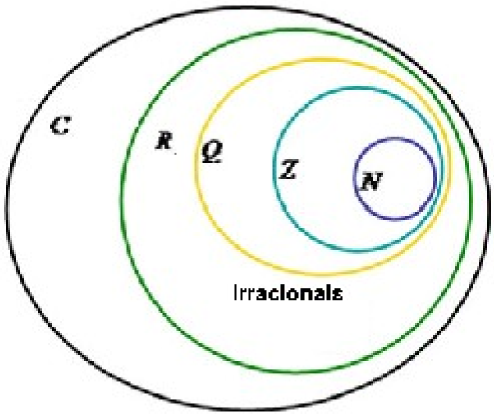
UNITAT 1: ARITMÈTICA

1. Els conjunts numèrics



- **Naturals:** 1, 2, 3, ...
- **Enters:** ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- **Racionals:** ...½, 1/3, ¼, ...
- **Irracionals:** e, pi, $\sqrt{2}$

Exercici. Classifica els següents nombres:

a) $\frac{-3}{2}$ b) -3 c) 5,8 d) -0,87999

Exercici. Digues si és cert o fals i escriu per què:

a) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ $4{,}050050005\ldots \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$

2. Propietats de les operacions amb nombres enters

2.1 La suma

- Propietat commutativa: $\boxed{A + B = B + A}$

Exemple: $2 + (-3) = -1$
$(-3) + 2 = -1$

- Propietat associativa: $\boxed{A + (B + C) = (A + B) + C}$

Exemple: $4 + [5 + (-2)] = 4 + 3 = 7$
$(4 + 5) + (-2) = 9 + (-2) = 7$

- Element neutre: $\boxed{A + 0 = A}$

- Oposat d'un enter: $\boxed{A + (-A) = 0}$ Exemple: $3 + (-3) = 0$

2.2 Resta de nombres enters

Podem pensar en la resta com una suma si canviem el minuend pel seu oposat:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Exemple: $4-6=4+(-6)=-2$

2.3 Multiplicació de nombres enters

- El signe

	+	-
+	+	-
-	-	+

Exemples: $3\cdot 5=15$
$4\cdot(-2)=-8$
$(-2)\cdot(-5)=10$

- Propietat commutativa: $\boxed{A \cdot B = B \cdot A}$

- Propietat associativa: $\boxed{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C}$

- Element neutre: $\boxed{A \cdot 1 = A}$

- Propietat distributiva: $\boxed{A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)}$

Exemple: $2\cdot[3+(-4)]=(2\cdot 3)+[2\cdot(-4)]=6+(-8)=-2$
$2\cdot[3+(-4)]=2\cdot[-1]=-2$

2.4 La divisió exacta

La divisió de dos enters no sempre dóna un enter.

2.5 Operacions combinades

Taula de prioritats

1	[...] (...)
2	$x^y, \sqrt[y]{x}$
3	· , :
4	+, -

Si dues operacions tenen la mateixa prioritat cal operar d'esquerra a dreta

Exemples:

1) $5+3\cdot(-2)-1$

$$5+3\cdot(-2)-1=5+(-6)-1=-1-1=-2$$

2) $5\cdot(6+4)-5\cdot\frac{4}{2}$

$$5\cdot(6+4)-5\cdot\frac{4}{2}=5\cdot10-5\cdot\frac{4}{2}=50-5\cdot\frac{4}{2}=50-\frac{20}{2}=50-10=40$$

Activitats

1. Resol aquestes operacions:

a) $59-8-19-7-6$

b) $5+7+12+6+12$

c) $432:2:3:6:2$

2. Resol aquestes operacions:

a) 4+3·6 - 2·7

b) 4·3 + 2·5 - 2

c) 5·9 - 2 - 4:2

d) 2+5·6:2 - 4·3

3. Resol aquestes operacions:

a) [(24:2):12]·6

b) 646:[4·(13:3)]

4. Resol aquestes operacions:

a) 5·(5+5) - 2 - (3+5)

b) (6+3)·2 - 8:4

c) 22 - (5+3)·2+(4-1)

d) 25 - [13 - (6+3)] + 4·5

e) 14·(25 - 3) + 3·6

f) 6·(17+4) - 15·2 - (7 - 3)

g) 3·(5+12) + 4 – 15:3

h) 112·(15 - 8) + 27:(9-6)

5. Resol aquestes operacions:

a) 13 - 5 + {8 - 3·2 + [14 - (2+3)]}

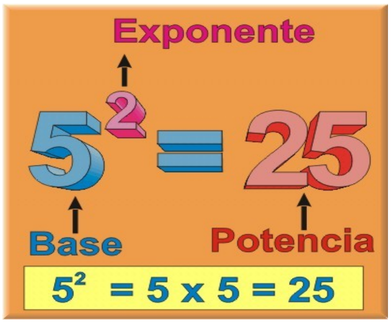
b) 5 - 14+2·3 - {11 - 5 + 15 - 2·14:7)}

c) (5+2) + 3 - (8 - 4):2

d) 100:(2 + 8) + (8 - 6) ·3

(Extret de http://www.toomates.net/#Aritmetica)

2.6 Potències de nombres enters



5 és la base

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

3 és l'exponent

exemples:

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

$$(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = (-216)$$

$$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$$

- **POTÈNCIES AMB EXPONENT POSITIU (a^b):**

• Si la base és +, la potència sempre serà +	Ex: $5^2 = 25$
• Si la base és -, i l'exponent és parell, la potència serà +	Ex: $(-3)^4 = 81$
• Si la base és -, i l'exponent és senar, la potència serà -	Ex: $(-3)^3 = -27$
• Si la base és 0, la potència sempre val 0.	Ex: $0^8 = 0$
• Si l'exponent és 0, la potència sempre val 1.	Ex: $a^0 = 1$

- **POTÈNCIES AMB EXPONENT NEGATIU** (a^{-b}):

Transformem potències d'exponent negatiu en potències d'exponent positiu així:

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

2.7 Operacions amb potències

SUMA i RESTA Desenvolupem les potències i operem	Ex: $5^2 + 4^3 = 25 + 64 = 89$
PRODUCTE • Potències amb la mateixa base: $\mathbf{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ • Potències amb el mateix exponent: $\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ • Potències amb diferent base i exponent: desenvolupem les potències i operem	Ex: $(-2)^3 \cdot (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10} = 1024$ Ex: $5^{-2} \cdot (-8)^{-2} = (5 \cdot (-8))^{-2} = (-40)^{-2} = 1/(-40)^2 = 1/1600$ Ex: $1^3 \cdot (-6)^2 = 1 \cdot 36 = 36$
QUOCIENT • Potències amb la mateixa base: $\mathbf{a^n : a^m = a^{n-m}}$ • Potències amb el mateix exponent: $\mathbf{a^n : b^n = (a : b)^n}$ • Potències amb diferent base i exponent: desenvolupem les potències i operem	Ex: $\frac{2^9}{2^6} = 2^{(9-6)} = 2^3 = 8$ Ex: $\frac{5^3}{(-2)^3} = \left(\frac{5}{-2}\right)^3 = -\frac{5}{2}^3$ Ex: $\frac{0^4}{(-6)^2} = \frac{0}{36} = 0$
POTÈNCIA D'UNA POTÈNCIA $\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$	Ex: $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6 =$ $(4^3)^{-4} = 4^{3 \cdot (-4)} = 4^{-12} = 1/4^{12}$
POTÈNCIES DE FRACCIONS $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$	Ex : $\left(\frac{7}{2}\right)^3 = \left(\frac{7^3}{2^3}\right) = \frac{343}{8}$ $\left(\frac{7}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2^3}{7^3}\right) = \frac{8}{343}$

Activitats

1. Simplifica:

a) $5^2 \cdot 5^3$

b) $6^3 \cdot 6^4$

c) $3^5 \cdot 3^7$

d) $2^5 \cdot 2^7$

e) $4^6 \cdot 4^7$

f) $9^8 \cdot 9^6$

g) $5^7 : 5^3$

h) $5^4 : 5^3$

i) $6^7 : 6^3$

j) $3^4 \cdot 3^6$

2. Simplifica:

a) $9^6 \cdot 9^3$

b) $5^8 : 5^3$

c) $8^7 : 8^4$

d) $6^9 : 6^6$

e) 5^0

f) 5^1

g) 6^0

h) 6^1

i) $5^2 \cdot 5^5$

j) $6^3 \cdot 6^{11}$

3. Simplifica:

a) $3^0 \cdot 3^7$

b) $2^5 \cdot 2^{22}$

c) $4^9 \cdot 4^7$

d) $9^8 \cdot 9^{14}$

e) $5^{10} : 5^3$

f) $5^{13} : 5^3$

g) $6^{21} : 6^3$

h) $3^{55} \cdot 3^6$

i) $9^{12} \cdot 9^3$

j) $5^{18} : 5^3$

k) $8^{33} : 8^4$

l) $6^{17} : 6^6$

4. Simplifica:

a) $6^5 \cdot 6^4 =$

b) $7^2 \cdot 7^5 =$

c) $8^3 \cdot 8^4 =$

d) $9^2 \cdot 9^5 =$

e) $7^2 : 7^5 =$

f) $6^4 : 6^3 =$

g) $4^5 : 4^4 =$

h) $5^0 : 5^3 =$

i) $(8^2)^3 =$

j) $(9^5)^6 =$

k) $(5^4)^3 =$

l) $(3^2)^5 =$

m) $6^0 =$

n) $9^1 =$

o) $4^0 =$

p) $8^1 =$

5. Expresa en forma d'una única potència:

a) $a^2 \cdot a^3 =$

b) $x^6 : x^4 =$

c) $a^7 : a =$

d) $(b^3)^4 =$

e) $5^6 \cdot 5^9 =$

f) $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2^{15} =$

g) $a^8 \cdot a^6 \cdot a^{10} =$

h) $((x^2)^3)^4 =$

i) $a^{13} : a^6 =$

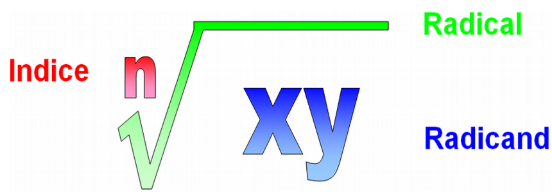
j) $3^5 \cdot 3^6 =$

k) $((2^5)^3)^4 =$

l) $(9^3)^2 =$

(Extret de: http://www.toomates.net/Llistes/aritmetica/potencies/producte_i_divisio_de_potencies1.doc

2.8 Radicació



L’arrel és la inversa de la potència:

$$\sqrt[n]{x} = y \longleftrightarrow x = y^n$$

$$5^2 = 25 \qquad 2^3 = 8$$
$$\sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt[3]{8} = 2$$

Podem expressar un radical com a potència d'exponent fraccionari així:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \longrightarrow \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[2]{4^2} = \sqrt[2]{16} = 4$$

$$\sqrt[2]{4^2} = (4^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{2\cdot\frac{1}{2}} = 4^1 = 4$$

PROPIETATS

- L'arrel parell d'un número positiu sempre té dues solucions

  ex: $\sqrt[2]{4} = 2 \longrightarrow (+2^2)=4 \quad (-2^2)=4$

- No existeix l'arrel parell d'un nombre negatiu

  ex: $\sqrt[2]{(-4)} = \longrightarrow (+2^2) = -4 \quad (-2^2) = -4$

- Sempre existeix l'arrel senar d'un nombre, positiu o negatiu

ex: $\sqrt[3]{8}=2 \longrightarrow 2^3=8$

$\sqrt[3]{(-8)}=-2 \longrightarrow (-2)^3=-8$

- Radicals equivalents són aquells que representen el mateix número

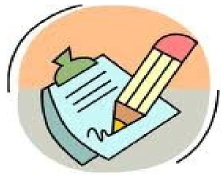
ex: $\sqrt{3}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt[6]{3^3} \longrightarrow \sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}} \quad \sqrt[6]{3^3}=3^{\frac{3}{6}}$

$3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{3}{6}}$

2.9. Operacions amb radicals

$\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}}$	Ex: $\sqrt[3]{4^2}=4^{\frac{2}{3}}$
$(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p}$	Ex: $(\sqrt[2]{5})^4=\sqrt[2]{5^4}$
$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	Ex: $\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	Ex: $\sqrt[3]{\frac{8}{6}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{6}}$
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[n\cdot k\cdot p]{a}$	Ex: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}}=\sqrt[6]{5}$
$(\sqrt[n]{x})^k=\sqrt[n]{x^k}$	Ex: $(\sqrt{16})^6=\sqrt{16^6}=\sqrt{4^{12}}=4^6=4096$

6. Expressa en forma d’una sola potència:



a) $2^{\frac{3}{4}}.2^{\frac{5}{6}} =$ b) $2^{\frac{7}{3}}.2^{\frac{-5}{2}} =$ c) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{-3}{4}}} =$

d) $\left(5^{-2}\right)^{\frac{-3}{4}} =$ e) $\sqrt[3]{10000} =$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}001}} =$

7. Escriu en forma de potència:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\right]^{2}\div\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]^{3}=$$

8. Escriu en forma de potència:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{-2}:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{3}=$$

9. Calcula mentalment aquestes potències i realitza les operacions:

a) $23^{1} =$

b) $(-5)^{0} =$

c) $(-27)^{1} =$

d) $43^{0} =$

e) $1^{26} =$

f) $0^{65} =$

g) $17^{0} + 85^{1} =$

h) $14^{1} - 22^{0} =$

i) $4^{0} - 0^{4} =$

j) $17^{1} + 5^{0} - 0^{5} =$

10. Resol les següents operacions: exemple: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{25}$

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$ c) $\left(\frac{8}{4}\right)^2 =$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 =$ d) $\left(\frac{1}{6}\right)^3 =$

11. Calcula les potències següents:

a) $8^{\frac{2}{3}} =$ b) $(-27)^{\frac{4}{3}}$

c) $59049^{-\frac{1}{10}} =$ d) $\frac{3^2}{9^{\frac{1}{2}}} =$

e) $(-59049)^{\frac{1}{5}} =$ f) $\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{-3}{2}} =$

(Extret de: http://www.toomates.net/Llistes/aritmetica/potencies/calcul_amb_radicals.doc)

Activitats

1. Calcula, sempre que es pugui:

a) $\sqrt[3]{64}$ =

b) $\sqrt[3]{-8} =$

c) $\sqrt[4]{-81} =$

d) $\sqrt[5]{100000} =$

e) $\sqrt[5]{32} =$

f) $\sqrt[4]{16} =$

g) $\sqrt[5]{-32} =$

h) $\sqrt{0{,}36}$ =

i) $\sqrt{0{,}01}$ =

j) $\sqrt[3]{1}$ =

k) $\sqrt[3]{-1}$ =

l) $\sqrt{1}$ =

m) $\sqrt{-1}$ =

n) $\sqrt[3]{27}$ =

2. Completa:

a) $\sqrt[parell]{positiu} = \ldots$

b) $\sqrt[imparell]{positiu} = \ldots$

c) $\sqrt[parell]{negatiu} = \ldots$

d) $\sqrt[imparell]{negatiu} = \ldots$

3. a) Expressa <u>en forma de radical</u> les potències següents:

a) $5^{\frac{3}{4}}$ b) $3^{\frac{1}{2}}$ c) $2^{\frac{5}{2}}$ d) $11^{\frac{2}{5}}$

b) Expressa <u>en forma de potència</u> els radicals següents:

a) $\sqrt[5]{8^3}$ b) $\sqrt[7]{9^2}$ c) $\sqrt{3^5}$ d) $\sqrt{6}$

4. Calcula:

a) $9^{\frac{1}{2}}$ b) $4^{\frac{3}{2}}$ c) $8^{\frac{2}{3}}$

d) $8^{\frac{-2}{3}}$ e) $\left(\dfrac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{\frac{-1}{2}}$

- **SIMPLIFICACIÓ DE RADICALS**

1. Descomponem el radicand en factors primers
2. Dividim l'índex del radical i l'exponent del radicand per un divisor comú.

Ex: $$\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[\frac{12}{2}]{2^{\frac{6}{2}}} = \sqrt[6]{2^3}$$

- **REDUCCIÓ DE RADICALS A ÍNDEX COMÚ**

1. Es calcula el m.c.m. dels índexs dels radicals
2. Multipliquem l'índex de cada radical pel valor corresponent fins obtenir un de comú.

Ex: $\sqrt[3]{2}$ i $\sqrt[4]{5}$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot 4]{2^4} = \sqrt[12]{2^4}$$

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[4\cdot 3]{5^3} = \sqrt[12]{5^3}$$

Per trobar el **mcm** de dos números, en primer lloc els hem de descompondre en productes de factors i després hem de prendre la potència més alta de cada factor.

exemple: mcm(6,8) = $2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

- **EXTRACCIÓ DE FACTORS D'UN RADICAL**

1. Descomponem el radicand en factors primers
2. Si l'exponent d'algun factor del radicand és múltiple de l'índex de l'arrel, es pot extreure el factor fora del radical.

Ex: $$\sqrt[3]{24192} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 3^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 7} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 7} = 12\sqrt[3]{14}$$

$$\sqrt[6]{64x^{12}y^9z} = \sqrt[6]{2^6\, x^{12}\, y^9\, z} = \sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{x^{12}} \cdot \sqrt[6]{y^6} \cdot \sqrt[6]{y^3\, z} = 2x^2\, y \cdot \sqrt[6]{y^3\, z}$$

- **RACIONALITZACIÓ:** consisteix a trobar una fracció equivalent que no tingui radicals al denominador

Ex: $$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \boxed{\frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}}$$

Activitats

1. Completa:

a) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{\ldots}$ b) $\sqrt{7} = \sqrt[16]{\ldots}$ c) $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{\ldots}$ d) $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{\ldots}$

2. Expressa amb un sol radical i simplifica'l, si es pot:

a) $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{5} =$ b) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} =$

c) $\sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2^2} =$ d) $\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[3]{a^4} =$

3. Treu fora del radical tots els factors que puguis:

a) $\sqrt{625} =$

b) $\sqrt{1600} =$

c) $\sqrt{1500} =$

d) $\sqrt[3]{4320} =$

e) $\sqrt[3]{27\mathbf{b}^9} =$

f) $\sqrt[3]{270\mathbf{a}^{13}} =$

4. Redueix a índex comú i ordena de major a menor els següents radicals

$\sqrt[3]{103}$ $\sqrt{22}$

5. Calcula:

a) $3\sqrt{27} + 7\sqrt{48} - 3\sqrt{300} + \sqrt{12} =$

b) $5\sqrt{288} - \sqrt{18} - \sqrt{800} + 3\sqrt{32} =$

c) $3\sqrt[3]{16} + 8\sqrt[3]{686} - 5\sqrt[3]{2} =$

6. Simplifica:

a) $\sqrt{\sqrt[7]{5}} =$

b) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{7}}} =$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{64a^{12}}} =$

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{b^{18}}}} =$

7. Utilitzant les propietats dels radicals efectua les operacions indicades:

a) $\dfrac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{7}}{\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{2}} =$

b) $\dfrac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[3]{7}} =$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[12]{6} =$

d) $\dfrac{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[10]{4}} =$

e) $\dfrac{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[15]{5} \cdot \sqrt[3]{6}} =$

8. Calcula i simplifica al màxim:

a) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}\sqrt{18}}{\sqrt{32}}=$

b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2=$

c) $3\sqrt{8}+2\sqrt{50}-4\sqrt{18}=$

d) $\frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{20}\sqrt{18}}{\sqrt{30}}=$

e) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)^2=$

f) $5\sqrt{27}+3\sqrt{12}-4\sqrt{75}=$

(Activitats extretes de http://www.toomates.net/)

9. Racionalitza:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}=$

b) $\frac{3}{5\sqrt{2}}=$

c) $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}=$

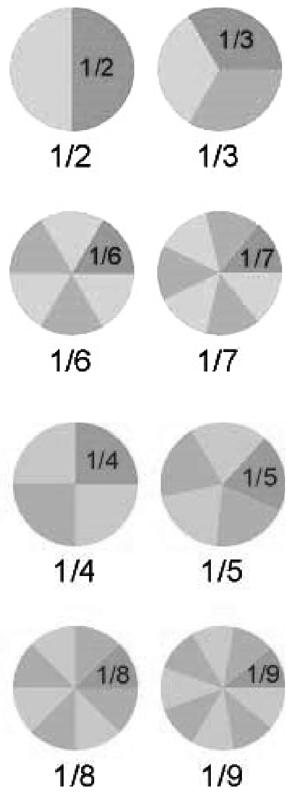
d) $\frac{2\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}}=$

e) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=$

f) $\frac{2\sqrt{3}}{2-3\sqrt{2}}=$

g) $\frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=$

3. Operacions amb nombres racionals



3.1 Suma i/o resta de fraccions

exemple: $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{2+3}{4}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$

Recorda que el denominador d'ambdós sumands
ha de coincidir. Si no coincideix has de trobar el mcm.

3.2 Producte de fraccions

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

exemple: $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 2}=\frac{15}{8}$

3.3 La fracció inversa.

La inversa d'una fracció és aquella que multiplicada per la primera dóna l'element neutre del producte

Exemple: $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 3}=\frac{12}{12}=1$

La fracció inversa de 3/4 és 4/3.

Exercici. Troba la fracció inversa de les següents fraccions.

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{6}{8}$

3.4 La divisió de fraccions

La divisió de fraccions és el producte d’una fracció per la inversa del divident.

exemple: $\frac{2}{4}:\frac{5}{6}=\frac{2}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

3.5 Les potències de fraccions

Recorda d'aplicar les següents propietats:

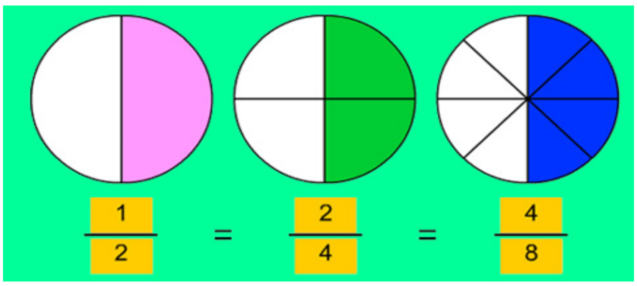
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{7}{2}\right)^3=\left(\frac{7^3}{2^3}\right)=\frac{343}{8}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n} \qquad \left(\frac{7}{2}\right)^{-3}=\left(\frac{2^3}{7^3}\right)=\frac{8}{343}$$

3.6 Arrels de fraccions

Recorda d'aplicar les següents propietats:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$$



Activitats:

1. Fes les següents operacions (obligatori fer factorització dels denominadors. No cal simplificar al final)

a) $\frac{4}{15}+\frac{7}{18}=$

b) $\frac{11}{15}-\frac{4}{35}=$

2. Fes les següents operacions (obligatori simplificar el resultat)

a) $\frac{45}{3}\cdot\frac{2}{50}=$

b) $\frac{6}{5}\div\frac{6}{8}=$

3. Fes les següents operacions combinades (Obligatori fer les operacions en vertical amb claus):

$\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{4}{3}+1=$

4. Realitza les següents sumes o restes i simplifica els resultats:

a) $\frac{14}{15}+\frac{2}{3}=$

b) $\frac{6}{7}+\frac{18}{49}=$

c) $\frac{30}{15}-\frac{7}{5}=$

d) $\frac{10}{27}-\frac{2}{81}=$

e) $\frac{5}{3}-\frac{7}{5}=$

f) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=$

5. Calcula les següents operacions combinades amb fraccions:

a) $\frac{2}{5}-\left(1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}=$

b) $\frac{-3}{5}:\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{6}{25}+\frac{-3}{4}=$

c) $\frac{7}{6}-\left(-\frac{1}{12}+3:\frac{1}{2}\right)=$

d) $\left(-\frac{3}{17}\right)^{0}-\frac{-1}{12}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=$

e) $\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-1}-4\cdot\frac{1}{2}=$

f) $\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{3}:4\right)-\frac{-2}{4}\cdot\frac{1}{3}=$

g) $-\frac{1}{3}:\left(\frac{-2}{-3}-1\right)^{2}=$

h) $-2:\frac{3}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{-2}{8}-(-2)=$

i) $-\left(\frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}}-2:\frac{5}{2}\right)+\frac{2}{3}:\left(\frac{-1}{-4}\right)\cdot\frac{-2}{3}=$

j) $\frac{7}{12}-\left(\frac{8}{6}-2:\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{16}{19}\right)^{0}=$

6. Calculeu i simplifiqueu al màxim:

a) $\left(\frac{3}{8}+1\right)^{2}:\frac{-30}{10}-\frac{5}{2}=$

b) $-4+\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{5}-4:\dfrac{3}{5}\right)^{-2}=$

c) $2+\left(\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{4}{5}\cdot(-2)}{-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}+\dfrac{2}{20}\cdot\dfrac{3}{5}\right)-(-10)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}=$

7. Un camió porta a la caixa $\frac{3}{8}$ de fruita, $\frac{2}{5}$ de verdura i $\frac{1}{6}$ de patates. Volem saber:
   Quina fracció de la caixa del camió està ocupada?
   Quina fracció queda lliure?

8. Avui és la final de l'equip de futbol juvenil. Al camp de futbol $\frac{2}{3}$ dels espectadors estan situats als seients laterals, $\frac{1}{5}$ en els dos fons, i queden 1000 localitats lliures. Quants espectadors omplirien totalment el camp?

9. Un pot de melmelada pesa 250 grams quan és ple només en una cinquena part. Quant pesa quan està ple?

10. Calcula:

a) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}+2^{-2}\cdot 3^{2}\right)}{2^{-3}} =$

b) $\left(10^{4}\cdot \dfrac{1}{1000}\right)^{-2}+\dfrac{1}{10^{2}} =$

c) $\dfrac{2^{4}}{2^{2}}\cdot\dfrac{5^{7}}{5^{5}} =$

d) $\dfrac{1}{3^{4}}\cdot 2^{-4} =$

ACTIVITAT OPTATIVA: Calcula i simplifica el resultat

a) $-\dfrac{-3}{-8}-\left(\dfrac{1}{3}-2\cdot\dfrac{\frac{2}{5}}{-3}\right)^{-1}-\dfrac{1}{4}=$

b) $-2:\dfrac{2}{\frac{3}{2}}+\dfrac{3}{15}:\dfrac{\frac{-1}{3}}{20}=$

c) $\dfrac{-3}{5}-\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{\frac{2}{3}}{-4}\right)\cdot\dfrac{5}{6}:\dfrac{-3}{2}=$

d) $-\dfrac{4}{5}:\left(1-\dfrac{-2}{3}+\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}\right)^{-1}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

e) $-\dfrac{3}{2}:6+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)^{2}-\left(\dfrac{3+4\cdot 3}{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}\right)=$

f) $\dfrac{-\frac{1}{3}-1+\frac{3}{2}}{4}+\left(\dfrac{-1-\frac{2}{3}}{3}-1\right):\dfrac{3}{\frac{1}{2}+1}:\dfrac{-\frac{2}{3}-2}{5}=$

g) $-\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{-4}{5}\right):\dfrac{-1}{-\frac{1}{2}+1}+\dfrac{\frac{1}{2}-2}{2}=$

h) $-\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{10}{2}:\dfrac{3}{1-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{2}{3}}{-2\cdot\frac{1}{4}}:\left(\dfrac{7}{25}\right)^{0}=$

4. Notació científica: potències de deu

Permet expressar breument nombres que, en valor absolut, són molt grans o molt petits.

S'expressen seguint la següent forma:

$$\boxed{\mathbf{C \cdot 10^{n}}}$$

C: NOMBRE que ha de ser d'una sola xifra diferent de 0 a la part entera

La **BASE** de la potència sempre és 10

n: l'**EXPONENT** ha de ser un nombre enter

Exemple:

Per expressar un nombre decimal en notació científica:

A. Si el valor absolut del número és major o igual que 10 movem la coma a l'esquerra fins que quedi un nombre amb un sola xifra diferent de zero a la part entera. Compten el nombre de llocs que hem desplaçat la coma i el posem com a exponent.

Ex: $557000000 = 5{,}57 \cdot 10^{8}$

8 llocs

B. Si el valor absolut del del nombre està entre 0 i 1, movem la coma a la dreta fins que quedi un nombre amb un sola xifra diferent de zero a la part entera. Compten el nombre de llocs que hem desplaçat la coma i el posem com a exponent.

Ex: $0{,}000043 = 4{,}3 \cdot 10^{-5}$

5 llocs

Activitats:

1. Calcula:

a) 10^2 c) 10^5 d) 10^8

2. Escriu amb totes les xifres (forma decimal):

a) $65 \cdot 10^5$
b) $7 \cdot 10^{10}$
c) $82 \cdot 10^4$
d) $3 \cdot 10^8$
e) $91 \cdot 10^3$
f) $5 \cdot 10^6$
g) $35 \cdot 10^4$
h) $23 \cdot 10^2$

3. Escriu amb potències de 10 (notació científica):

a) 18 millions
b) 7000
c) cent mil
d) 190.000.000
e) 500 milions
f) un bilió

4. Transforma en potències de 10 (notació científica):

a) 231000
b) 8760000
c) 240
d) 2490000
e) 73600
f) 0’00045
g) 0’487
h) 0’0098
i) 35000000
j) 9800000000
k) 0’00000089
l) 214300000000
m) 0’000897
n) 34000000
o) 0’0000007

5. Transforma en potències de deu (notació científica):

a) 10.000=1.000.000=
b) 1.000.000.000=
c) 1000=
d) 0’0001=
e) 0’000001=
f) 0’0000001=

6. Transforma en nombre decimal:

a) $5\cdot10^5$ b) $47\cdot10^{-4}$
c) $654\cdot10^9$ d) $98\cdot10^8$
e) $65\cdot10^{-8}$ f) $89\cdot10^7$
g) $1'45\cdot10^6$ h) $59\cdot10^4$

7. Calcula:

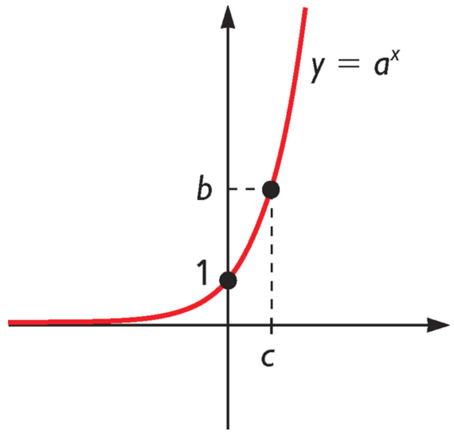
a) $3{,}25\cdot10^9 + 1{,}78 \cdot 10^{10} =$
b) $5{,}02 \cdot 10^{-4} \cdot 4{,}71 \cdot 10^{-5} =$
c) $\dfrac{2{,}41 \cdot 10^{14} - 3{,}62 \cdot 10^{13}}{5{,}12 \cdot 10^{24}} =$
d) $8{,}34 \cdot 10^{-10} : 5{,}03 \cdot 10^8 =$
e) El diàmetre de l'àtom d'hidrogen: 0,0000001 mm
f) La població de la Terra: 6480000000 persones:

8. Ordena de més petit a més gran els següents nombres (expressa'ls en notació científica):

a) 0,00238 b) $3{,}01 \cdot 10^{-5}$ c) $235 \cdot 10^{-6}$ d) $24089{,}32 \cdot 10^{-2}$

5. Logaritmes

El logaritme d'un número, d'una base determinada, és l'exponent al que s'ha d'elevar la base per obtenir el número.



$\mathbf{Log}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{y} = \mathbf{x}$ si $\mathbf{a}^{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$

a: nombre real positiu, diferent d'1

y: nombre real positiu

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$\log_2 1 = 0$$
$$\log_2 2 = 1$$
$$\log_2 4 = 2$$

Exemples: $\log_2 4 = 2$ $\quad 2^2 = 4$

$\log_2 1 = 0$ $\quad 2^0 = 1$

- LOGARITMES DECIMALS: són els logaritmes de base 10. Es representen amb el símbol $\mathbf{log_{10}}$
- LOGARITMES NEPERIANS: són els logaritmes de base e. Es representen amb el símbol **ln**

PROPIETATS

1. No existeixen logaritmes dels nombres negatius ni del nombre zero.
2. El logaritme d'1 és igual a 0, en qualsevol base a. És a dir, $\mathbf{log_a 1 = 0}$
3. El logaritme de base a és igual a 1. És a dir, $\mathbf{log_a a = 1}$
4. Si $\mathbf{log_a x = log_a y}$, aleshores, $\mathbf{x = y}$

5.1 Operacions amb logaritmes

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$	Ex: $\log_2(4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$
2. $\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y$	$\log_2\left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$ Ex:
3. $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$	Ex: $\log_2(8^4) = 4\log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$
4. $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$	Ex: $\log_2\left(\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$

5.2 Canvi de base

$$\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}$$

Exemple: $\log_2 32 = \frac{\log_{10} 32}{\log_{10} 2}$

Activitats

1. Troba el valor d'x fent servir la definició de logaritme:

a) $\log_2 32 = x$

b) $\log_9 1/3 = x$

c) $\log_{1/2} 0,25 = x$

d) $\log_9 \sqrt[4]{3} = x$

e) $\log_{\sqrt{2}} 1/4 = x$

f) $\log_x 81 = -4$

g) $\log_2 x^3 = 6$

h) $\log_4 x = 3$

2. Sabent que log 2 = 0,3010, calcula los siguientes logaritmos decimales:

a) $\log 0,02 =$

b) $\log \sqrt[4]{8} =$

c) $\log 5 =$

d) $\log 0,0625 =$

e) $\log 1/25 =$

f) $\log 1000 - \ln e^2 =$

Per repassar abans de l'examen

Activitats	Solucions
$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}$	→ $\frac{13}{6}$
$\frac{2}{5}-\frac{3}{2}$	→ $-\frac{11}{10}$
$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}$	→ $\frac{5}{6}$
$\frac{2}{4}:\frac{3}{2}$	→ $\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{2}\right)$	→ $\frac{4}{9}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}:\frac{3}{2}$	→ $\frac{9}{4}$
$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-2}-\frac{1}{2^{-3}}$	→ 136
$(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})$	→ 1
$(2-\sqrt{3})^{2}$	→ $-4\cdot\sqrt{3}+7$
$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2}$	→ $-2\cdot\sqrt{6}+5$
$\sqrt{(3^{2})}$	→ 3
$\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}$	→ 0
$\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	→ $\frac{\sqrt{3}}{3}-1$
$3\sqrt{20}-2\sqrt{125}+2\sqrt{45}$	→ $2\cdot\sqrt{5}$
$\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{125}}$	→ $\frac{4\cdot\sqrt{2}}{5}$
$\frac{9-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	→ $3\cdot\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}$
$\frac{2}{2-\sqrt{3}}$	→ $2\cdot\sqrt{3}+4$

Activitats	Solucions
$\log_{2}(4)$	→ $2.$
$\log_{\frac{1}{3}}(9)$	→ $-2.$
$\log_{\sqrt{\frac{1}{4}}}(8^{-2})$	→ $6.$
$\log(1000)-\ln(e^{5})$	→ -2
$\log_{x}8=3$	→ $\{\{x=2.\}\}$
$\log_{x}(3)=\frac{1}{2}$	→ $\{\{x=9.\}\}$
$\log_{\sqrt{2}}(x)=8$	→ $\{\{x=16.\}\}$
$a^{2}\cdot a^{3}$	→ a^{5}
$\frac{b^{3}\cdot b^{2}}{b^{4}}$	→ b
$\sqrt[3]{5^{2}}$	→ $5^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{3^{3}}}}$	→ $3^{\frac{1}{4}}$
$\frac{2^{4}\cdot\sqrt[3]{2^{5}}}{8}$	→ $2^{\frac{8}{3}}$