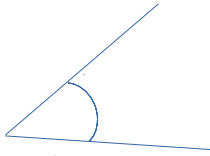


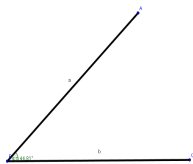
UNITAT 3: TRIGONOMETRIA

1. Angles

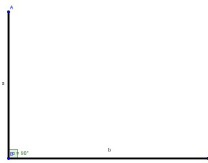


Anomenem angle a l'espai del pla tancat per dues semirectes que tenen un mateix origen.

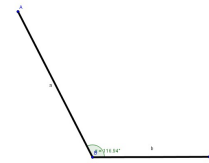
Podem classificar els angles segons la seva obertura en tres tipus: agut, recte i obtús.



Agut
 $< 90^\circ$



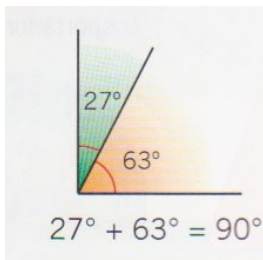
Recte
 $= 90^\circ$



Obtús
 $> 90^\circ$

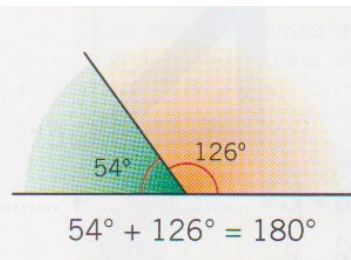
Altres angles són:

COMPLEMENTARIS



Dos angles són complementaris si la seva suma fa un angle RECTE (90°)

SUPLEMENTARIS

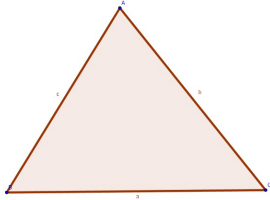


Dos angles són suplementaris si la seva suma fa un angle PLA (180°)

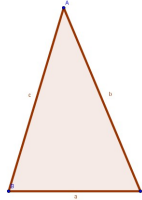
2. Triangles

Anomenem **triangle** al polígon tancat de tres costats. Els triangles es poden classificar de dues maneres diferents: segons els costats i segons els angles:

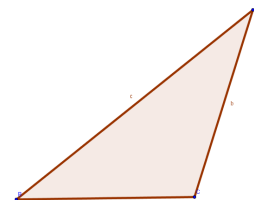
▪ Classificació segons els costats



Equilàter
3 costats iguals

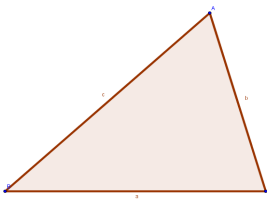


Isòsceles
2 costats iguals

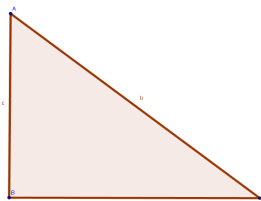


Escalè
Cap costat igual

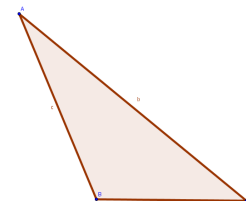
▪ Classificació segons els angles



Acutangle
3 angles aguts



Rectangle
un angle recte



Obtusangle
Un angle obtús

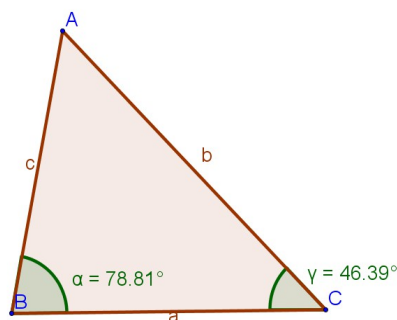
▪ Propietats dels triangles

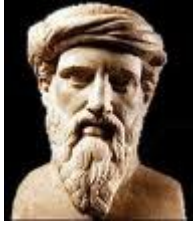
Una de les propietats més interessants que tenen els triangles és que: **la suma dels angles interiors d'un triangle és sempre de 180° .**

Aquesta propietat ens permet de calcular un angle si en sabem els altres dos.

Activitat

Quant val l'angle que falta?





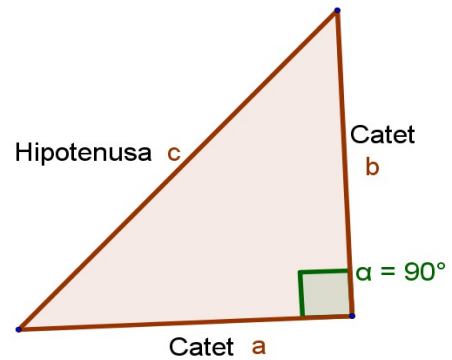
3. Teorema de Pitàgores

Tot i que el teorema de Pitàgores **només es pot aplicar a triangles rectangles** és sens dubte un dels teoremes més útils i bàsics de la trigonometria.

Primerament cal definir uns quants paràmetres:

- Anomenem **hipotenusa** al costat del davant de l'angle recte. Sempre coincideix que la hipotenusa és el costat més llarg. En aquest cas la hipotenusa és el costat c .

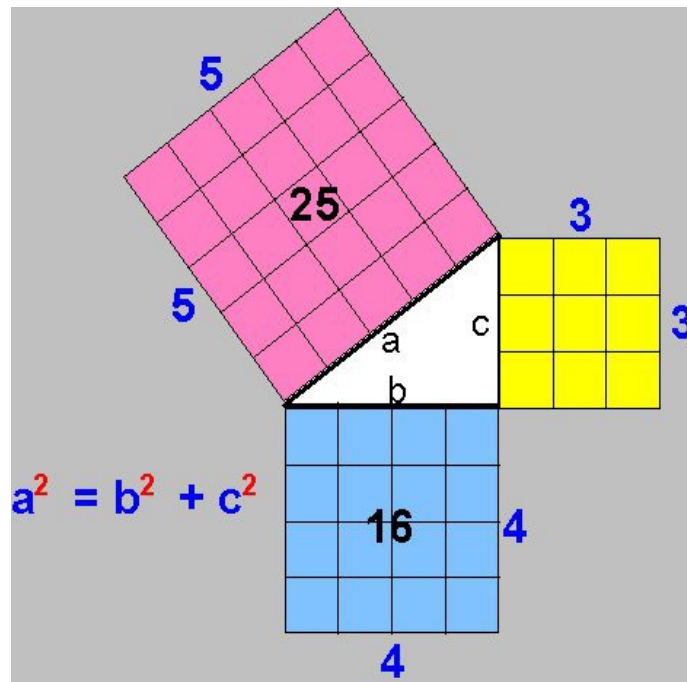
- Anomenem **catets** els dos costats que formen l'angle de 90° . En aquest cas els catets són a i b .



- El teorema de Pitàgores diu:

$$\text{Hipotenusa}^2 = \text{Catet}_a^2 + \text{Catet}_b^2$$

DEMOSTRACIÓ
GRÀFICA:

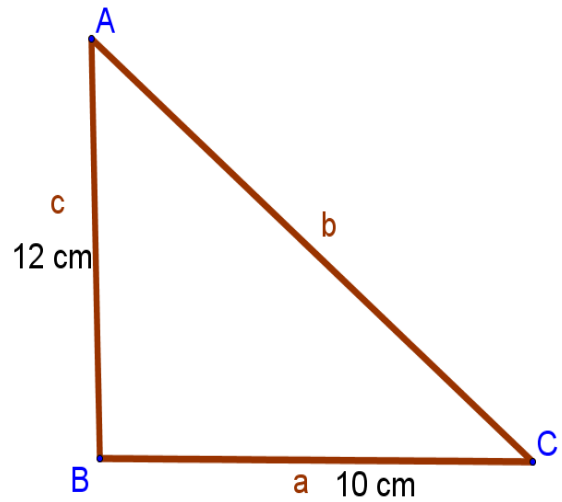


Exemple: Troba la hipotenusa del triangle.

En aquest cas c i a són els catets, i b és la hipotenusa.

$$\begin{aligned} \text{hipotenusa}^2 &= \text{catet}^2 + \text{catet}^2 \\ \text{hipotenusa}^2 &= 12^2 + 10^2 = \\ &= 144 + 100 = \\ &= 244 \end{aligned}$$

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{244} = 15,62$$

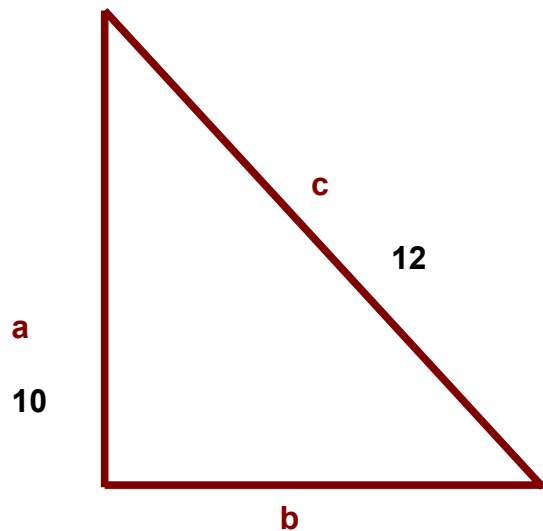


Exemple: Troba el costat que falta del triangle.

En aquest cas c és la hipotenusa i, a i b són els catets.

$$\begin{aligned} \text{hipotenusa}^2 &= \text{catet}^2 + \text{catet}^2 \\ 12^2 &= \text{catet}^2 + 10^2 = \\ \text{catet}^2 &= 12^2 - 10^2 = \\ &= 144 - 100 = \\ &= 44 \end{aligned}$$

$$\text{catet} = \sqrt{44} = 6,63$$



Activitats: Determinació de costats mitjançant Pitàgoras (I)



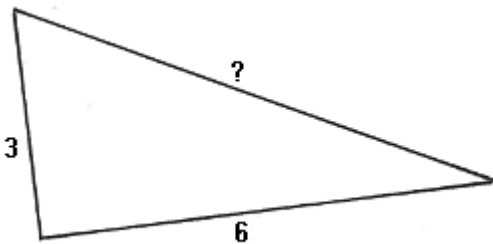
Els triangles següents són rectangles.

1r. Determina l'angle recte, la hipotenusa i els catets.

2n. Calcula el costat que falta mitjançant el teorema de Pitàgoras.

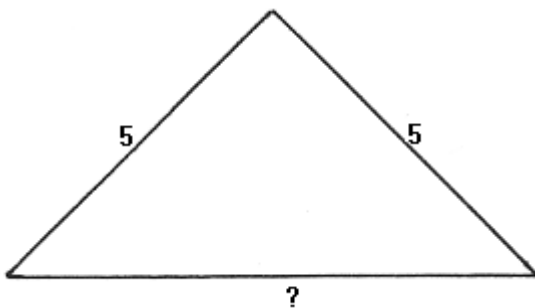
3r. Verifica que el càlcul és correcte mesurant el costat amb el regle.

a.



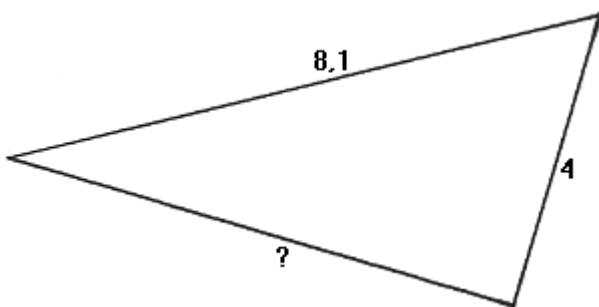
Solució: (6,7)

b.



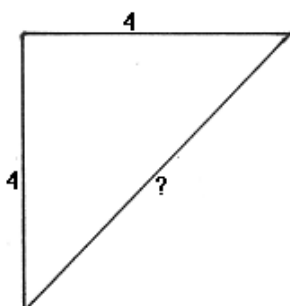
Solució: (7,07)

c.



Solució: (7,04)

d.



Solució: (5,66)

Activitats: Teorema de Pitàgores (I)

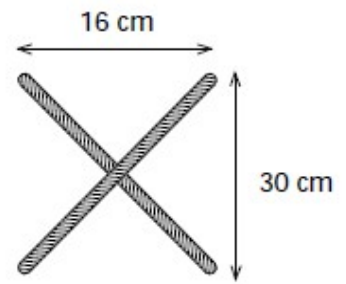
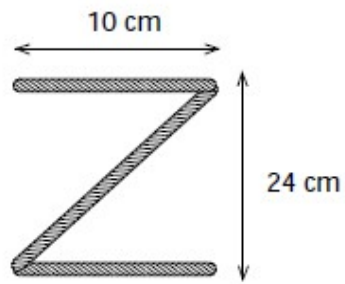
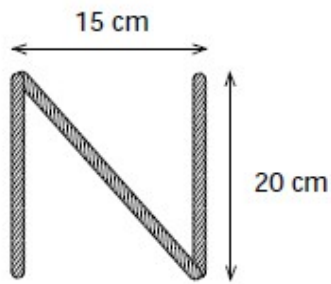


1. En un triangle rectangle, els catets mesuren $b = 20$ cm i $c = 15$ cm. Calcula la longitud de la hipotenusa.
2. En un triangle rectangle, la hipotenusa mesura 35 cm i un dels catets 28 cm. Calcula la longitud de l'altre catet.
3. Calcula la hipotenusa a o els catets b , c de cada apartat:
 - a) $a = 15$ cm, $b = 12$ cm.
 - b) $b = 32$ cm, $c = 24$ cm.
 - c) $a = 169$ cm, $b = 65$ cm.
 - d) $a = 289$ cm, $c = 255$ cm
4. Troba la distància que hi ha des d'un vèrtex a la diagonal oposada d'un rectangle que té costats 192 i 144 cm, respectivament.
5. Calcula les mesures dels costats d'un rombe les diagonals del qual mesuren 219 i 292 cm respectivament.
6. Troba l'àrea i el perímetre d'un rombe que té unes diagonals de longitud 24 i 10 cm , respectivament.
7. La base d'un triangle isòsceles mesura 32 cm i la seva altura respecte d'aquesta base, 38,4 cm. Troba l'àrea i el seu perímetre.
8. Troba la diagonal d'un quadrat de 12 cm de costat.
9. Troba el costat d'un quadrat que té una diagonal de 236 mm.
10. Troba l'altura d'un triangle equilàter de costat 24 cm.
11. Els costats d'un rectangle mesuren 21 i 28 cm , respectivament. Calcula la diagonal.
12. Quant mesura l'apotema d'un hexàgon regular de 8 m de costat?

(Extret de

http://www.toomates.net/Llistes/geometria/triangles/teorema_de_pitagores1.doc)

13. Calcula els centímetres de corda que calen per formar les lletres N, Z i X.



SOLUCIONS: Activitats Teorema de Pitàgores

1. 25 cm

2. 21 cm

3. a) 9 cm b) 40cm c) 156 cm d) 136 cm

4. 115.2

5. 182,5 cm

6. àrea = 120 cm^2 perímetre = 52 cm

7. àrea = 614,4 cm perímetre = 115,2 cm

8. 16,97 cm

9. 16,69 cm

10. 20,8 cm

11. 35 cm

12. 6,93 cm

13. N: 65 Z:46 X:68

Teorema de l'altura i dels catets (I)

- **TEOREMA DE L'ALTURA:**

en un triangle rectangle, el quadrat de l'altura relativa a la hipotenusa és igual al producte de les projeccions dels catets sobre la hipotenusa

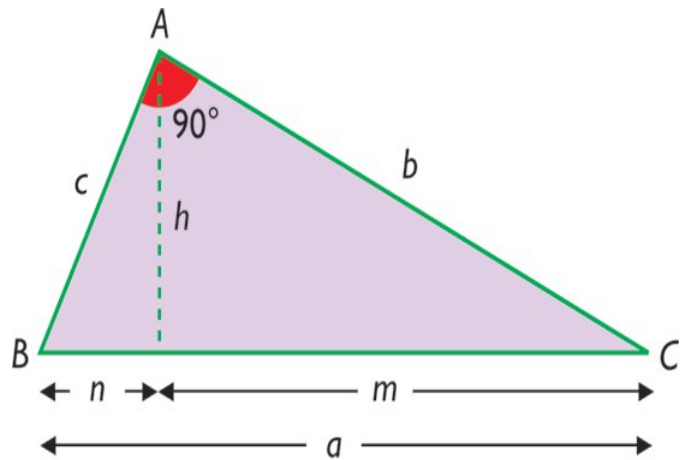
$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad \boxed{h^2 = m \cdot n}$$

- **TEOREMA DELS CATETS:**

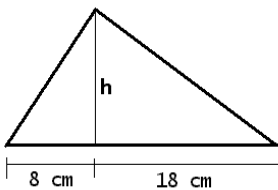
en un triangle rectangle, el quadrat de cada catet és igual al producte de la hipotenusa i la seva projecció sobre ella

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \quad \boxed{b^2 = a \cdot m}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \quad \boxed{c^2 = a \cdot n}$$

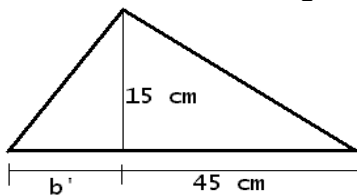


1. Troba h en la figura següent:



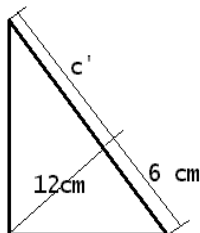
Solució: (12)

2. Troba b' en la figura següent:

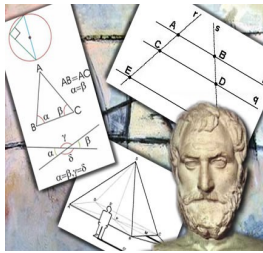


Solució: (5)

3. Troba c' en la figura següent:



Solució: (24)

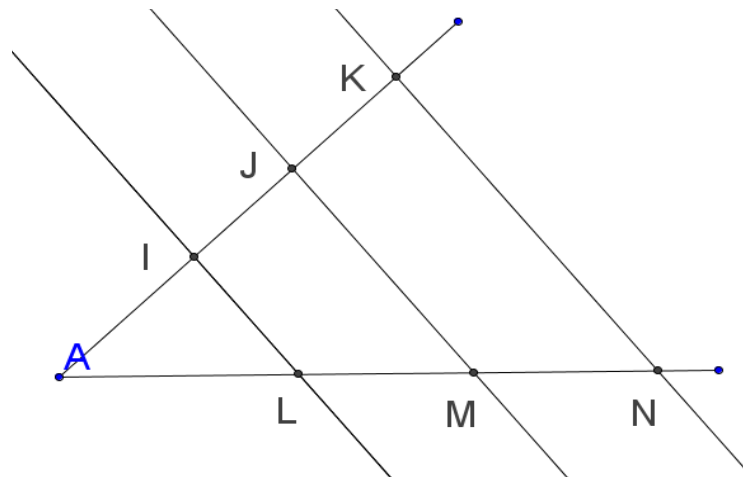


4. Teorema de Tales

$$\frac{IJ}{LM} = \frac{JK}{MN}$$

O

$$\frac{IJ}{JK} = \frac{LM}{MN}$$



“Les rectes paral·leles traçades sobre dues rectes secants determinen segments proporcionals”.

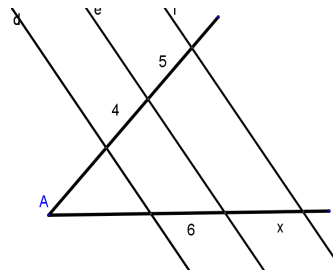
Exemple:

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$$

$$4x = 5 \cdot 6$$

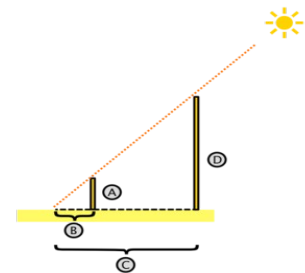
$$4x = 30$$

$$x = 30/4 = 7,5$$



Aplicació:

Si coneixem la longitud d'un bastó (A) i de la seva ombra (B) i, coneixem la longitud de l'ombra d'una muntanya (C), podem determinar la seva alçada:

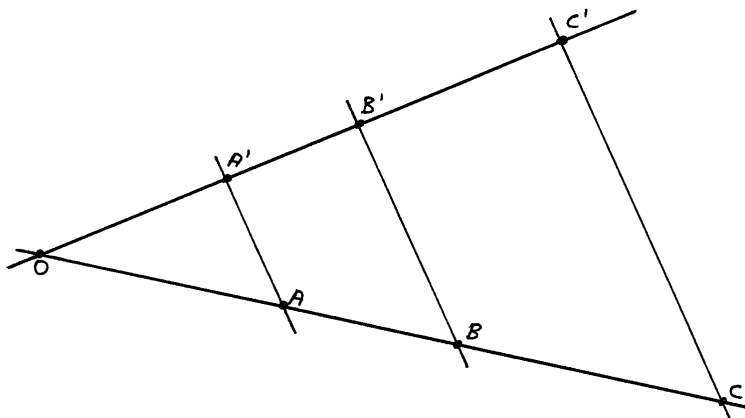


Activitats: Teorema de Tales (I)



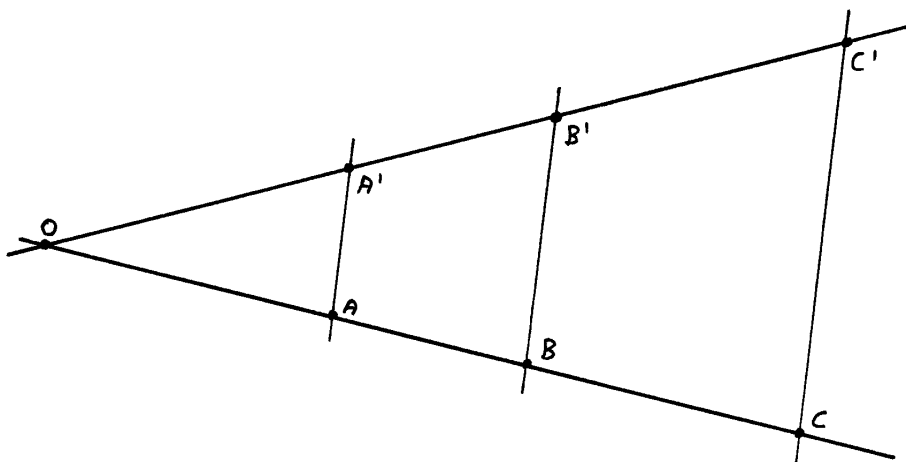
Determina (sense fer servir el regle) la longitud dels segments indicats, mitjançant el teorema de Tales.

a)



$OA = 4,2$ cm, $AB = 3$ cm, $OA' = 3,4$ cm, $OC = 11,9$ cm.
 $A'B' = ?$, $OC' = ?$

b)

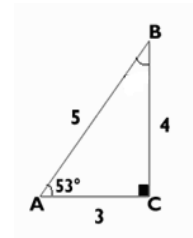


$OB = 7,8$ cm, $OC = 12,3$ cm, $OB' = 8,3$ cm, $B'C' = 4,7$ cm, $OA = 4,7$ cm.
 $OC' = ?$, $BC = ?$, $OA' = ?$

Extret de : http://www.toomates.net/Llistes/geometria/proporcionalitat_geometrica/teorema_tales_1.doc

5. Raons trigonomètriques

La trigonometria estudia la relació entre els angles i els costats dels triangles. S'observa que hi ha unes relacions que són comunes a tots els triangles que comparteixen un valor d'angle determinat. És a dir, el valor de les raons trigonomètriques no depèn de la longitud dels costats del triangle sinó de l'angle

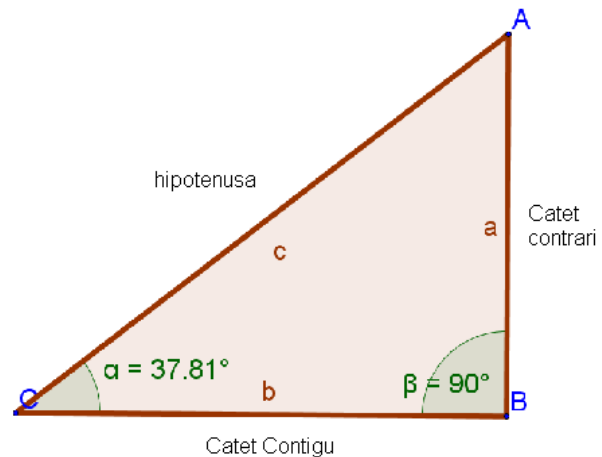


Les raons trigonomètriques d'un angle agut són:

$$\text{Sin} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Catet}_{\text{contrari}}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Cos} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Catet}_{\text{contigu}}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tga} = \frac{a}{b} = \frac{\text{Catet}_{\text{contrari}}}{\text{Catet}_{\text{contigu}}}$$



Exemple 1:

Suposem que:

$$a = 7$$

$$a = 30^\circ$$

Quant mesura c?

$$\text{Sin } a = a/c$$

$$\text{Sin } 30^\circ = 7/c$$

$$0,5 = 7/c$$

$$0,5c = 7$$

$$c = 7/0,5 = 14$$

Exemple 2:

Suposem que:

$$a = 5$$

$$c = 10$$

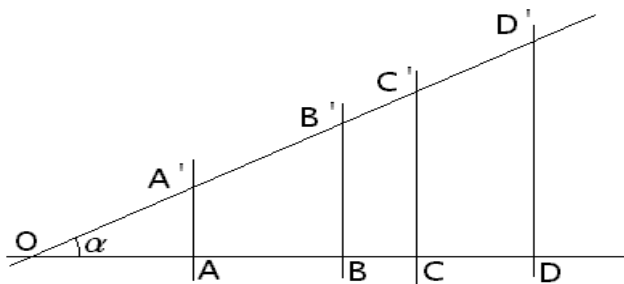
Quant val l'angle a ?

$$\text{Sin } a = 5/10 = 0,5$$

$$a = \text{Sin}^{-1}(0,5) = 30$$

Concepte de raó trigonomètrica (I)

1. Justificació pràctica de la definició del sinus:



Verifica la següent propietat:

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'} = \frac{DD'}{OD'}$$

A aquesta raó, que només depèn de l'angle que formen les dues rectes (és una aplicació del teorema de Tales), s'anomenarà **sinus de l'angle**: $\sin(\alpha)$

2. Justificació pràctica de la definició de cosinus:

Amb el dibuix de l'exercici anterior, verifica la següent propietat:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'}$$

A aquesta raó, que com pots comprovar, depèn només de l'angle que formen les dues rectes, s'anomenarà **cosinus de l'angle**: $\cos(\alpha)$

3. Justificació pràctica de la definició de tangent:

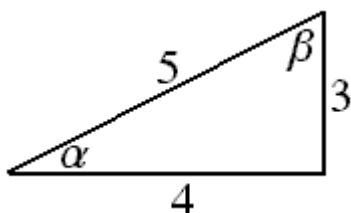
$$\frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC} = \frac{DD'}{OD}$$

A aquesta raó, que només depèn de l'angle que formen les dues rectes, s'anomenarà **tangent de l'angle**: $\tan(\alpha)$

Activitats: Càlcul i mesura de raons trigonomètriques (I)



1. Fixa't en els angles i completa les raons trigonomètriques:



$$\sin(\alpha) =$$

$$\cos(\alpha) =$$

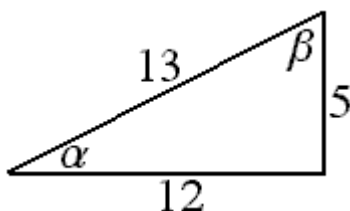
$$\tan(\alpha) =$$

$$\sin(\beta) =$$

$$\cos(\beta) =$$

$$\tan(\beta) =$$

2. Fixa't en els angles i completa les raons trigonomètriques:



$$\sin(\alpha) =$$

$$\cos(\alpha) =$$

$$\tan(\alpha) =$$

$$\sin(\beta) =$$

$$\cos(\beta) =$$

$$\tan(\beta) =$$

3. Les mesures dels catets d'un triangle rectangle són 3,6 cm i 2,7 cm. Dibuixa el triangle i calcula el valor del sinus de cadascun dels angles aguts. Calcula també el valor d'aquests angles.

4. La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 5,3 cm i un dels seus catets, 4,5 cm. Dibuixa el triangle i calcula el valor dels cosinus dels seus angles aguts. Calcula també el valor d'aquests angles.

5. Dissenya un esglaó que sigui còmode per a una escala que substitueix una rampa de 30° .

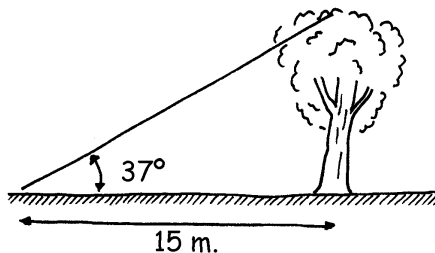
Extret de:

http://www.toomates.net/Llistes/geometria/trigonometria/calcul_i_mesura_de_raons_trigonometriques1.doc

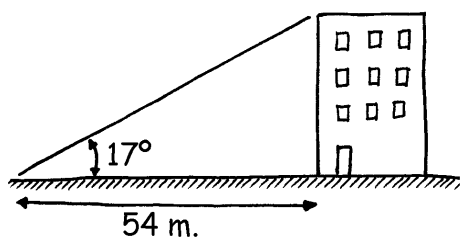
Activitats: Aplicacions de la trigonometria (I)



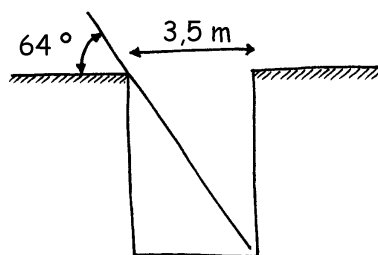
1. Quina serà l'altura d'un arbre que forma un angle de 37° des d'una distància de 15m?



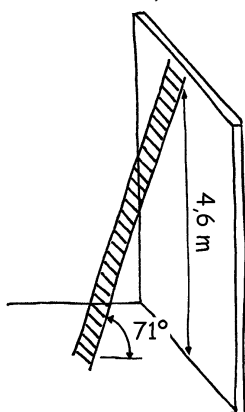
2. Quina serà l'altura d'un edifici si veiem el seu extrem superior amb un angle de 17° des d'una distància de 54 m?



3. Calcula la profunditat del pou de la figura:



4. Quina és la longitud d'una escala quan l'extrem que recolza en la pared arriba a una altura de 4,6 m i forma un angle de 71° ?



Solucions:

- 1) $\approx 11,30$ m.
- 2) $\approx 16,51$ m.
- 3) $\approx 7,18$ m.
- 4) $\approx 4,87$ m.

Extret de:

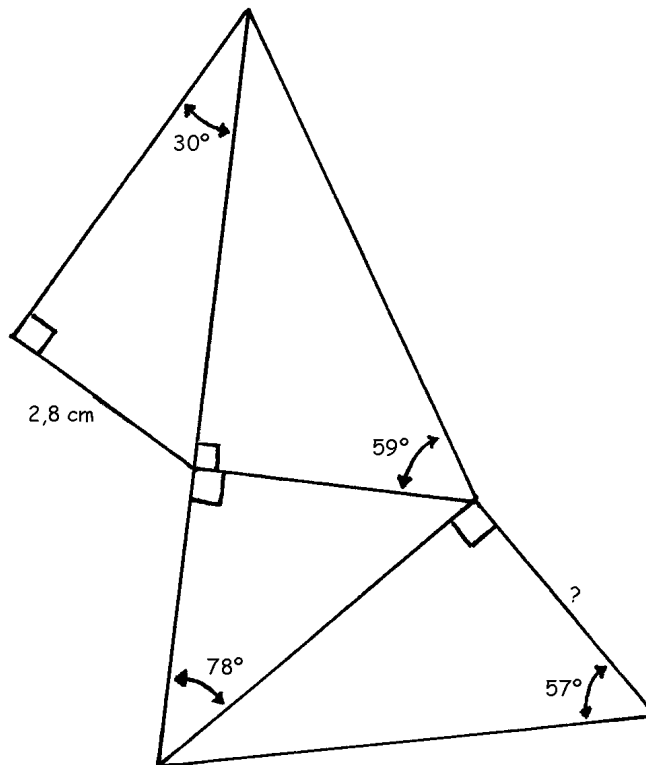
http://www.toomates.net/Llistes/geometria/trigonometria/aplicacions_trigonometria_1.doc

Activitats: Resolució de triangles encadenats (I)

Calcula la distància marcada amb l'interrogant:

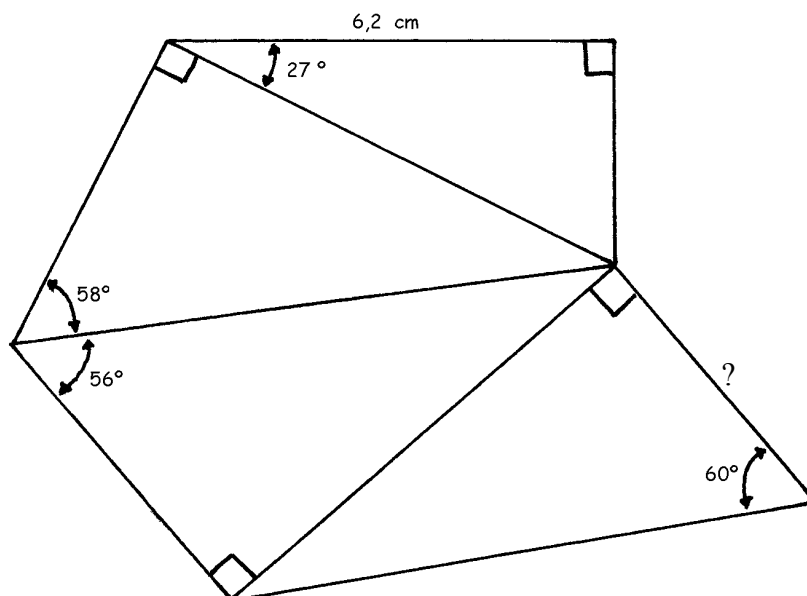


a)



Solució: 2,23

b)



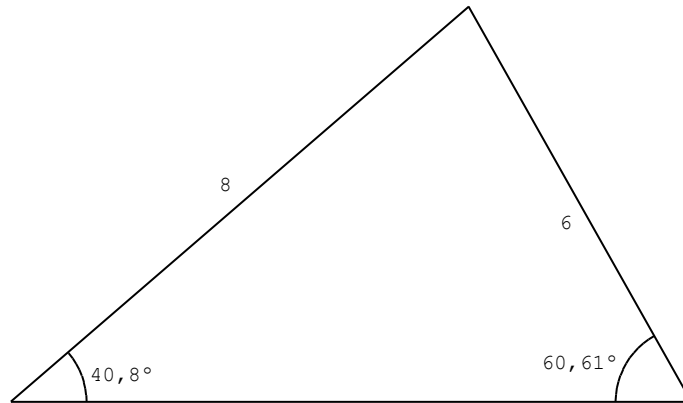
Solució: 3,93

Activitats: Resolució de triangles no rectangles mitjançant trigonometria

Els següents triangles estan dibuixats a escala 1:1 (les unitats són centímetres);
Determina mitjançant trigonometria la longitud dels costats, i comprova després que els
valors trobats són certs mesurant amb el regle.

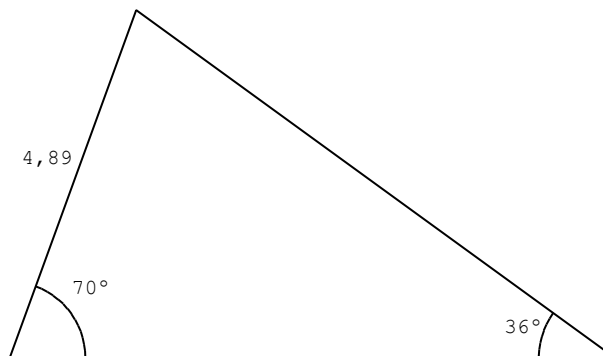


a)



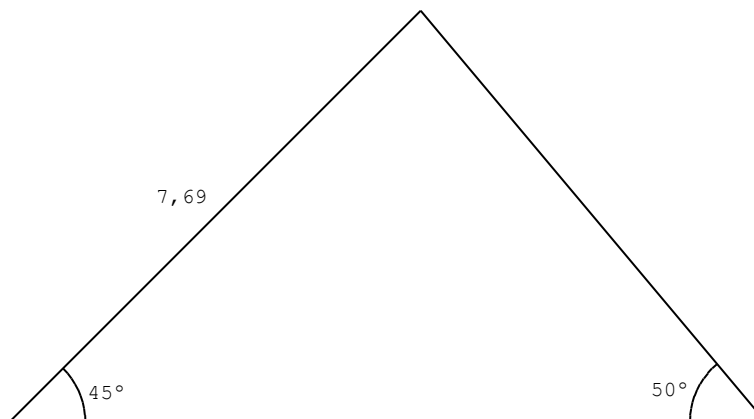
Solució: 9

b)



Solució: 7,83 i 7,99

c)

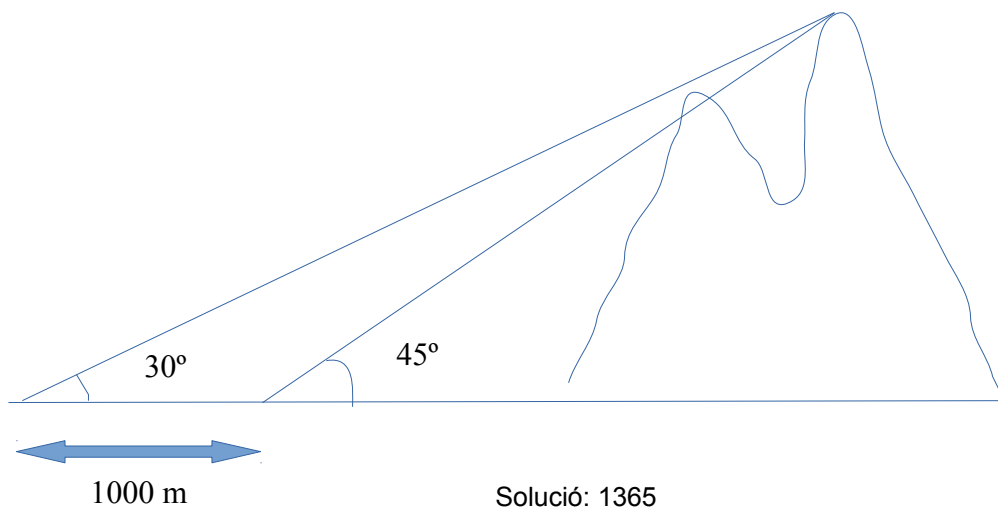


Solució: 7,1 i 10

Extret de: http://www.toomates.net/Llistes/geometria/trigonometria/resolucio_triangles_no_rectangles_trigonometria.doc

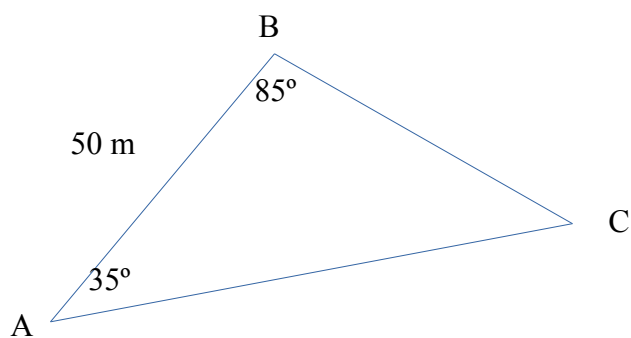
Exercicis més complicats

1) Troba l'altura de la muntanya:



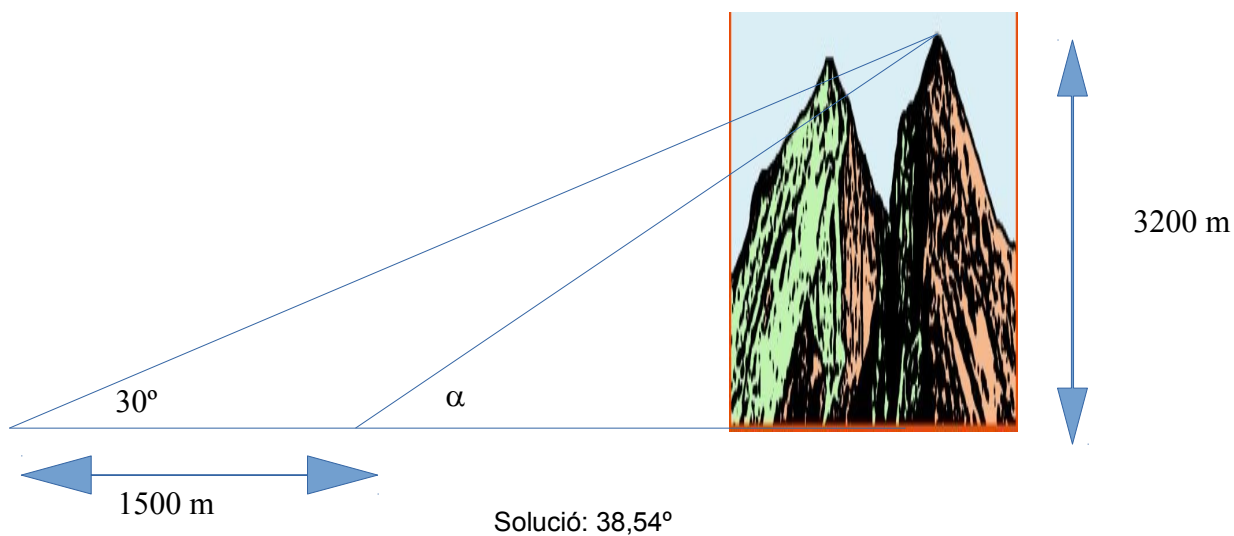
Solució: 1365

2) Troba la distància entre A i C



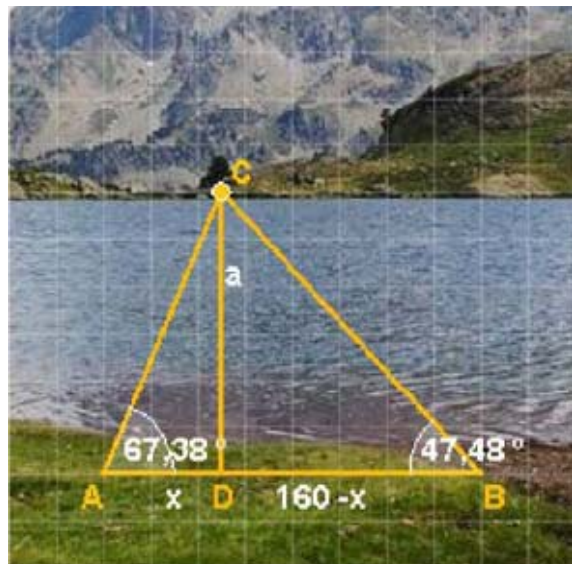
Solució: 57,5

3) Troba l'angle a



Solució: 38,54°

4) Per mesurar l'amplada d'un riu s'han pres les mides de la figura; des de dos punts d'una vora distants 160m. Quina amplada té el riu?
(Solució: 120m)



5) L'angle d'elevació del punt més alt d'una torre és de 22° respecte de l'horitzontal. Avancem 12 metres cap a la torre i tornem a mesurar. L'angle és ara de 45° . Troba l'altura de la torre.
(Solució: 8,13 m)



6) Calcula el costat i l'apotema d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de 5cm de radi.
(Solució: Apotema: 4,05 Costat: 5,88)

