Regla de Ruffini

De Viquipèdia

(S'ha redirigit des de: Mètode de Ruffini)

Dreceres ràpides: navegació, cerca

En matemàtiques, el **El mètode de Ruffini** anomenat també la **Regla de Ruffini** (descrita per l'italià Paolo Ruffini el 1908) permet dividir un polinomi entre un binomi de la forma ($x - r$) (sent r un número real). També permet verificar si un nombre r és arrel d'un polinomi i factoritzar-lo en binomis de la forma (x - r) (sent r un número real).

Algorisme

El mètode serveix per a dividir un polinomi del tipus:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

entre binomi

$$Q(x) = x - r$$

per a obtenir el polinomi quocient

$$R(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 + b_0$$

i el residu s.

Per a dividir $P(x)$ entre $Q(x)$:

1. S'agafen els coeficients de $P(x)$ i s'escriuen ordenats. Llavors s'escriu r a la cantonada de davall a l'esquerra, tot just damunt la línia:

```
    |     a_n     a_n-1      ...      a_1      a_0
    |
  r |
----|----------------------------------------------------------
    |
    |
```

2. Es copia el coefient de més a l'esquerra (a_n) a baix de tot, Tot just davall de la ratlla:

```
    |     a_n     a_n-1      ...      a_1      a_0
    |
  r |
----|----------------------------------------------------------
    |   a_n
    |
    | = b_n-1
    |
```

3. Dels nombres que hi ha davall de la ratlla, s'agafa el que queda més a la dreta i es multiplica per *r* el resultat s'escriu al damund de la ratlla una posició més a la dreta:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
r & & b_{n-1}r & & & \\
\hline
 & a_n & & & & \\
 & = b_{n-1} & & & &
\end{array}
$$

4. Se sumen els dos valors que es troben a la mateixa columna

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
r & & b_{n-1}r & & & \\
\hline
 & a_n & a_{n-1}+(b_{n-1}r) & & & \\
 & = b_{n-1} & = b_{n-2} & & &
\end{array}
$$

5. Es repeteixen els passos 3 i 4 fins que s'acabin els nombres

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\
r & & b_{n-1}r & \cdots & b_1r & b_0r \\
\hline
 & a_n & a_{n-1}+(b_{n-1}r) & \cdots & a_1+b_1r & a_0+b_0r \\
 & = b_{n-1} & = b_{n-2} & \cdots & = b_0 & = s
\end{array}
$$

els valors *b* són els coeficients del polinomi resultat ($R(x)$) , El grau del polinomi resultat serà un menys que el de $P(x)$. *s* Serà el residu.

Aplicacions del mètode

El mètode de Ruffini té moltes aplicacions pràctiques; La majoria es basen en la simple divisió (tal com s'ha explicat abans) o les extensions que s'expliquen tot seguit.

Divisió d'un polinomi entre $x - r$

Tot seguit es dona un exemple de la divisió de polinomis, tal com s'ha desrit abans.

Sia

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 4 \\
Q(x) &= x + 1
\end{aligned}
$$

Es vol dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ emprant el mètode de Ruffini. El principal problema és que $Q(x)$ no sembla que sigui un binomi de la forma $x - r$, sinó de la forma $x + r$. Cal reescriure $Q(x)$ així:

$$Q(x) = x + 1 = x - (-1)$$

Ara s'aplica l'algorisme:

1. S'escriuen els coeficients i *r*. Fixeu-vos que, com que *P*(*x*) no té cap coeficient per *x*, s'ha escrit un 0:

```
    |      2      3      0      -4
    |
 -1 |
----|----------------------------
    |
    |
```

2. Es baixa el primer coeficient:

```
    |      2      3      0      -4
    |
 -1 |
----|----------------------------
    |      2
    |
```

3. Es multiplica l'últim valor obtingut per *r*:

```
    |      2      3      0      -4
    |
 -1 |            -2
----|----------------------------
    |      2
    |
```

4. Se sumen els valors:

```
    |      2      3      0      -4
    |
 -1 |            -2
----|----------------------------
    |      2      1
    |
```

5. Es repeteixen els passos 3 i 4 fins al final:

```
    |      2      3      0      -4
    |
 -1 |            -2     -1       1
----|----------------------------
    |      2      1     -1      -3
    |{coeficients resultat}{residu}
```

Així, si *nombre original* = *divisor*×*quocient*+*residu*, llavors

$P(x) = Q(x)R(x) + s$, on

$R(x) = 2x^2 + x - 1$ i $s = -3$.

Trobar les arrels d'un polinomi

El teorema de les arrels racionals diu que per a un polinomi $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ per al que tots els seus coeficients (a_n fins a a_0) són enters, les arrels són sempre nombres racionals de la forma p/q, on p es un nombre sencer divisor de a_0 i q és un nobre enter divisor de a_n. Així si el polinomi a dividir és

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0,$$

llavors les arrels racionals posibles són tots els enters divisors de a_0 (−2):

$$\text{Arrels possibles:} \{+1, -1, +2, -2\}$$

(Aquest exemple és senzill perquè el polinomi és mònic (es a dir $a_n = 1$); per a polinomis no mònics el conjunt d'arrels posibles inclourà algunes fraccions, però només un nombre finit donat que a_n i a_0 només tenen un nombre finit de divisors enters cadascun.) En qualsevol cas, per a polinomics mònics, cada arrel racional és un nombre enter, així dons cada arrels entera és precisament un divisor del terme constant. Es pot demostrer que això també és veritat per a polinomis no mònics, es a dir *per a trobar les arrels enteres de qualsevol polinomi amb queficients enters, n'hi ha prou amb provar els divisors del terme constant*.

Així doncs, fent r igual a cada una d'aquestes posibles arrels, es prova de dividir el polinomi entre $(x - r)$. Si el residu del resultat és zero, s'ha trobat una arrel.

Es pot triar qualsevol dels seguents dos mètodes: Tots dos porten al mateix resultat, amb la excepció feta de què només els segon mètode permet de descobrir si una arrel donada és múltiple. (Recordeu que cap dels dos mètodes permetrà descobrir arrels irracionals o complexes.)

Mètode 1

Es prova de dividir $P(x)$ entre el binomi (x − cada una de les possibles arrels). Si el residu és 0, el nombre triat és una arrel (i vice versa):

```
    |    +1     +2     -1      -2
    |
 +1 |           +1     +3      +2
----|----------------------------
    |    +1     +3     +2       0

    |    +1     +2     -1      -2
    |
 +2 |           +2     +8     +14
----|----------------------------
    |    +1     +4     +7     +12
```

```
    |    +1     +2     -1     -2
    |
 -1 |           -1     -1     +2
----|---------------------------
    |    +1     +1     -2      0

    |    +1     +2     -1     -2
    |
 -2 |           -2      0     +2
----|---------------------------
    |    +1      0     -1      0
```

$$x_1 = +1$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = -2$$

Mètode 2

Es comença igual que al mètode 1 fins que es troba una arrel vàlida. Llavors, per comptes de recomençar el procés amb les altres arrels possibles, es continuen provant les arrels possibles en front del resultat de dividir entre la arrel vàlida que s'ha trobat, això es repeteix fins que només queda un coeficient (recordeu que les arrels poden estar repetides: si una arrel posible ho és no s'ha de descartar sinó que cal tornar-la a provar i només descartar-la quant el residu sigui diferent de zero):

```
    |     +1     +2     -1     -2
    |
 -1 |            -1     -1     +2
----|---------------------------
    |     +1     +1     -2    | 0
    |
 +2 |            +2     +6
-------------------------
    |     +1     +3    |+4
```

```
    |     +1     +2     -1     -2
    |
 -1 |            -1     -1     +2
----|---------------------------
    |     +1     +1     -2    | 0
    |
 +1 |            +1     +2
-------------------------
    |     +1     +2    | 0
    |
 -2 |            -2
--------------------
    |     +1    | 0
```

$$x_1 = +1$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = -2$$

Factorització de polinomis

Un cop s'han trobat les arrels d'un polinomi emprant algún dels mètodes que s'han explicat abans (o, de fet, per qualsevol altre mètode) és una qüestió trivial de [factoritzar] el polinomi emprant aquestes arrels. És ben conegut que a cada factor lineal (x-r) que divideix a un polinomi donat li correspon una arrel r, i *vice versa*.

Així dons si

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ és el polinomi a factoritzar; i
$R = \{x \in \mathbb{Q} : P(x) = 0\}$ són les arrels que s'han trobat, llavors el producte
$R(x) = a_n \prod (x - r) \ \forall\, r \in R$.

Pel teorema fonamental de l'àlgebra, R(x) ha de ser igual a P(x), si totes les arrels de P(x) són racionals. Ara bé com que s'ha emprat un mètode que només troba arrels racionals, és molt probable que R(x) no sigui igual a P(x); és molt probable que P(x) tingui algunes arrels iracionals o complexes. Així es considera

$S(x) = \dfrac{P(x)}{R(x)}$, el qual es pot calcular dividint els polinomis.

Si S(x)=1, llavors es coneix R(x)=P(x) i ja està. Sinó, S(x) mateix és un polinomi; aquest és un altre factor de P(x) que no té arrels racionals. Així es pot desenvolupar completament el cantó dret de la següent equació:

$$P(x) = R(x) * S(x)$$

D'axiò se'n diu una *factorització completa* de P(x) sobre **Q** (els racionals) si S(x) = 1. Sinó, només es té una *factorització parcial* de P(x) sobre **Q**, la qual no es pot factoritzar més sobre els racionals; però pot ser que es pugui factoritzar més sobre els reals i si mes no sempre es podrà acabar de factoritzar sobre els complexos. (Nota: s'entén per factorització competa sobre **Q**, la factorització en polinomis amb coeficients racionals, tal que cada factor és irreductible sobre **Q**, on "irreductible sobre **Q**" vol dir que el factor no es pot escriure com el producte de dos polinomis no constants amb coeficients racionals de grau més petit.)

Exemple 1: sense residu

Sia

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Emprant els mètodes descrits abans, les arrels racionals de *P*(*x*) són:

$$R = \{+1, -1, -2\}$$

Llavors, el producte de (*x* − each root) és

$$R(x) = 1(x-1)(x+1)(x+2)$$

I *P*(*x*)/*Q*(*x*):

$$S(x) = 1$$

Així el polinomi factoritzat és *P*(*x*) = *R*(*x*) * 1 = *R*(*x*):

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

Exemple 2: amb residu

Sia

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 8$$

Emprant els mètodes descrits abans, les arrels racionals de *P*(*x*) són:

$$R = \{-1, +2\}$$

Llavors, els productes de (*x* − cada arrel) és

$$R(x) = 2(x+1)(x-2)$$

I *P*(*x*)/*Q*(*x*)

$$S(x) = 2x^2 - x + 4$$

Com que $S(x) \neq 1$, el polinomi factoritzat és *P*(*x*) = *R*(*x*) * *S*(*x*):

$$P(x) = (x+1)(x-2)(2x^2 - x + 4)$$