escriu, en cada cas, l'equació contínua i l'equació general de la recta que passa pel punt A i té vector de direcció $\vec{v}$:

a) $A(1, 5)$ i $\vec{v}=(7, 2)$ c) $A(0, -6)$ i $\vec{v}=(1, -2)$

b) $A(4, 7)$ i $\vec{v}=(1, 3)$ d) $A(3, 0)$ i $\vec{v}=(3, -3)$

25. Esbrina si els punts $A(-3, 2)$ i $B(3, 13)$ pertanyen a la recta determinada pels punts $C(-1, 3)$ i $D(1, 8)$.

26. L'equació general d'una recta r és $4x-y+3=0$. Troba l'equació contínua i les equacions paramètriques de la recta.

5.5 Equació explícita

Si a l'equació general de la recta, $Ax + By + C = 0$, es compleix que $B \neq 0$, podem aïllar y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Si anomenem $m = -\frac{A}{B}$ i $n = -\frac{C}{B}$, l'equació anterior s'escriu:

$$y = mx + n$$

que rep el nom d'**equació explícita** de la recta. El coeficient m es diu **pendent de la recta** i n rep el nom d'**ordenada a l'origen**, perquè és l'ordenada del punt de tall de la recta amb l'eix OY.

Per exemple, l'equació explícita de la recta r: $4x + 3y + 5 = 0$ és:

$$4x + 3y + 5 = 0 \Rightarrow 3y = -4x - 5 \Rightarrow y = \frac{-4x-5}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

5.6 Equació punt-pendent

Si la recta d'equació $y = mx + n$ passa pel punt $P(x_1, y_1)$, s'ha de verificar:

$$y_1 = mx_1 + n$$

Restant membre a membre les dues equacions, obtenim:

$$\left\{\begin{array}{l} y = mx + n \\ y_1 = mx_1 + n \end{array}\right. \Rightarrow y - y_1 = mx - mx_1 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

S'anomena **equació punt-pendent** de la recta la igualtat següent:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Així, per exemple, l'equació punt-pendent de la recta que passa pel punt $P(3, -1)$ i té pendent 2 és:

$$y - (-1) = 2(x - 3) \Rightarrow y + 1 = 2(x - 3)$$

Càlcul del pendent d'una recta

Podem calcular el pendent m d'una recta directament a partir de la seva equació general $Ax + By + C = 0$:

$$m = -\frac{A}{B}$$

Per exemple, el pendent de la recta $3x + 2y - 5 = 0$ és:

$$m = -\frac{3}{2}$$

També podem calcular el pendent conegut un vector de direcció de la recta $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Atès que $A = v_2$ i $B = -v_1$, es compleix que:

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

Finalment, com que a partir de dos punts de la recta, $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$, podem trobar un vector de direcció $\vec{v} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, també podem calcular el pendent d'aquesta manera:

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

ACTIVITATS

27. Escriu l'equació explícita de les rectes següents:

a) r: $5x + 4y - 6 = 0$ c) s: $2x - y + 3 = 0$

b) r': $x + 3y - 4 = 0$ d) s': $x - y - 6 = 0$

28. Escriu l'equació punt-pendent de la recta que passa pel punt P i té pendent m, on:

a) $P(4, -5)$, $m = 2$ b) $P(-2, -4)$, $m = -1$

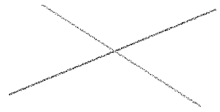
29. Escriu l'equació general de la recta que té com a equació punt-pendent $y - 4 = 2(x - 3)$. Indica un vector director d'aquesta recta.

30. Donats els punts $A(4, 3)$ i $B(6, 5)$, troba les coordenades d'un punt C, alineat amb A i B, de manera que es compleixi $\frac{|\overrightarrow{CA}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{3}{2}$.

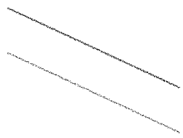
6. Posició relativa de dues rectes

La posició relativa de dues rectes depèn del nombre de punts que tinguin en comú totes dues rectes. En el pla, dues rectes poden ser:

- **Concurrents** o **secants**, quan es tallen en un punt.
- **Paral·leles**, si no tenen punts comuns.
- **Coincidents**, si les dues rectes tenen en comú tots els seus punts.



Rectes secants



Rectes paral·leles

Rectes coincidents

Si les dues rectes estan donades per la seva equació en forma general, per esbrinar-ne la posició relativa resolem el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Considerem els diferents casos possibles:

1. El sistema té solució única, les rectes tenen un únic punt en comú. Per tant, són **rectes secants** i les coordenades del punt en què es tallen són la solució trobada.
2. El sistema no té solució, les rectes no tenen cap punt en comú. Per tant, són **rectes paral·leles**.
3. El sistema té infinites solucions, les dues rectes tenen tots els seus punts en comú. Per tant, són **rectes coincidents**.

Es verifica:

- Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$, les rectes són secants.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$, les rectes són paralel·les.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$, les rectes són coincidents.

Si m i m' són els pendents de les rectes r i s, respectivament, es verifica que r i s són paral·leles si i només si $m = m'$.

EXEMPLE

Troba la posició relativa de les rectes r i s en els casos següents:

a) $\begin{cases} r: 3x + 5y + 1 = 0 \\ s: 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 2x + 3y + 1 = 0 \\ s: 4x + 6y + 5 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} r: x - y + 3 = 0 \\ s: -2x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

a) Com que $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{5}{1}$, r i s es tallen en un punt, les coordenades del qual s'obtenen resolent el sistema format per les equacions de r i s. En aquest cas, la solució és $x = -2$, $y = 1$. Per tant, $P(-2, 1)$ és el punt comú a r i s.

b) Com que $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} \neq \dfrac{1}{5}$, les dues rectes són paral·leles.

c) Com que $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2} = \dfrac{3}{-6}$, les dues rectes coincideixen.

Rectes paral·leles

La recta s paral·lela a la recta r: $Ax + By + C = 0$ que passa pel punt $P(a, b)$ té com a equació:

$$s: Ax + By + C' = 0$$

Per determinar C', substituïm x i y per a i b, respectivament:

$$Aa + Bb + C' = 0$$

Per tant, $C' = -(Aa + Bb)$.

I en conseqüència:

$$s: Ax + By - (Aa + Bb) = 0$$

6.1 Condicions de perpendicularitat

Si $r: Ax + By + C = 0$ i $s: A'x + B'y + C' = 0$ són perpendiculars, els seus vectors directors $\vec{v} = (-B, A)$ i $\vec{v}\,' = (-B', A')$ formen un angle de 90°. Per tant:

$$\cos(\widehat{\vec{v},\vec{v}}) = 0 \Rightarrow A \cdot A' + B \cdot B' = 0$$

Aleshores:

$$-\frac{A}{B} = \frac{B'}{A'} \Rightarrow -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-\frac{A'}{B'}}$$

Però $-\frac{A}{B}$ i $-\frac{A'}{B'}$ són els pendents de r i s, respectivament. Per tant, si m_r i m_s són els pendents de dues rectes perpendiculars, es verifica:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

EXEMPLE

Escriu l'equació de la recta s perpendicular a la recta $r: y = 2x + 3$ que passa pel punt $P(3, 1)$.

Com que $m_r = 2$, aleshores $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{2}$. Per tant, s serà de la forma $s: y = -\frac{1}{2}x + n$.

Fent que la recta passi pel punt $P(3, 1)$: $1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + n \Rightarrow n = \frac{5}{2}$. Per tant:

$$s: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Rectes perpendiculars

La recta s perpendicular a la recta r: $Ax + By + C = 0$ que passa pel punt $P(a, b)$ té com a equació:

$$s: Bx - Ay + C' = 0$$

Per determinar C', substituïm x i y per a i b, respectivament:

$$Ba - Ab + C' = 0$$

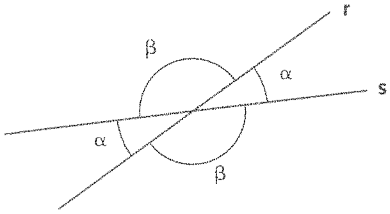
Per tant, $C' = Ab - Ba$.

I en conseqüència:

$$s: Bx - Ay + Ab - Ba = 0$$

6.2 Angle entre dues rectes secants

Dues rectes secants r i s determinen quatre angles iguals dos a dos perquè són oposats pel vèrtex. Considerem com a angle que formen les rectes r i s el més petit dels angles α i β i el denotem $\widehat{r,s}$.



Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són vectors de direcció de r i s, respectivament, es verifica:

$$\cos(\widehat{r,s}) = \left|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right|$$

EXEMPLE

Troba l'angle que formen les rectes $\begin{cases} r: 4x + 3y + 5 = 0 \\ s: 12x + 16y - 6 = 0 \end{cases}$.

Els vectors $\vec{u} = (-3, 4)$ i $\vec{v} = (-16, 12)$ són vectors de direcció de r i s, respectivament. Per tant:

$$\cos(\widehat{r,s}) = \left|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\right| = \frac{|(-3)\cdot(-16) + 4 \cdot 12|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-16)^2 + 12^2}} = \frac{96}{5 \cdot 20} = 0{,}96$$

D'on $\widehat{r,s} \simeq 16° \; 15' \; 37''$.

ACTIVITATS

31. Troba la posició relativa de les rectes següents i, si són secants, calcula les coordenades del punt de tall i l'angle que determinen:

a) $r: 3x + y - 12 = 0$
$r': x - 2y - 4 = 0$

b) $r: x - 2y + 4 = 0$
$r': -2x + 4y - 8 = 0$

c) $r: 2x + y - 9 = 0$
$r': x - 3y - 1 = 0$

32. Determina l'equació de la recta que contingui el punt $P(2, 1)$ i sigui paral·lela a la recta $r: 4x + 7y - 4 = 0$.

33. Determina l'equació de la recta que passa pel punt $(2, -5)$ i és perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

7. DISTÀNCIES

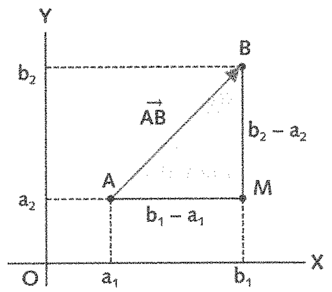
7.1 Distància entre dos punts

La distància entre dos punts A i B del pla és igual al mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$ determinat per tots dos punts. Simbolitzem la distància entre els punts A i B com a $d(A, B)$.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

Si els punts tenen coordenades $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$, es verifica:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



La fórmula de la distància entre dos punts s'obté aplicant el teorema de Pitàgores al triangle AMB.

Per exemple, la distància entre els punts $A(4, 1)$ i $B(16, 17)$ és:

$$d(A, B) = \sqrt{(16-4)^2 + (17-1)^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$$

7.2 Distància d'un punt a una recta

La distància d'un punt P a una recta r és la distància més curta entre P i els punts de la recta r.

Si el punt té coordeandes $P(a, b)$ i la recta r ve donada per l'equació general $Ax + By + C = 0$, es verifica:

$$d(P, r) = \frac{|aA + bB + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distància entre dues rectes

Si dues rectes són secants o coincidents, la distància entre elles és zero.

En el cas que siguin paral·leles, la distància entre elles és la distància d'un punt qualsevol d'una de les rectes a l'altra.

EXEMPLE

Calcula la distància del punt $P(2, 7)$ a la recta r: $3x + 4y - 45 = 0$.

$$d(P, r) = \frac{|2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 - 45|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{5} = \frac{11}{5}$$

ACTIVITATS

34. Calcula la distància entre els punts:

a) $A(3, 1)$ i $B(7, 3)$ b) $A(4, 5)$ i $B(10, -3)$

35. Troba x perquè la distància del punt $A(x, 3)$ al punt $B(12, -9)$ sigui 13.

36. Troba la distància del punt $P(3, 2)$ al punt d'intersecció d'aquestes rectes:

r: $3x - 2y - 12 = 0$ s: $2x + 7y - 33 = 0$

37. Troba la distància del punt $P(1, -4)$ a la recta r d'equació $y = 3x - 5$.

38. Calcula la distància del punt d'intersecció de les rectes r: $x + 4y - 20 = 0$ i r': $x - 2y - 8 = 0$ a la recta:

$$s: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

39. Quins valors pot prendre x perquè la distància del punt $P(x, 2)$ a la recta $5x + 12y + 4$ sigui 1?

Problemes resolts

1 Troba un vector paral·lel al vector suma dels vectors $\vec{u} = (-8, 2)$ i $\vec{v} = (4, -5)$ i que tingui:

a) El mateix sentit i mòdul 1.

b) Sentit oposat i mòdul 3.

Calculem el vector suma:

$$\vec{u} + \vec{v} = (-8, 2) + (4, -5) = (-4, -3)$$

El seu mòdul és:

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

a) El vector unitari paral·lel a $\vec{u} + \vec{v}$ i del mateix sentit és:

$$\frac{1}{|\vec{u} + \vec{v}|} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{5} \cdot (-4, -3) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

b) El vector unitari paral·lel a $\vec{u} + \vec{v}$ i de sentit oposat és:

$$-\frac{1}{|\vec{u} + \vec{v}|} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = -\frac{1}{5} \cdot (-4, -3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Si volem que el mòdul sigui 3, ho hem de multiplicar per 3. Per tant, el vector que cerquem és $\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

2 Donats els vectors $\vec{u} = (6, m)$ i $\vec{v} = (-3, 4)$, calcula m en cada cas perquè els vectors:

a) Siguin paral·lels.

b) Siguin perpendiculars.

c) Formin un angle de 60°.

a) Perquè els vectors siguin paral·lels ha d'existir un nombre real k tal que:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \Rightarrow (6, m) = k \cdot (-3, 4) \Rightarrow (6, m) = (-3k, 4k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6 = -3k \\ m = 4k \end{cases}$$

De la primera equació deduïm que $k = -2$. Substituint en la segona equació, obtenim $m = -8$.

b) Si els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars, el seu producte escalar ha de ser igual a 0. És a dir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 6 \cdot (-3) + m \cdot 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{2}$$

c) Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen un angle de 60°, s'ha de complir que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60°$.

Com que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -18 + 4m$, $|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + m^2}$, $|\vec{v}| = 5$ i $\cos 60° = 1/2$, substituint en l'expressió anterior obtenim:

$$-18 + 4m = \sqrt{36 + m^2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow -36 + 8m = 5\sqrt{36 + m^2}$$

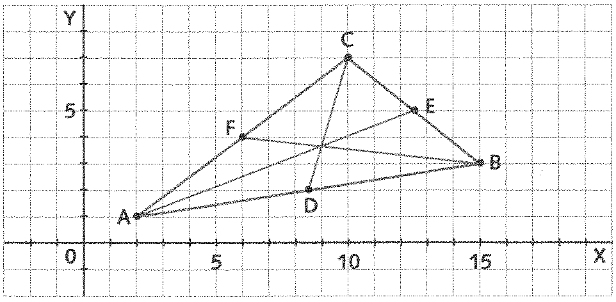
Resolent aquesta equació irracional, obtenim $m \simeq 14{,}05$.

3 Els punts $A(2, 1)$, $B(15, 3)$ i $C(10, 7)$ són els vèrtexs d'un triangle. Calcula:

a) Les equacions de les rectes que determinen els costats.

b) Les equacions de les mitjanes del triangle.

Representem en un sistema de coordenades el triangle de l'enunciat i en tracem les mitjanes:



a) Calculem els vectors de direcció de les rectes que formen els costats:

$\overrightarrow{AB} = (15 - 2, 3 - 1) = (13, 2)$

$\overrightarrow{BC} = (10 - 15, 7 - 3) = (-5, 4)$

$\overrightarrow{CA} = (2 - 10, 1 - 7) = (-8, -6)$

La recta que conté el costat AB està determinada pel punt A i el vector $\overrightarrow{AB}$. Per tant, la seva equació és:

$$\frac{x - 2}{13} = \frac{y - 1}{2}$$

La recta que conté el costat BC està determinada pel punt B i el vector $\overrightarrow{BC}$. Per tant, la seva equació és:

$$\frac{x - 15}{-5} = \frac{y - 3}{4}$$

La recta que conté el costat CA està determinada pel punt C i el vector $\overrightarrow{CA}$. Per tant, la seva equació és:

$$\frac{x - 10}{-8} = \frac{y - 7}{-6}$$

b) Les mitjanes d'un triangle són les rectes que passen pel punt mitjà de cada costat i pel vèrtex oposat al costat.

En primer lloc, calculem el punt mitjà de cada costat del triangle:

- El punt mitjà D entre A i B és:

$$D\left(\frac{2 + 15}{2}, \frac{1 + 3}{2}\right) \Rightarrow D\left(\frac{17}{2}, 2\right)$$

- El punt mitjà E entre B i C és:

$$E\left(\frac{15 + 10}{2}, \frac{3 + 7}{2}\right) \Rightarrow E\left(\frac{25}{2}, 5\right)$$

- El punt mitjà F entre C i A és:

$$F\left(\frac{10+2}{2}, \frac{7+1}{2}\right) \Rightarrow F(6, 4)$$

A continuació, trobem les equacions de les mitjanes del triangle:

- La mitjana DC està determinada pel punt $C(10, 7)$ i el vector $\overrightarrow{DC} = \left(10 - \frac{17}{2}, 7 - 2\right) = \left(\frac{3}{2}, 5\right)$. La seva equació és:

$$\frac{x-10}{\frac{3}{2}} = \frac{y-7}{5}$$

- La mitjana EA està determinada per $A(2, 1)$ i el vector $\overrightarrow{EA} = \left(2 - \frac{25}{2}, 1 - 5\right) = \left(-\frac{21}{2}, -4\right)$. La seva equació és:

$$\frac{x-2}{-\frac{21}{2}} = \frac{y-1}{-4}$$

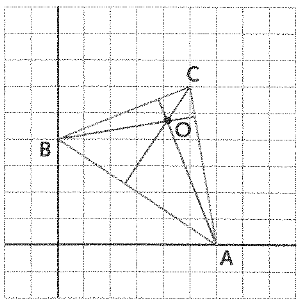
- La mitjana FB està determinada per $B(15, 3)$ i el vector $\overrightarrow{FB} = (15 - 6, 3 - 4) = (9, -1)$. La seva equació és:

$$\frac{x-15}{9} = \frac{y-3}{-1}$$

Fixa't que, coneguts dos punts d'una recta, pots utilitzar-ne qualsevol dels dos per calcular-ne l'equació.

4 Calcula l'ortocentre del triangle de vèrtexs $A(6, 0)$, $B(0, 4)$ i $C(5, 6)$.

L'**ortocentre** és el punt on es tallen les altures corresponents als tres costats d'un triangle.



Per tant, per esbrinar les coordenades de l'ortocentre hem de trobar les equacions de dues altures i resoldre el sistema format per aquestes equacions.

- L'altura corresponent al costat AB és la recta que passa per C i és perpendicular a la recta que passa per A i B.

  Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (-6, 4)$ és $\vec{u} = (4, 6)$. Així doncs, l'altura corresponent al costat AB està determinada pel punt $C(5, 6)$ i el vector de direcció $\vec{u} = (4, 6)$. La seva equació és:

$$3x - 2y - 3 = 0$$

- L'altura corresponent al costat BC és la recta que passa per A i és perpendicular a la recta que passa per B i C.

  Un vector perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (5, 2)$ és $\vec{v} = (-2, 5)$. Així doncs, l'altura corresponent al costat BC està determinada pel punt $A(6, 0)$ i el vector de direcció $\vec{v} = (-2, 5)$. La seva equació és:

$$5x + 2y - 30 = 0$$

Per trobar l'ortocentre, resolem el sistema format per les equacions de les dues altures calculades:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3 = 0 \\ 5x + 2y - 30 = 0 \end{cases}$$

Obtenim $x = \frac{33}{8}$, $y = \frac{75}{16}$. L'ortocentre és el punt $\left(\frac{33}{8}, \frac{75}{16}\right)$.

Comprova que l'altura corresponent al costat AC també passa per aquest punt.

5 Estudia, segons el valor del paràmetre m, la posició relativa del parell de rectes següent:

$$r: (m+1)x + y - m = 0$$
$$s: x + (m+1)y - m = 0$$

Vegem primer per a quin valor del paràmetre m les rectes r i s tenen la mateixa direcció:

$$\frac{m+1}{1} = \frac{1}{m+1} \Rightarrow (m+1)^2 = 1 \Rightarrow m + 1 = \pm 1$$

D'on obtenim $m = 0$ i $m = -2$.

Per tant, si $m \neq 0$ i $m \neq -2$, les rectes r i s són secants, atès que $\frac{m+1}{1} \neq \frac{1}{m+1}$.

Vegem què passa per a $m = 0$ i $m = -2$:

- Si $m = 0$, les rectes r i s són:

$$r: x + y = 0 \qquad s: x + y = 0$$

  Per tant, són coincidents.

- Si $m = -2$, les rectes r i s són:

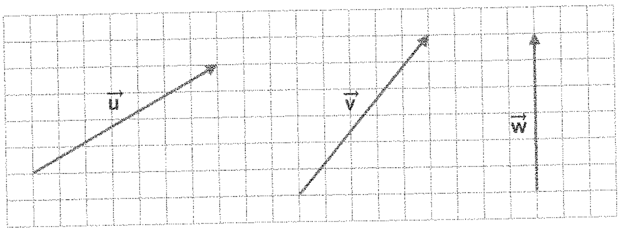
$$r: -x + y + 2 = 0 \qquad s: x - y + 2 = 0$$

  Es tracta de rectes paral·leles, perquè $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{2}$.

Activitats

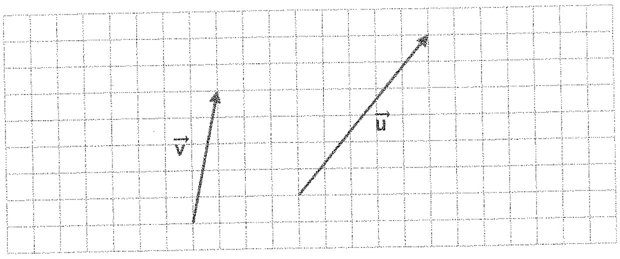
Vectors

1 Dibuixa al quadern els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ i fes gràficament les operacions que s'indiquen:

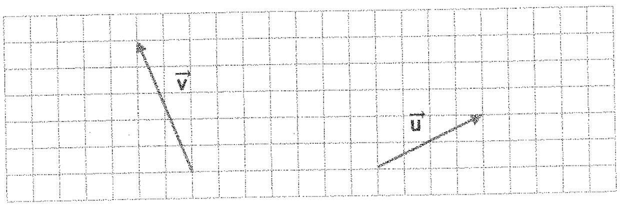


a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} + \vec{w}$ c) $\vec{v} + \vec{w}$ d) $\vec{u} - \vec{v}$ e) $\vec{u} - \vec{w}$ f) $\vec{v} - \vec{w}$

2 Dibuixa al quadern els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, suma'ls gràficament de dues maneres i comprova que s'obté el mateix resultat.



3 Dibuixa al quadern els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i representa gràficament els vectors $2\vec{u}$, $-3\vec{v}$ i $2\vec{u} - 3\vec{v}$.



Components d'un vector. Operacions

4 Quin vector de posició correspon a cada un dels punts $A(0, 5)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 3)$ i $D(2, -2)$?

5 Troba els components de $\overrightarrow{AB}$ on:

a) $A(-5, 6)$ i $B(0, -3)$ b) $A(3, 3)$ i $B(-7, 1)$

6 Esbrina les coordenades de l'origen del vector de components $(-1, 5)$ i extrem $(3, 4)$.

7 Els vèrtexs d'un paral·lelogram són $A(2, 0)$, $B(8, 0)$, $C(4, 4)$ i $D(10, 4)$. Troba els components dels vectors:

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB} \text{ i } \overrightarrow{AC}$$

8 Si $\vec{u} = (4, -1)$ i $\vec{v} = (3, 2)$, calcula els components de:

a) $2\vec{u} - 5\vec{v}$ b) $2\vec{u} - 6\vec{v}$ c) $-3\vec{u} + 4\vec{v}$ d) $-\vec{u} + 7\vec{v}$

9 Si $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (-3, 6)$ i $\vec{w} = (5, -3)$, calcula els components de:

a) $(\vec{u} - 2\vec{v}) - \vec{w}$ b) $2\vec{u} - (3\vec{v} - 4\vec{w})$ c) $\vec{u} + (2\vec{w} - 3\vec{v})$ d) $3\vec{u} - 2(\vec{u} - \vec{v})$

10 Calcula el valor de x i y perquè es verifiquin les igualtats vectorials següents:

a) $(3, 2y) + 2(x, 4) = (-5, 12)$

b) $x(4, -1) + y(3, 4) = (14, -15)$

Producte escalar

11 Troba en cadascun dels casos següents el producte escalar dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$:

a) $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ i $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 60°$

b) $|\vec{u}| = 8$, $|\vec{v}| = 3$ i $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 30°$

12 Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen mòdul 3 i 5 respectivament. Troba'n el producte escalar sabent que formen un angle de 75°.

13 Tenim els vectors $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (3, 6)$ i $\vec{w} = (5, -3)$. Calcula els productes escalars següents:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ d) $2\vec{u} \cdot 3\vec{w}$

14 Troba, en cada cas, el mòdul del vector $\vec{u}$:

a) $\vec{u} = (5, 12)$ b) $\vec{u} = (1, -1)$ c) $\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ d) $\vec{u} = (15, -8)$

15 Determina un vector paral·lel al vector $\vec{u} = (-6, 8)$ i que tingui mòdul 5.

16 Troba dos vectors unitaris de la mateixa direcció que $\vec{u} = (9, 12)$.

17 Troba dos vectors unitaris perpendiculars al vector $\vec{u} = (3, -4)$.

18 Calcula el valor de a perquè els vectors $\vec{u} = (-2, a)$ i $\vec{v} = (3, a + 1)$ siguin perpendiculars.

19 Donats dos vectors $\vec{u} = (3, 5)$ i $\vec{v} = (-4, -3)$, calcula'n el mòdul i troba l'angle que formen.

Equacions de la recta

20 Una recta està determinada pels punts $A(4, -2)$ i $B(-1, 3)$. Troba les equacions paramètriques, contínua i general de la recta.

21 Troba les equacions general, contínua i paramètriques de la recta que passa pel punt $A(4, -5)$ i té pendent -2.

22 Una recta està determinada pel punt $A(3, -5)$ i pel vector $\vec{v} = (2, 9)$. Troba:

a) Les equacions paramètriques de la recta.

b) L'equació contínua de la recta.

c) L'equació explícita de la recta.

d) L'equació punt-pendent de la recta.

23 Escriu l'equació punt-pendent de la recta que passa pel punt P i té pendent m, on:

a) $P(5, -3)$, $m = -2$ b) $P(-1, 7)$, $m = 3$

24 Expressa les equacions general, contínua i paramètriques de la recta d'equació $y = 3x - 2$.

25 Troba tres punts de la recta $y - 5 = 2(x - 3)$.

Posició relativa de dues rectes

26 Esbrina la posició relativa d'aquests parells de rectes:

a) $r: -x + 3y + 1 = 0$ i $r': 2x - 6y + 1 = 0$

b) $r: 3x + y - 1 = 0$ i $r': 6x + 2y - 2 = 0$

27 Troba la posició relativa de les rectes r: $3x + y + 13 = 0$ i r': $2x - y - 7 = 0$ i, si són secants, calcula les coordenades del punt de tall i l'angle que determinen.

28 Troba la posició relativa de les rectes r i r' següents, segons quin sigui el valor del paràmetre t:

$$r: tx + 2y - 5 = 0 \qquad r': 3x + 2y + 1 = 0$$

29 Escriu l'equació general de la recta que passa per $A(4, 0)$ i és paral·lela a $r: x - y + 2 = 0$.

30 Escriu l'equació d'una recta que passi pel punt $P(2, -3)$ i sigui paral·lela a la recta $r: 2x - y + 3 = 0$.

31 Determina l'equació explícita de la recta que passa pel punt $P(3, 0)$ i és perpendicular a la recta $y = -2x + 1$.

32 Troba l'equació de la perpendicular a la recta $4x - 3y + 8 = 0$ que passa pel punt $P(3, 4)$.

Distàncies

33 Calcula la distància entre els punts $A(-2, -3)$ i $B(-4, 5)$.

34 Obtén, en cada cas, la distància del punt P a la recta r:

a) $P(1, -3)$, $r: x - y + 6 = 0$ b) $P(3, 1)$, $r: -2x - y + 1 = 0$

35 Troba la distància entre les rectes:

$$r: 2x - y - 4 = 0 \text{ i } r': \frac{x-3}{4} = \frac{y}{3}$$

Exercicis de les proves d'accés

1. Donats els vectors $\vec{u} = (-3, 4)$ i $\vec{v} = (5, 2)$, calcula:

a) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

b) El mòdul del vector $\vec{u}$.

c) El producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

d) L'angle que formen els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

2. Si dues rectes del pla es tallen en un punt, podem assegurar que:

a) Les rectes tenen el mateix pendent.

b) Els pendents són nombres de signe diferent.

c) Els vectors directors no són paral·lels.

d) Tallen l'eix d'ordenades pel mateix punt.

3. Donades les rectes r: $2x + y + 5 = 0$, s: $4x + 3y - 22 = 0$ i t: $4x + 3y + 3 = 0$, troba raonadament:

a) La posició relativa de les rectes r i s.

b) La posició relativa de les rectes s i t.

c) El punt de tall de les rectes r i t.

d) La distància entre les rectes s i t.

4. Donats els punts $A(-1, -4)$, $B(-3, 0)$ i $C(3, 2)$, troba:

a) Els components dels vectos $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

b) L'equació de la recta r, que passa per A i C.

c) L'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

d) La distància del punt B a la recta r.

5. Donats el punt del pla $P(3, -2)$ i la recta r: $y = \frac{3}{4}x + 2$, calcula:

a) Un punt qualsevol i el pendent de la recta r.

b) Un vector director de la recta i un vector que sigui perpendicular al vector director.

c) L'equació de la recta paral·lela a r que passa per P.

d) L'equació de la recta perpendicular a r que passa per P.

6. Donada l'equació de la recta $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{3}$, troba:

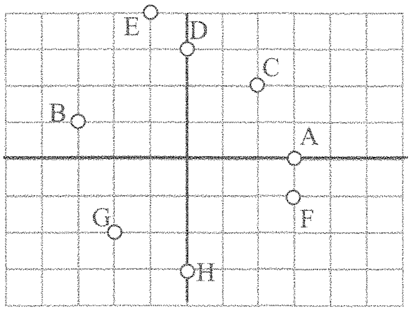
a) El pendent de la recta i l'ordenada a l'origen.

b) L'equació de la recta paral·lela a l'anterior que passi pel punt $(1, 1)$.

Pàgines 110 a 123

1. M(6, 4) S(−2, −4)
N(2, −1) T(0, 2)
P(3, 0) U(−5, 3)
Q(−4, −3) V(0, −1)

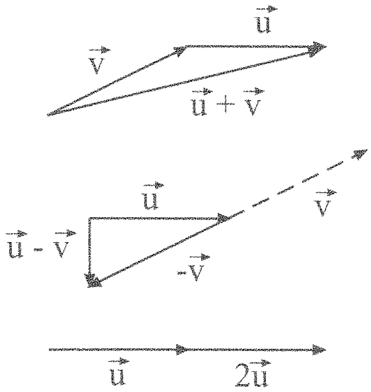
2. La representació és la següent:



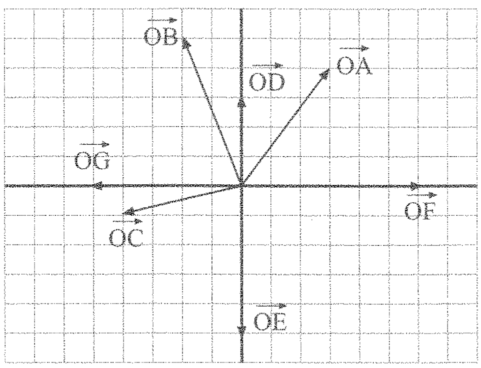
3. y = 0

4. x = 0

5. Obtenim els vectors següents:

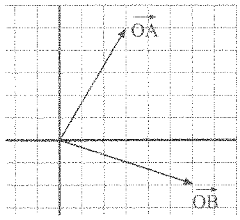


6. Els vectors són els següents:



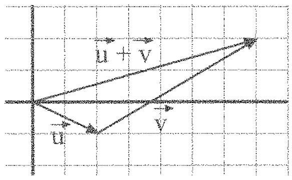
7. **a)** (5 − 2, 7 − 1) = (3, 6)
b) (7 − 4, −2 − (−3)) = (3, 1)
c) (−5 − (−1), 3 − (−3)) = (−4, 6)

8. Els vectors són els següents:

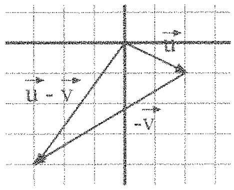


9. **a)** x = 6 y = 5
b) 2 − x = 6 → x = 2 − 6 = −4
y − 1 = 4 → y = 1 + 4 = 5
c) x = 2 / 3, y = 8 / 4 = 2
d) x − 1 = 2x → x = −1 y = 3

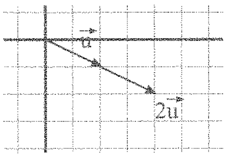
10. **a)** $(2+5,-1+3)=(7,2)$



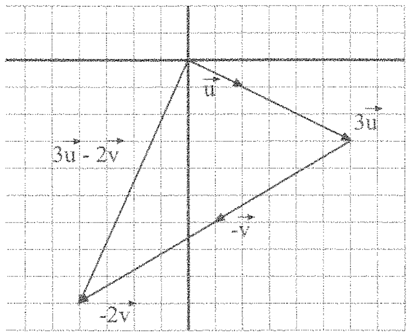
b) $(2-5,-1-3)=(-3,-4)$



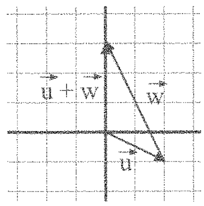
c) $(2\cdot 2, 2\cdot(-1))=(4,-2)$



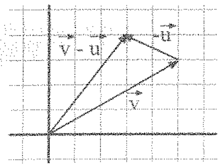
d) $(3\cdot 2-2\cdot 5, 3\cdot(-1)-2\cdot 3)=(6-10,-3-6)=(-4,-9)$



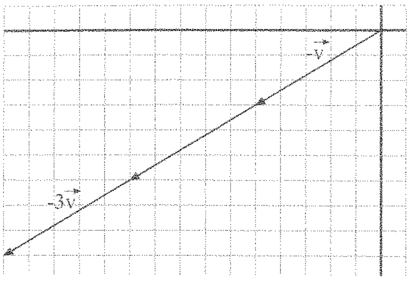
e) $(2-2,-1+4)=(0,3)$



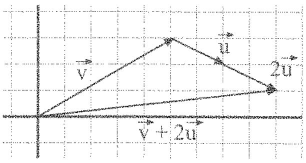
f) $(5-2, 3-(-1))=(3,4)$



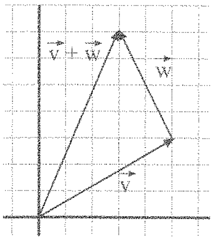
g) $(-3\cdot 5,-3\cdot 3)=(-15,-9)$



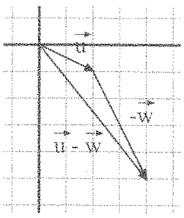
h) $(5+2\cdot 2,3+2\cdot(-1))=(5+4,3-2)=(9,\ 1)$



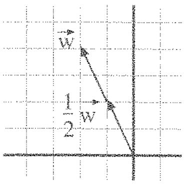
i) $(5+(-2),3+4)=(3,7)$



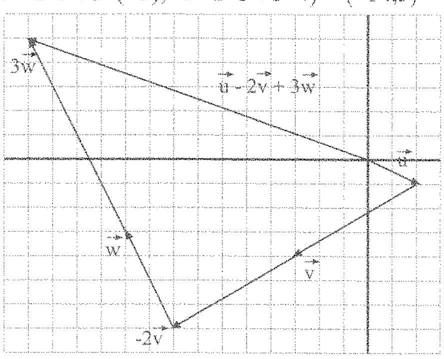
j) $(2-(-2),-1-4)=(4,-5)$



k) $\left(\frac{-2}{2},\frac{4}{2}\right)=(-1,2)$



l) $(2-2\cdot 5+3\cdot(-2),-1-2\cdot 3+3\cdot 4)=(-14,5)$



11. $\overrightarrow{AB}=(2-4,5-(-1))=(-2,6)$

Si D = (x, y): $\overrightarrow{CD}=(x-6,y-4)$

Per tant, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si:

$x-6=-2 \rightarrow x=6-2=4$

$y-4=6 \rightarrow y=6+4=10$

Per tant, D(4, 10).

12. *Primera coordenada*: $2+3\cdot 1+2\cdot 3-8=2+3+6-$ $-8=3$

Segona coordenada: $3+3\cdot 2+2\cdot(-1)-3=3+6-$ $-2-3=4$

Arribes al punt (3, 4).

13. a) $2\cdot 3+(-3)\cdot 4=-6$

b) $3\cdot 1+4\cdot 4=19$

c) $(2,-3)\cdot(-7,-4)=2\cdot(-7)+(-3)\cdot(-4)=-2$

d) $(3\cdot 1+4\cdot 4)\cdot(8,-12)=19\cdot(8,-12)=(152,$ $-228)$

e) $(2,-3)\cdot(4,8)=2\cdot 4+(-3)\cdot 8=-16$

f) $(4,-6)\cdot(9,12)=4\cdot 9+(-6)\cdot 12=-36$

14. $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot 6+(-3)\cdot 4=0 \rightarrow$ Formen un angle de 90°

15. $\vec{u}\cdot\vec{v}=2x-12=4 \rightarrow x=8$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=2x-12=0 \rightarrow x=6$

- *Pensa i respon (pàgina 116)*

$$\left|k\vec{u}\right|=\sqrt{(ku_1)^2+(ku_2)^2}=\sqrt{k^2\left(u_1^2+u_2^2\right)}=$$

$$=|k|\sqrt{u_1^2+u_2^2}=|k|\left|\vec{u}\right|$$

16. a) $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$; **b)** $\sqrt{2^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36}=6$

17. a) $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{5^2+\left(\sqrt{11}\right)^2}=\sqrt{36}=6 \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\frac{5}{6},\frac{\sqrt{11}}{6}\right) \text{ i } \left(-\frac{5}{6},-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)$$

b) $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{400}=20 \rightarrow$

$$\rightarrow \left(\frac{12}{20},\frac{16}{20}\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right) \text{ i } \left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$$

18. a) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{-10+0}{\sqrt{10\cdot 10}}=\dfrac{-1}{\sqrt{10}}=-0{,}316 \rightarrow 108{,}43°$

b) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{30+56}{\sqrt{74\cdot 10}}=\dfrac{86}{\sqrt{74\cdot 10}}=0{,}9997 \rightarrow 1{,}33°$

19. $0=\dfrac{8x-3y}{\sqrt{45}\cdot\left|\vec{v}\right|}=$

Per tant: $\begin{cases} 8x-3y=0 \\ x^2+3^2=45 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow$ Dues solucions:x $x=-6,\ y=-16;\ \ x=6,\ y=16$

20. a) $(3, -5) + t\,(2, 9)$; **b)** $(4, 0) + t\,(-2, 5)$; **c)** $(6, -1) + t\,(7, 0)$

21. a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1) \rightarrow (1, 4) + t\,(1, 1)$

b) $\overrightarrow{AB} = (2, 3) \rightarrow (3, -1) + t\,(2, 3)$

c) $\overrightarrow{AB} = (-5, 3) \rightarrow (-2, -4) + t\,(-5, 3)$

d) $\overrightarrow{AB} = (-2, 0) \rightarrow (4, 3) + t\,(-2, 0)$

e) $\overrightarrow{AB} = (-3, 5) \rightarrow (6, -2) + t\,(-3, 5)$

f) $\overrightarrow{AB} = (-4, 3) \rightarrow (0, -1) + t\,(-4, 3)$

22. *Vectorial* $\rightarrow (3, -5) + t\,(2, 9)$

Paramètriques $\rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 + 9t \end{cases}$

Continua $\rightarrow \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{9}$

23. $\overrightarrow{AB} = (8, 8)$

Equació $\rightarrow \begin{cases} x = -2 + 8t \\ y = -5 + 8t \end{cases}$

Tres punts $\rightarrow t = 2 \rightarrow (14, 11)$; $t = -1 \rightarrow (-10, -13)$; $t = 3 \rightarrow (22, 19)$

24. a) *Contínua* $\rightarrow \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-5}{2}$

General $\rightarrow 2x - 7y + 33 = 0$

b) *Contínua* $\rightarrow \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-7}{3}$

General $\rightarrow 3x - y - 5 = 0$

c) *Contínua* $\rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+6}{-2}$

General $\rightarrow -2x - y - 6 = 0$

d) *Contínua* $\rightarrow \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{-3}$

General $\rightarrow -3x - 3y + 9 = 0$

25. $\overrightarrow{CD} = (2, 5) \rightarrow r_{CD} : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5}$

$\dfrac{-3+1}{2} = -1 \neq \dfrac{-1}{5} = \dfrac{2-3}{5} \rightarrow$ *A* no pertany a r_{CD}

$\dfrac{3+1}{2} = 2 = \dfrac{13-3}{5} \rightarrow$ *B* pertany a r_{CD}

26. Si $x = 0 \rightarrow y = 3$ Si $x = 1 \rightarrow y = 7$

La recta passa pels punts $A(0, 3)$ i $B(1, 7)$, per tant, el seu vector director és $\overrightarrow{AB} = (1, 4)$.

Contínua $\rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-3}{4}$ *Paramètriques* $\rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$

27. a) $y = -5x / 4 + 3 / 2$; **b)** $y = -x / 3 + 4 / 3$; **c)** $y = 2x + 3$; **d)** $y = x - 6$

28. a) $y + 5 = 2\,(x - 4)$; **b)** $y + 4 = -(x + 2)$

29. $2x - y - 2 = 0 \rightarrow$ Com que $m = 2$, el vector director és de la forma $(k, 2k)$.

30. $\overrightarrow{AB} = (2, 2)$; La recta que passa per A i B té equació:

$\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-3}{2} \rightarrow 2x - 2y - 2 = 0$

Per tant, les coordenades del punt $C(a, b)$ que bus-quem compleixen: $2a - 2b - 2 = 0 \rightarrow b = a - 1$.

D'altra banda:

$$\frac{\sqrt{(4-a)^2 + (3-a+1)^2}}{\sqrt{(6-a)^2 + (5-a+1)^2}} = \frac{3}{2};$$

$4[(4 - a)^2 + (3 - b)^2] = 9[(6 - a)^2 + (5 - b)^2]$;

$-10a^2 + 152a - 520 = 0 \rightarrow a_1 = 10,\ a_2 = 26 / 5$

Si $a_1 = 10 \rightarrow b_1 = 9 \rightarrow C_1(10, 9)$

Si $a_2 = 26 / 5 \rightarrow b_2 = 21 / 5 \rightarrow C_2(26 / 5, 21 / 5)$

31. a) $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{1}{-2} \rightarrow$ Secants amb punt de tall $(4, 0)$

b) $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{4}{-8} \rightarrow$ Coincidents

c) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-3} \rightarrow$ Secants amb Punt de tall $(4, 1)$

32. La recta és de la forma $4x + 7y + C = 0$ i es compleix:

$4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + C = 0 \rightarrow C = -15 \rightarrow$ La recta és $4x + 7y - 15 = 0$.

33. Busquem una recta $y = 2x + n$ tal que:

$-5 = 4 + n \rightarrow n = -9 \rightarrow$ La recta és $y = 2x - 9$

34. a) $d = \sqrt{(7-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) $d = \sqrt{(10-4)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{100} = 10$

35. $d = \sqrt{(12-x)^2 + (-9-3)^2} = 13$

$(12 - x)^2 + 144 = 169$;

$x^2 - 24x + 119 = 0 \rightarrow x_1 = 17,\ x_2 = 7$

36. $\begin{cases} x = \dfrac{2y+12}{3} \\ 2x + 7y = 33 \end{cases} \rightarrow 2\left(\dfrac{2y+12}{3}\right) + 7y = 33$

$\rightarrow 4y + 24 + 21y = 99 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 6$

Les rectes es tallen en el punt $(6, 3)$, per tant, la distància que busquem és: $d = \sqrt{(6-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$

37. r: $3x - y - 5 = 0$ $\quad d\,(P, r) = \dfrac{|3+4-5|}{\sqrt{9+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

38. Restant les equacions de r i r' obtenim:

$6y - 12 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 12 \rightarrow r \cap r' = P = (12, 2)$

D'altra banda s: $5x + 3y - 13 = 0$

La distància és: $d\,(P, r) = \dfrac{|60+6-13|}{\sqrt{25+9}} = \dfrac{53}{\sqrt{34}} = \dfrac{53\sqrt{34}}{34}$

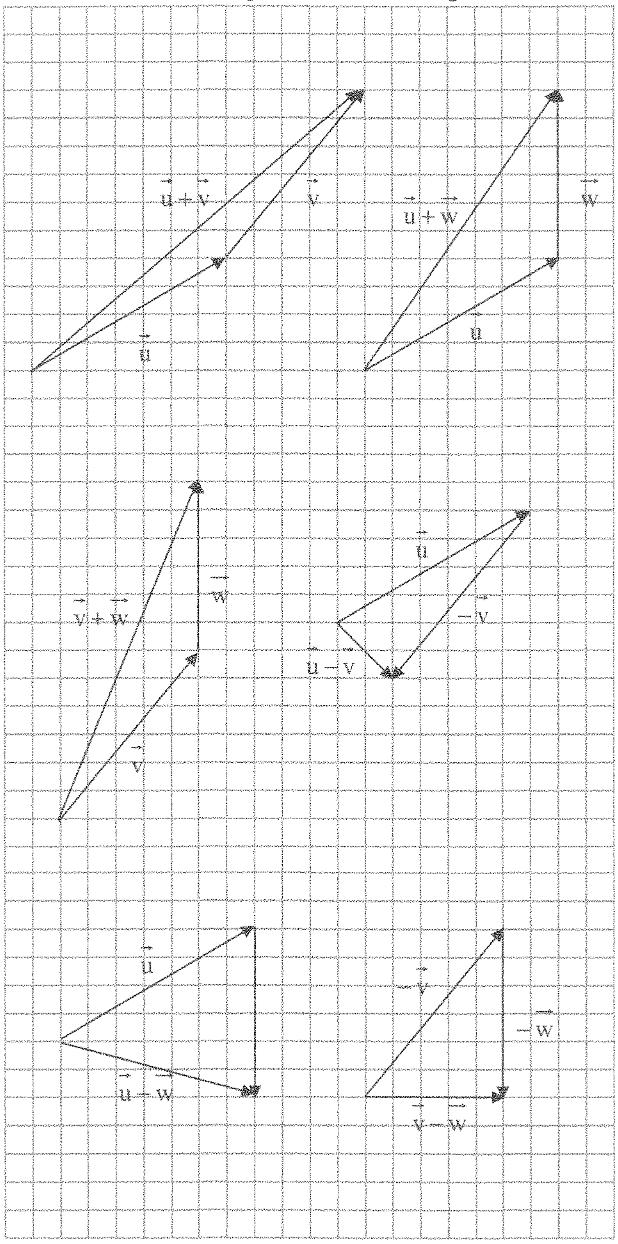
39. $\dfrac{|5x + 12 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{25+144}} = 1 \rightarrow |5x + 28| = 13$

Dues possibilitats: $5x + 28 = 13 \rightarrow x = -3$

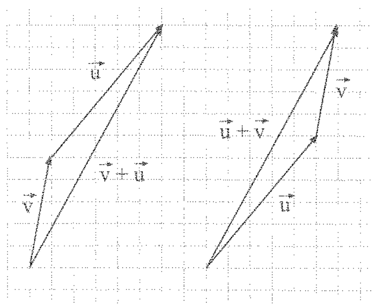
$5x + 28 = -13 \rightarrow x = -41 / 5$

Pàgines 126 i 127

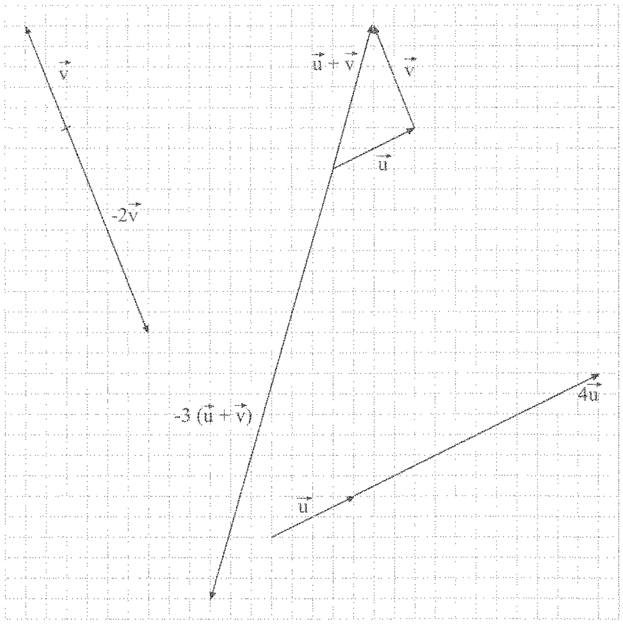
1. Els resultats de les operacions són els següents:



2. Les sumes són les següents:



3. Les representacions són les següents:



4. Els vectors de posició tenen les mateixes coordenades que els punts.

5. **a)** $(5, -9)$; **b)** $(-10, -2)$

6. $(3 - a_1, 4 - a_2) = (-1, 5) \rightarrow a_1 = 4, a_2 = -1$

L'origen és $(4, -1)$.

7. $\overrightarrow{AB} = (6, 0)$ $\quad$ $\overrightarrow{DA} = (-8, -4)$

$\overrightarrow{BC} = (-4, 4)$ $\quad$ $\overrightarrow{DB} = (-2, -4)$

$\overrightarrow{CD} = (6, 0)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = (2, 4)$

8. **a)** $(-7, -12)$; **b)** $(-10, -14)$; **c)** $(0, 11)$; **d)** $(17, 15)$

9. **a)** $(3, -6)$; **b)** $(33, -24)$; **c)** $(21, -21)$; **d)** $(-4, 15)$

10. **a)** $3 + 2x = -5 \rightarrow x = -8 / 2 = -4$

$2y + 2 \cdot 4 = 12 \rightarrow y = 4 / 2 = 2$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x + 4y = -15 \end{cases}$; $\quad x = 4y + 15$;

$4(4y + 15) + 3y = 14$; $\quad 16y + 60 + 3y = 14$;

$19y = -46$; $\quad y = -46 / 19$;

$x = 4(-46 / 19) + 15 = 101 / 19$

11. **a)** $5 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 5$; **b)** $8 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

12. $3 \cdot 5 \cdot 0{,}2588 = 3{,}882$

13. **a)** $2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 24$; **b)** $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$; **c)** $(2, 3) \cdot (8, 3) = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 = 25$; **d)** $(4, 6) \cdot (15, -9) = 4 \cdot 15 - 6 \cdot 9 = 6$

14. **a)** $\sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ $\quad$ **c)** $\sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ $\quad$ **d)** $\sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

15. $|\vec{u}| = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

Com que $\sqrt{100 / 2^2} = \sqrt{25} = 5$, un vector és:

$$\frac{\vec{u}}{2} = \left(-\frac{6}{2}, \frac{8}{2}\right) = (-3{,}4)$$

16. $|\vec{u}| = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$

Solució: $\frac{\vec{u}}{15} = \left(\frac{9}{15}, \frac{12}{15}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; $-\frac{\vec{u}}{15} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

17. Un vector perpendicular a $\vec{u}$ és $\vec{v} = (4, 3)$.

$|\vec{v}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Solució: $\frac{\vec{v}}{5} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$; $-\frac{\vec{v}}{5} = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

18. Seran perpendiculars quan el producte escalar sigui 0:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + a(a+1) = 0$;
$a^2 + a - 6 = 0 \rightarrow a_1 = 2, a_2 = -3$

19. $|\vec{u}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{-12-15}{5\sqrt{34}} = \frac{-27}{5\sqrt{34}} = -\frac{27\sqrt{34}}{170} \rightarrow$

L'angle és 157,83°.

20. $\overrightarrow{AB} = (-5{,}5)$

Paramètriques $\rightarrow \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

Contínua $\rightarrow \frac{x-4}{-5} = \frac{y+2}{5}$

General $\rightarrow 5x + 5y - 10 = 0$

21. Un vector director és $\vec{v} = (1,-2)$

Paramètriques $\rightarrow \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -5 - 2t \end{cases}$

Contínua $\rightarrow \frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{-2}$

General $\rightarrow -2x - y + 3 = 0$

22. a) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -5 + 9t \end{cases}$ $\quad$ **c)** $y = 9x/2 - 37/2$

b) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{9}$ $\quad$ **d)** $y + 5 = 9(x-3)/2$

23. a) $y + 3 = -2(x - 5)$; **b)** $y - 7 = 3(x + 1)$

24. *General* $\rightarrow 3x - y - 2 = 0$

Contínua $\rightarrow$ Si $x = 0$, $y = -2 \rightarrow$ el punt $(0, -2)$ pertany a la recta i el vector director és $(1, 3) \rightarrow$
$\rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3}$

Paramètriques $\rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$

25. Activitat personal, per exemple:(0, –1), (1, 1), (2, 3), ...

26. a) $\frac{-1}{2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{1}{1} \rightarrow$ Paral·leles

b) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \rightarrow$ Coincidents

27. $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow$ Són secants

$\begin{cases} 3x + y + 13 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{cases}$; $x = -6/5 \rightarrow y = -47/5$

Es tallen en el punt (–6 / 5, –47 / 5).

28. $\frac{t}{3} = \frac{2}{2} \rightarrow t = 3$

Si $t \neq 3$, són secants. $\quad$ Si $t = 3$, són paral·leles.
En cap cas són coincidents.

29. $(x - 4) - y = 0$

30. $x + 2y + C = 0$; $\quad$ Es compleix $2 - 6 + C = 0 \rightarrow C = 4$.
La recta és $x + 2y + 4 = 0$.

31. Busquem una recta $y = \frac{1}{2}x + n$ tal que:

$0 = \frac{3}{2} + n \rightarrow n = -\frac{3}{2} \rightarrow$ La recta és: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

32. Busquem una recta $3x + 4y + C = 0$ tal que: $9 + 16 + C = 0$;
$C = -25 \rightarrow$ La recta és $3x + 4y - 25 = 0$

33. $\sqrt{(-2)^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

34. a) $\frac{|1+3+6|}{\sqrt{1+1}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$; **b)** $\frac{|-6-1+1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

35. Les rectes són secants. El punt de tall és: (7 / 5, –6 / 5)

Exercicis de les proves d'accés

1. a) $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ $\quad$ **b)** $-15 + 8 = -7$

c) $|v| = \sqrt{29} \rightarrow \frac{-7}{5 \cdot \sqrt{29}} = -0{,}25997$

Per tant, l'angle és arc cos –0,25997 = 105,07°

2. La resposta correcta és la *c*.

3. a) Secants $\quad$ **b)** Paral·leles $\quad$ **c)** (–6, 7)

d) A(0, –1) pertany a *t*. Calculem la distància entre aquest punt i *s*:

$$d(s, t) = d(s, A) = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = 5$$

4. a) $\overrightarrow{AB} = (-2, 4)$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = (4, 6)$

b) r: $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{6} \rightarrow$ r: $6x - 4y - 10 = 0$

c) $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{16}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{13}} = 0{,}49614$

L'angle és: arc cos 0,49614 = 60,26°

d) $\frac{|-18-10|}{\sqrt{36+16}} = \frac{28}{2\sqrt{13}} = \frac{14\sqrt{13}}{13} \rightarrow$ L'angle és: arc cos 0,49614 = 60,26°

5. a) Per exemple, el punt (0, 2) pertany a *r*

El pendent de la recta és 3 / 4.

b) Un vector director seria (4, 3).

Un vector perpendicular al vector director seria (−3, 4).

c) $y = \frac{3}{4}x - \frac{17}{4}$

d) $y = -\frac{4}{3}x + 2$

6. a) El vector director és (2, 3); per tant, el pendent és 3 / 2.

L'ordenada a l'origen és l'ordenada del punt de la recta amb x = 0.

$\frac{0-4}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow y = -6$ L'ordenada a l'origen és −6.

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} \rightarrow 3x - 2y - 1 = 0$

7. Funcions (I) — Pàg. 128 a 145

Pàgines 129 a 141

1. És una funció d'expressió c(t) = 0,8t; c(5,5) = 4,40 milers d'euros

2. a) Dom = ℝ; f(0) = 1; f(1) = −3; f(−1) = 1; f(2) = −5

b) ℝ − {1}; f(0) = −2; f(1) = No existe; f(−1) = −1 / 2 ; f(2) = 4

c) Dom = [−1, 1]; f(0) = 1; f(1) = 0; f(−1) = 0; f(2) no existeix

3. a) $x^3 + x^2 + 1$; **b)** $-x^3 + x^2 + 1$; **c)** $(x^2+1)^3$; **d)** $x^3 - x^2 - 1$; **e)** $x^5 + x^3$; **f)** $x^6 + 1$

4. $\frac{x^2+1}{x^3} \rightarrow$ No està definida per a x = 0.

5. a) $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$

Simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

b) $f(-x) = -(-x)^4 + (-x)^2 = -x^4 + x^2 = f(x)$

Simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

c) $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x)$

Simètrica respecte de l'origen de coordenades

d) $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2} = \frac{x^2+1}{x^2} = f(x)$

Simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

e) $f(-x) = (-x)^5 - 5(-x)^3 + 4(-x) = -x^5 + 5x^3 - 4x = -f(x)$

Simètrica respecte de l'origen de coordenades

d) $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 2} = \frac{-x^3}{x^2-2} = -f(x)$

Simètrica respecte de l'origen de coordenades

6. La funció és discontínua en x = −0,75, x = 0,75.

Té asímptotes verticals en x = 0,75, x = −0,75 i una asímptota horitzontal en y = 0.

7. *Gràfica superior*:

La funció decreix en (−∞, −3) ∪ (0, 3).

La funció creix en (−3, 0) ∪ (3, +∞).

Té un màxim relatiu en (0, −2,4) i mínims relatius en (−3, −4) y (3, −4).

La funció és còncava en (−∞; −1,5) ∪ (1,5; +∞).

La funció és convexa en (−1,5; 1,5).

Té punts d'inflexió en (−1,5; −3) (1,5; −3).

Gràfica inferior:

La funció decreix en (4, 12).

La funció creix en (−∞, 4) ∪ (12, +∞,).

Té un màxim relatiu en (4, 5) i un mínim relatiu en (12, 0).

La funció és còncava en (8, +∞).

La funció és convexa en (−∞, 8).

Té un punt d'inflexió en (8; 2,4).

8. a) y = 2x + b   Es compleix: 4 = 2 + b → b = 2

La funció és: y = 2x + 2

b) $\begin{cases} 6 = -a + b \\ 3 = 2a + b \end{cases} \rightarrow a = -1,\ b = 5 \rightarrow$ La funció és: y = = −x + 5

c) y = 3x + b   A més: 0 = 3 + b → b = −3

La funció és: y = 3x − 3

9. $\begin{cases} 1 = 0 + 0 + c \\ 7 = 4a + 2b + c \\ 4 = a - b + c \end{cases} \rightarrow c = 1,\ b = -1,\ a = 2 \rightarrow$ La funció és $y = 2x^2 - x + 1$.

10. f(0) = −2; f(1) = −1 / 2; f(2) = 0 ; f(−2) = 4; f(4) = 2 / 5

No està definida per a x = −1

11. f(0) = 0; D'altra banda, x^2 i $x^2 + 2$ són més grans que 0 per a tot *x* diferent de 0 → f(x) > 0 per a tot *x* no nul.

12. La part de la gràfica de *1 / x* que queda per sobre de l'eix d'abscisses queda igual, mentre que la part de *1 / x* que queda per sota és simètrica de la part corresponent de |*1 / x*| respecte d'aquest eix.

Passa el mateix amb qualsevol funció. En els casos en què la gràfica original talli l'eix d'abscisses, quan es re-