

Trigonometria

**Àmbit de les Matemàtiques, de la Ciència
i de la Tecnologia**



SUMARI

ORGANITZACIÓ DELS MÒDULS I LES UNITATS	7
INTRODUCCIÓ	8
PUNT DE PARTIDA	9
UNITAT 1 ANGLÉS I TRIANGLES	
QUÈ TREBALLARÀS?	12
CONTINGUTS	13
ACTIVITATS D'APRENTATGE	23
ACTIVITATS D'AVUACIÓ	28
SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'APRENTATGE	30
SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'AVUACIÓ	36
QUÈ HAS TREBALLAT?	39
COM HO PORTO?	40
UNITAT 2 TEOREMA DE TALES. TEOREMA DE PITÀGORES. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES	
QUÈ TREBALLARÀS?	42
CONTINGUTS	43
ACTIVITATS D'APRENTATGE	50
ACTIVITATS D'AVUACIÓ	56
SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'APRENTATGE	59
SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'AVUACIÓ	65
QUÈ HAS TREBALLAT?	68
COM HO PORTO?	69
UNITAT 3 ÀREES I VOLUMS	
QUÈ TREBALLARÀS?	71
CONTINGUTS	72
ACTIVITATS D'APRENTATGE	80
ACTIVITATS D'AVUACIÓ	84
SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'APRENTATGE	85
SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'AVUACIÓ	91
QUÈ HAS TREBALLAT?	92
COM HO PORTO?	93
PUNT D'ARRIBADA	94
ACTIVITATS D'AVUACIÓ DEL MÒDUL	94
SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'AVUACIÓ DEL MÒDUL	95

A l'inici del **mòdul** hi trobaràs sempre dos apartats:

Introducció del mòdul:

És la presentació del mòdul. Ens situa en quin nivell es troba, si és comú o opcional i en quines unitats es divideix.

Punt de partida:

Fa reflexionar sobre els aspectes que es treballen en el mòdul. T'ajudarà a situar-te i a fer una avaluació inicial del que saps sobre el tema que es tractarà abans de començar les unitats.

Cada **unitat** didàctica està estructurada en:

Què treballaràs?:

Presenta els objectius que es treballaran en la unitat i que al final hauràs d'haver assolit.

Bloc de continguts

Bloc d'activitats

ACTIVITATS D'APRENENTATGE: Inclou activitats per practicar i consolidar els conceptes que s'expliquen en el bloc de continguts.

ACTIVITATS D'AVALUACIÓ: Contenen tots els aspectes que s'han treballat en la unitat i permeten consolidar l'assoliment dels objectius plantejats al principi de la unitat.

Bloc de solucions

SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'APRENENTATGE: Inclou les respostes de les activitats d'aprenentatge.

SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'AVALUACIÓ: Són les respostes de les activitats d'avaluació.

Què has treballat?:

És una proposta d'esquema o d'un mapa conceptual que et relaciona o et resumeix els continguts treballats en la unitat. És una eina per facilitar-te la comprensió i estudi dels continguts de la unitat.

Com ho porto?:

Presenta un quadre d'autoavaluació que facilita comprovar si s'han assolit els objectius proposats a l'inici de la unitat.

Al final del **mòdul** hi trobaràs un últim apartat:

Punt d'arribada:

Facilita l'autoavaluació de tots els continguts treballats en el mòdul i l'assoliment dels objectius. Conté:

ACTIVITATS D'AVALUACIÓ DEL MÒDUL: Inclou les activitats que permeten autoavaluar els continguts del mòdul.

SOLUCIONS DE LES ACTIVITATS D'AVALUACIÓ DEL MÒDUL: Són les respostes a les activitats d'avaluació del mòdul.

El mòdul Trigonometria requereix d'uns coneixements previs en geometria plana ja que és un mòdul de continguts bàsicament geomètrics. Per aquest motiu se li dóna importància a la part més procedimental del mòdul que inclou objectius com utilitzar correctament estris de dibuix com el regle i el compàs, estris de mesura com el transportador d'angles, i estris de càlcul com la calculadora científica. Cal dir que per a la resolució de problemes de caràcter geomètric s'ha pres el nombre π en la seva forma arrodonida 3,1416.

Situació del mòdul «Trigonometria» dins dels nivells de l'àmbit de les matemàtiques, la ciència i la tecnologia.

MÒDULS COMUNS	
1. La temperatura	Nivell 1
2. Economia domèstica	
3. La salut	
4. Recursos naturals	
5. Transformacions d'expressions algebraiques	Nivell 2
6. El món invisible	
7. Tecnologia i habitatge	Nivell 3
8. Trigonometria	
9. Genètica	
10. Un món feliç?	

Els continguts del mòdul estan estructurats en tres unitats.

Unitat 1

Treballaràs exclusivament amb dos elements geomètrics fonamentals que són els angles i els triangles.

Unitat 2

S'introdueixen dos teoremes importants de la geometria plana: el teorema de Tales i el teorema de Pitàgores. L'última part de la unitat és una introducció a la trigonometria.

Unitat 3

Treballaràs unitats de mesura d'àrees i calcularàs àrees de figures planes i de cossos geomètrics. També treballaràs unitats de mesura de volums i calcularàs volums de cossos geomètrics.



Posa la data d'avui en la primera columna. Per respondre les preguntes posa un número de l'1 al 3 en funció del que sàpigues.

1. No en sé res.
2. En sé alguna cosa.
3. Ho sé bé.

Quan acabis d'estudiar el mòdul emplena la segona columna. Així podràs veure el que has après.

	Data:	Data:
Saps per què una circumferència mesura 360° ?		
Saps quins lligams hi ha entre angles i triangles?		
Saps per què el sol i l'ombra serveixen per calcular distàncies?		
Saps com es pot calcular l'altura d'una piràmide?		
Saps per què pots calcular l'àrea de qualsevol polígon partint dels triangles?		

Unitat 1

ANGLES I TRIANGLES

11

UNITAT 1 ANGLES I TRIANGLES

8. TRIGONOMETRIA

Matemàtiques, Ciència i Tecnologia

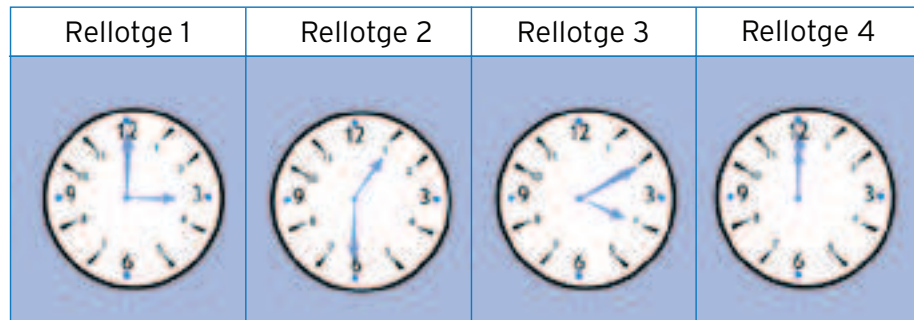
què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- Reconèixer i classificar angles.
- Utilitzar correctament el semicercle graduat o transportador d'angles.
- Operar amb angles.
- Reconèixer i construir triangles.
- Reconèixer les relacions entre els costats i els angles d'un triangle.
- Classificar triangles.
- Reconèixer i representar punts i rectes notables d'un triangle.
- Representar elements geomètrics amb símbols.
- Utilitzar correctament estris de dibuix com el regle i el compàs.

1. Angle: concepte i unitat de mesura

Observa els rellotges següents:

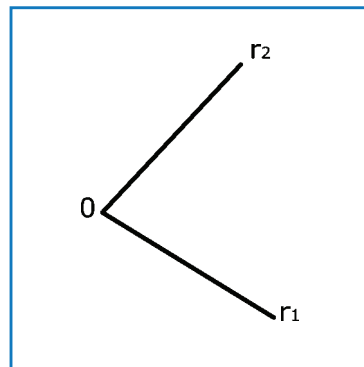


Cada rellotge marca una hora diferent. L'hora ve determinada per la posició de les agulles del rellotge: l'agulla petita assenjala les hores i la gran assenjala els minuts.

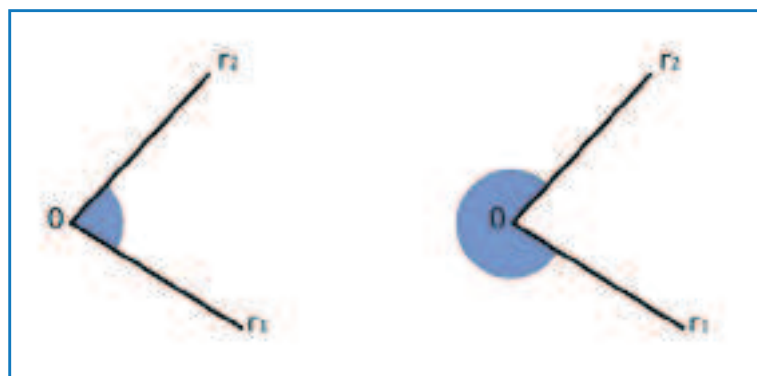
La posició de les agulles determina un angle entre elles.

L'angle és la porció del pla formada per dues semirectes que tenen un origen comú.

En el nostre cas les dues semirectes són les agulles del rellotge i l'origen comú el seu punt d'unió. El punt en comú de les dues semirectes és el **vèrtex** de l'angle i les dues semirectes són els **costats**.



Hem utilitzat el criteri d'anomenar r_1 i r_2 a les semirectes i O al vèrtex de l'angle. Com pots observar en la figura següent, dues semirectes amb origen comú formen dos angles.



Fixa't en el quart rellotge. Observa que l'obertura entre les dues agulles és nul·la. Però, segons el que acabem de veure, també es pot considerar com l'angle determinat per les dues agulles tota la circumferència.



El **grau sexagesimal** és la unitat que s'acostuma a fer servir per mesurar angles.

Per tant, en el primer cas, és evident que l'angle determinat per les dues agulles mesura zero graus. En canvi, en el segon cas, **el sistema sexagesimal atorga a la circumferència un valor de 360 graus**.

Així doncs, un grau correspon a una de les 360 parts iguals en què es pot dividir la circumferència.

Probablement la definició del grau sexagesimal es deu als astrònoms de l'antiga Babilònia, que dividien el cel en 360 parts, cada una de les quals corresponia a un dia de l'any (avui dia, però, diem que l'any té 365 dies). El sistema de numeració dels babilònics era un sistema sexagesimal, és a dir, un sistema de base 60. Per aquest motiu cada grau es divideix en 60 parts iguals anomenades minuts i cada minut es divideix en 60 parts iguals anomenades segons. Segur que ja t'has adonat que aquest mateix sistema és el que es fa servir per mesurar el temps. Les unitats que s'utilitzen per mesurar el temps són les hores, els minuts i els segons.

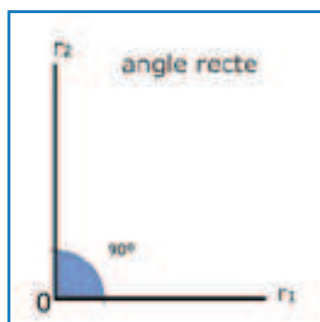
Circumferència	360°	360 graus sexagesimals
Grau sexagesimal	60'	60 minuts sexagesimals
Minut sexagesimal	60''	60 segons sexagesimals

• Activitats d'aprenentatge 1 i 2

2. Tipus d'angles

En aquesta situació la quarta part d'una circumferència mesura 90°.

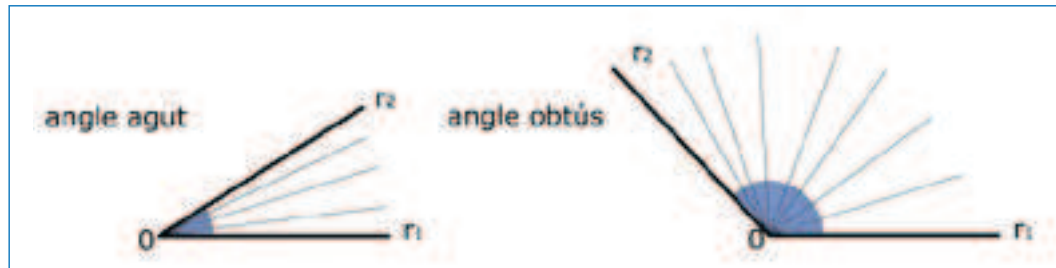
Els angles que mesuren 90° s'anomenen angles **rectes**. Es formen quan les dues semirectes són perpendiculars.



Fixa't que en el primer rellotge hi ha representat un angle recte.

Un angle és **agut** si és més petit que un angle recte ($<90^\circ$).

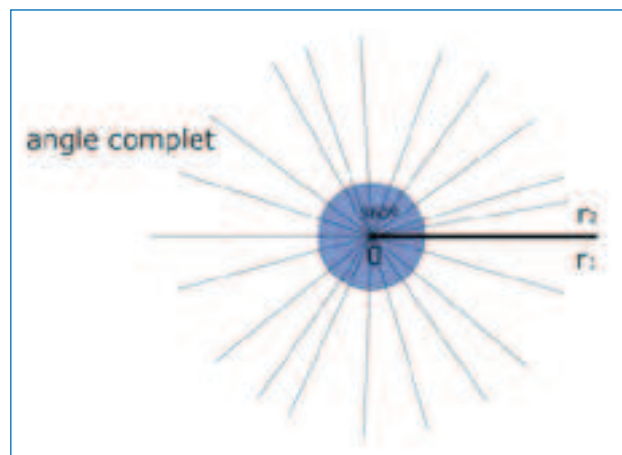
Un angle és **obtús** si és més gran que un angle recte ($>90^\circ$).



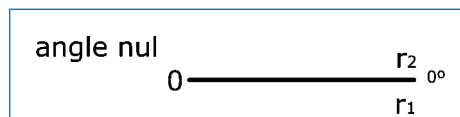
Fixa't que en el segon rellotge hi ha representat un angle obtús i que en el tercer rellotge hi ha representat un angle agut.

Hi ha altres angles que reben noms especials. Alguns d'ells ja els hem vist com és el cas de:

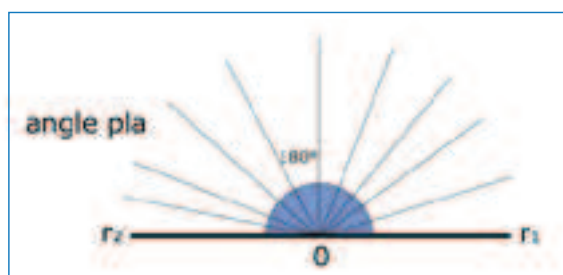
L'angle **complet**, que mesura 360°



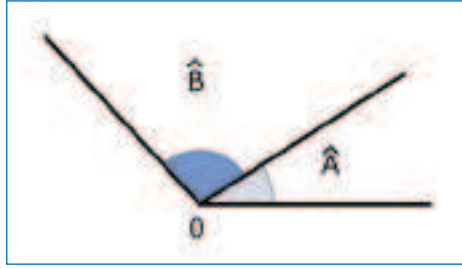
I l'angle **nul**, que mesura 0° .



Un altre angle especial és el **pla**, que mesura 180° .



Els angles **consecutius** tenen un costat i el vèrtex en comú.



Si a més de consecutius els seus costats no comuns formen un angle pla, s'anomenen **adjacents**.

Dos angles són **complementaris** si les seves mesures sumen 90° .

Dos angles són **suplementaris** si les seves mesures sumen 180° .

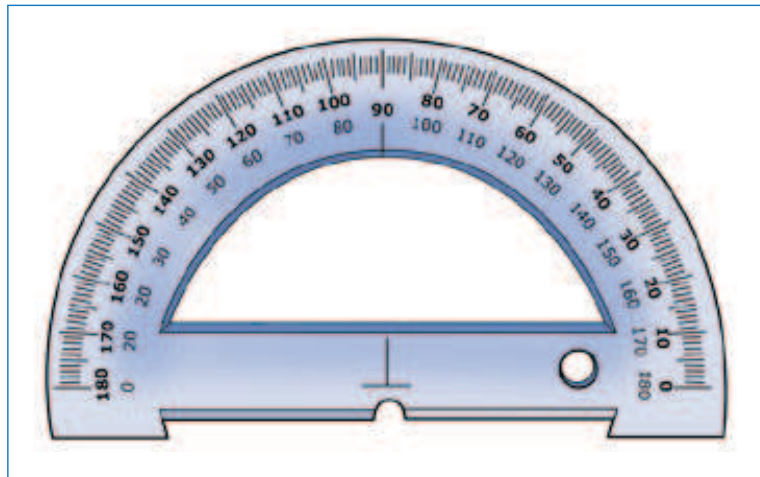
El criteri que utilitzarem per representar els angles és una lletra majúscula amb un circumflex (\hat{A}).

• **Activitats d'aprenentatge 3 i 4**

3. Mesura d'angles

Per mesurar angles s'utilitza el **semicercle graduat o transportador d'angles**.

Es tracta d'un semicercle dividit en 180 parts o graus sexagesimals. Per mesurar un angle es fa coincidir el punt central del transportador amb el vèrtex de l'angle i la base del transportador amb un dels costats de l'angle.



• **Activitat d'aprenentatge 5**

4. Operacions amb angles

Suma d'angles

Vegem un exemple de suma d'angles.

Observa aquests dos rellotges:



Inicialment el rellotge marca les 15:30 hores. Després de 15 minuts, el rellotge marca les 15:45 hores. Fixa't amb els angles determinats per les agulles del rellotge. L'angle inicial és un angle recte. L'angle final és un angle pla. A mesura que passen els minuts, l'agulla gran avança. Observa que aquesta agulla entre la seva posició inicial (assenyalant el 6) i la seva posició final (assenyalant el 9) determina també un angle recte. Si afegim aquest angle recte a l'angle recte inicial resulta que l'angle final és un angle pla.

$$90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Per sumar dos angles \hat{A} i \hat{E} es segueixen els passos següents:

Es construeix un angle igual a \hat{A} amb l'ajut del transportador.

Es construeix un angle igual a \hat{E} de manera que \hat{A} i \hat{E} siguin angles consecutius, també amb l'ajut del transportador.



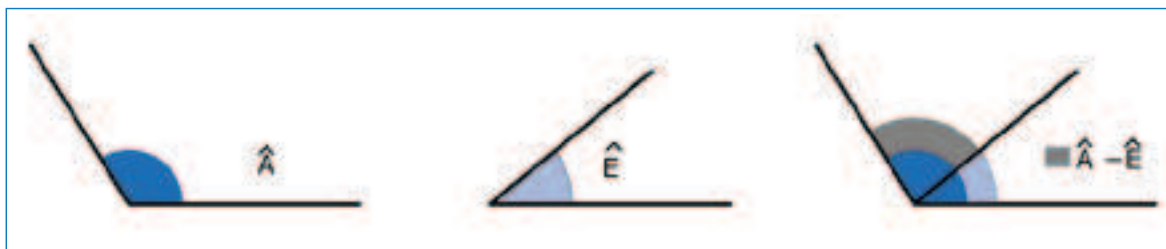
Aquest és l'angle suma.

Resta d'angles

Per restar dos angles es segueix un procés similar al de la suma però per comptes d'afegir graus a l'angle inicial n'hi haurem de treure. Això sí, l'angle inicial ha de ser més gran que l'angle que li traiem.

Es construeix un angle igual a \hat{A} amb l'ajut del transportador.

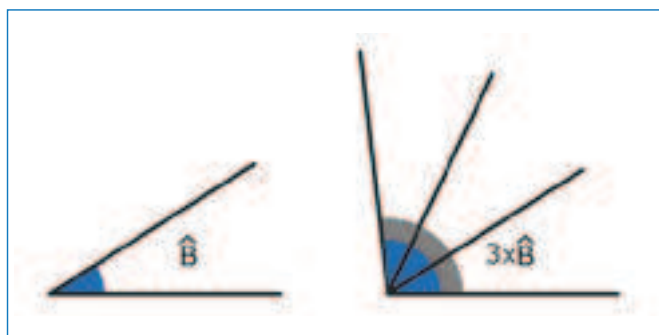
Es construeix a sobre d' \hat{A} un angle igual a l'angle \hat{E} amb l'ajut del transportador.



Aquest és l'angle resta.

Multiplicació d'un angle per un nombre natural

Multiplicar un angle per un nombre natural és el mateix que sumar aquest angle tantes vegades com indiqui el nombre natural.



Divisió d'un angle en dos angles iguals. Bisectriu

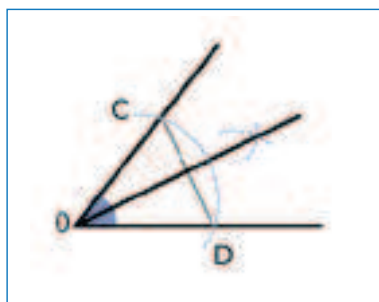
La semirecta que passa pel vèrtex d'un angle dividint-lo en dos trossos iguals s'anomena **bisectriu**. Si es dibuixa la bisectriu d'un angle, automàticament s'obtenen les dues meitats de l'angle.

La construcció de la bisectriu d'un angle es pot fer amb regle i compàs.

Agafem el compàs i prenem com a centre el vèrtex de l'angle. Tracem un arc que, en tallar amb els costats de l'angle determina dos punts C i D. Per la manera com s'han construït observa que C i D estan a la mateixa distància del vèrtex O.

Tracem dos arcs de circumferència prenent com a centres els punts C i D, de radi igual i suficientment gran per tal que els dos arcs es tallin.

Unim aquest punt de tall dels dos arcs amb el vèrtex de l'angle i ja tenim la bisectriu.

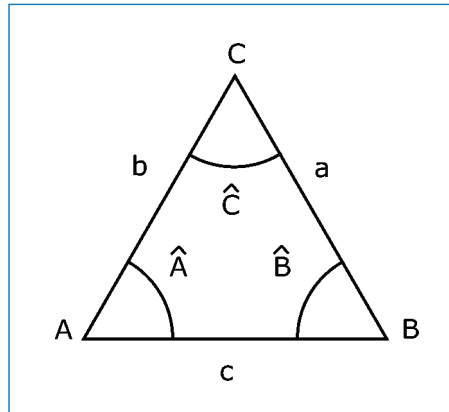


5. Triangle: Concepte i característiques

Estaràs d'acord que és impossible de dibuixar una figura plana tancada amb només dos costats. Com a mínim en necessitaràs tres.

El **triangle** és el polígon de menor nombre de costats que existeix.

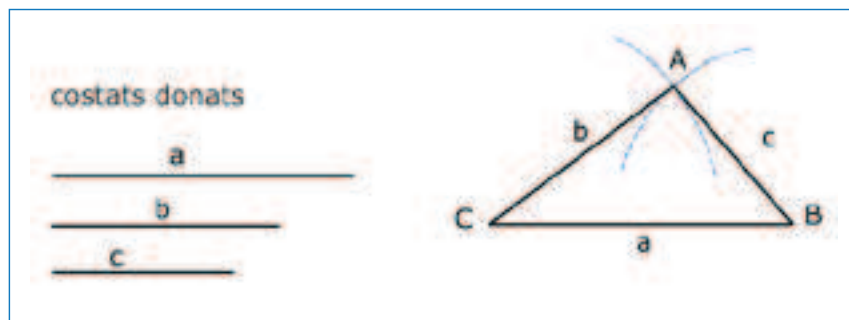
Està format per tres costats, tres vèrtexs i tres angles.



Criteri de nomenclatura

Anomenarem A, B i C els vèrtexs d'un triangle, per això quan parlem del triangle ens referirem al triangle ABC. Pels costats utilitzarem les lletres a, b i c, corresponents als vèrtexs oposats. Els angles els simbolitzarem amb la mateixa lletra que el vèrtex corresponent però amb un circumflex.

La construcció del triangle es pot fer amb regla i compàs.



Tracem un segment igual al costat a. Els extrems d'aquest costat seran òbviament dos vèrtexs (B i C) d'aquest triangle.

Tracem un arc que té com a centre el vèrtex C i com a radi la longitud del costat b. Tracem un altre arc que té com a centre el vèrtex B i com a radi la longitud del costat c. El punt de tall d'aquests dos arcs serà el tercer vèrtex (A) del triangle.

Tanmateix no n'hi ha prou amb tres costats qualssevol per construir un triangle.

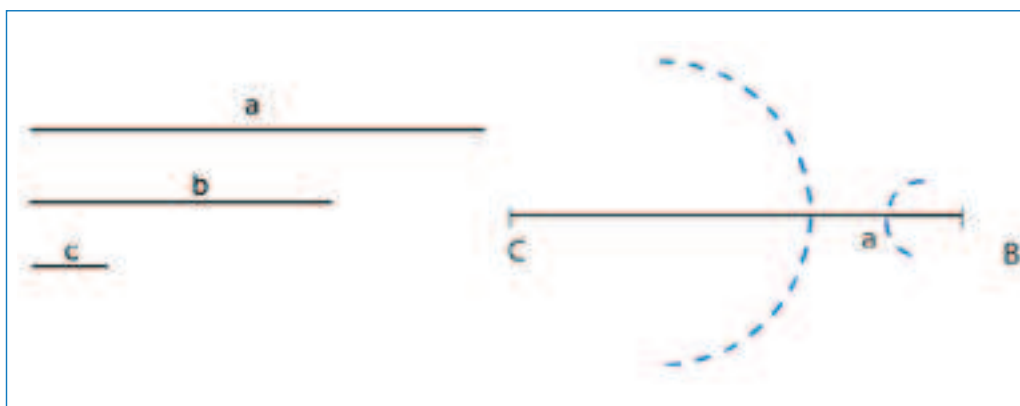
ACTIVITAT

Intenta construir un triangle amb les següents mesures per als seus costats:

$$a = 6 \text{ cm}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$c = 1 \text{ cm}$$

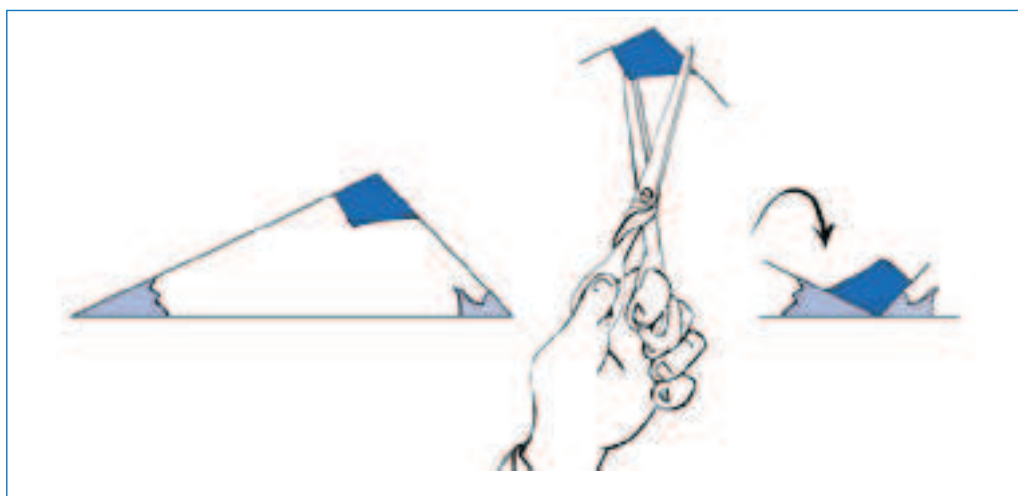
Solució

La construcció d'un triangle amb aquestes dades no és possible.

Un costat qualsevol d'un triangle ha de ser sempre més petit que la suma dels altres dos i més gran que la diferència.

En canvi en l'exemple que hem plantejat: $6 > 4 + 1$

Si es pren un triangle qualsevol i es retallen els seus tres angles interiors, és a dir, les seves "puntes", en col·locar els tres angles consecutivament a sobre d'una línia recta, com si es tractés d'un ventall, s'observa que formen un angle pla.



La suma dels angles interiors d'un triangle és un angle pla o de 180° .

• **Activitats d'aprenentatge 10 i 11**

6. Classificació de triangles

Els triangles es poden classificar segons els seus costats i segons els seus angles.

Classificació segons els costats

Triangle equilàter: té tots tres costats iguals

Triangle isòsceles: té dos costats iguals

Triangle escalè: no té cap costat igual

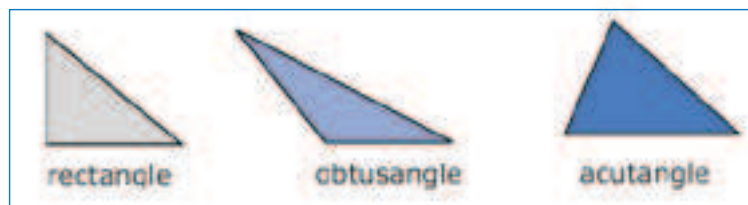


Classificació segons els angles

Triangle rectangle: conté un angle recte

Triangle obtusangle: conté un angle obtús

Triangle acutangle: té tots tres angles aguts



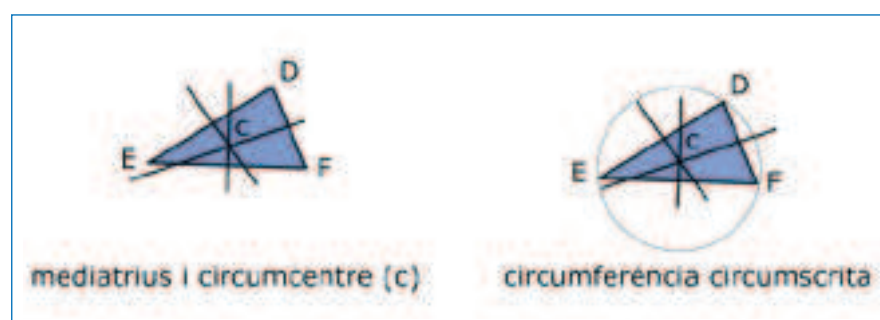
• Activitats d'aprenentatge 12, 13 i 14

7. Punts i rectes notables d'un triangle

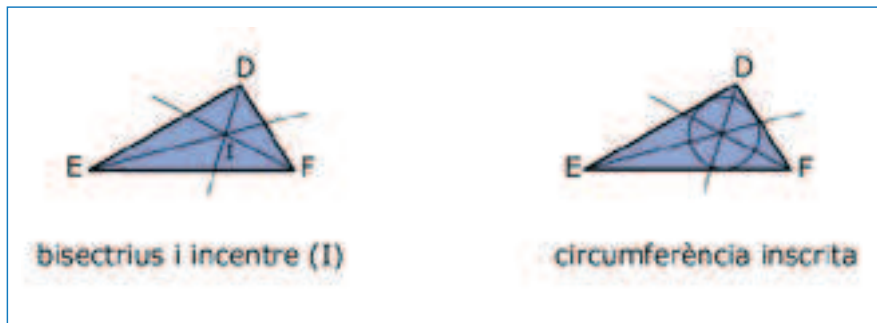
Mediatris i circumcentre

La mediatriu d'un segment és la recta perpendicular que passa pel punt mig del segment. La recta i el segment són perpendiculars quan l'angle que determinen és de 90° .

Les **mediatrius** d'un triangle són les mediatris dels seus costats. Si es tracen les tres mediatris d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena **circumcentre**. Agafa el compàs i punxa'l a sobre del circumcentre. A continuació pren com a radi la distància que hi ha entre el circumcentre i un dels vèrtexs del triangle. Si hi dibuixes aquesta circumferència obtindràs la **circumferència circumscrita** al triangle.

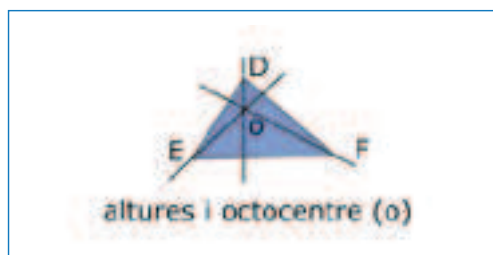


Les **bisectrius** d'un triangle són les bisectrius dels seus angles. Les tres bisectrius d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena **incentre**. Agafa el compàs i punxa'l a sobre de l'incentre. Tot seguit pren com a radi la distància entre l'incentre i un dels costats del triangle. Si hi dibuixes aquesta circumferència obtindràs la **circumferència inscrita** al triangle.



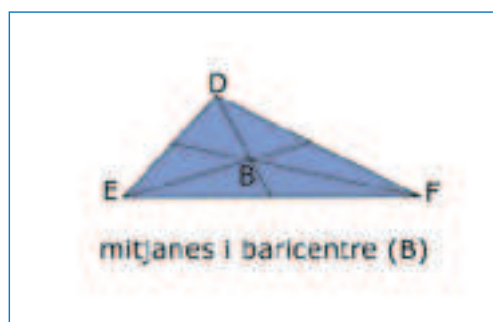
Altures i ortocentre

L'**altura** d'un triangle és la recta perpendicular a un costat o a la seva prolongació des del vèrtex oposat. Les tres altures d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena **ortocentre**.



Mitjanes i baricentre

La **mitjana** d'un triangle és el segment que uneix un vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat. Les tres mitjanes d'un triangle es tallen en un punt que s'anomena **baricentre**.



El baricentre és el centre de gravetat del triangle.

• **Activitats d'aprenentatge 15 i 16**

Activitat 1

Completa la taula següent:

Graus	Minuts	Segons
30°	30 x 60 =	
45°		
120°		
270°		

Activitat 2

En un rellotge l'agulla gran i l'agulla petita es mouen a diferents velocitats. En una hora, quants graus mesura l'angle que recorre l'agulla gran? I en mitja hora? I en un quart?

En una hora, quants graus i quants minuts recorre l'agulla petita?

Activitat 3

Calcula l'angle complementari de cadascun d'aquests angles:

a) 45° c) 60°

b) 30° d) 15°

Activitat 4

Contesta vertader o fals:

Dos angles adjacents són sempre angles consecutius

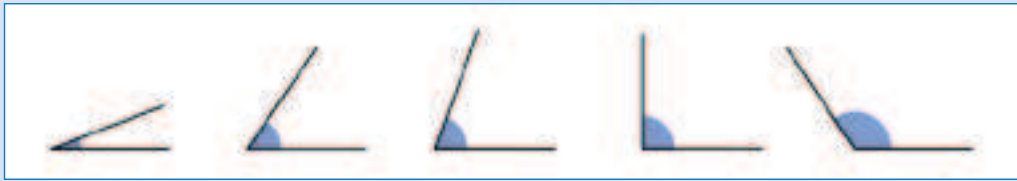
Dos angles consecutius són sempre angles adjacents

Dos angles adjacents són sempre angles suplementaris

Dos angles suplementaris són sempre angles adjacents

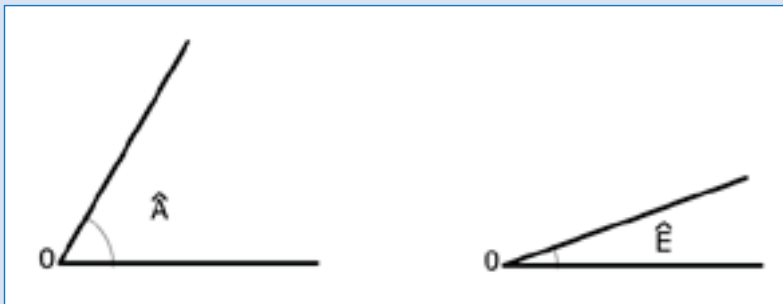
Activitat 5

D'entre aquests angles, n'hi ha cap parell les mesures dels quals sumin 90° i 180° ?

**Activitat 6**

Quant mesura l'angle suma dels angles \hat{A} i \hat{E} ?

Utilitza el transportador d'angles i resol el problema numèricament i gràficament.



Activitat 7

Dibuixa un angle agut de manera que el seu doble sigui un angle obtús. Resol el problema gràficament amb l'ajut del transportador d'angles. Sabries dir quins valors pot prendre l'angle agut per tal que el seu doble sigui un angle obtús?

Activitat 8

Dibuixa la bisectriu d'un angle pla. Quant mesuren els dos angles que resulten?

Activitat 9

Quant val el triple d'un angle de 30° ? Resol el problema gràficament amb l'ajut del transportador d'angles.

Activitat 10

Construeix un triangle de costats:

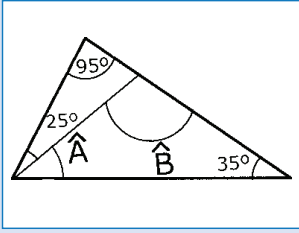
$$a = 5 \text{ cm}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$c = 3 \text{ cm}$$

Activitat 11

En el següent triangle manquen les dades de dos angles. Pots trobar-les?

**Activitat 12**

Els angles iguals d'un triangle isòsceles valen 50° . Quant val l'angle desigual? Si classifiquem aquest triangle segons els angles, de quin tipus és?

Activitat 13

Dedueix quant mesuren els angles d'un triangle equilàter.

Activitat 14

Es pot dibuixar un triangle amb dos angles aguts? I amb dos angles rectes? I amb dos angles obtusos? Per què?

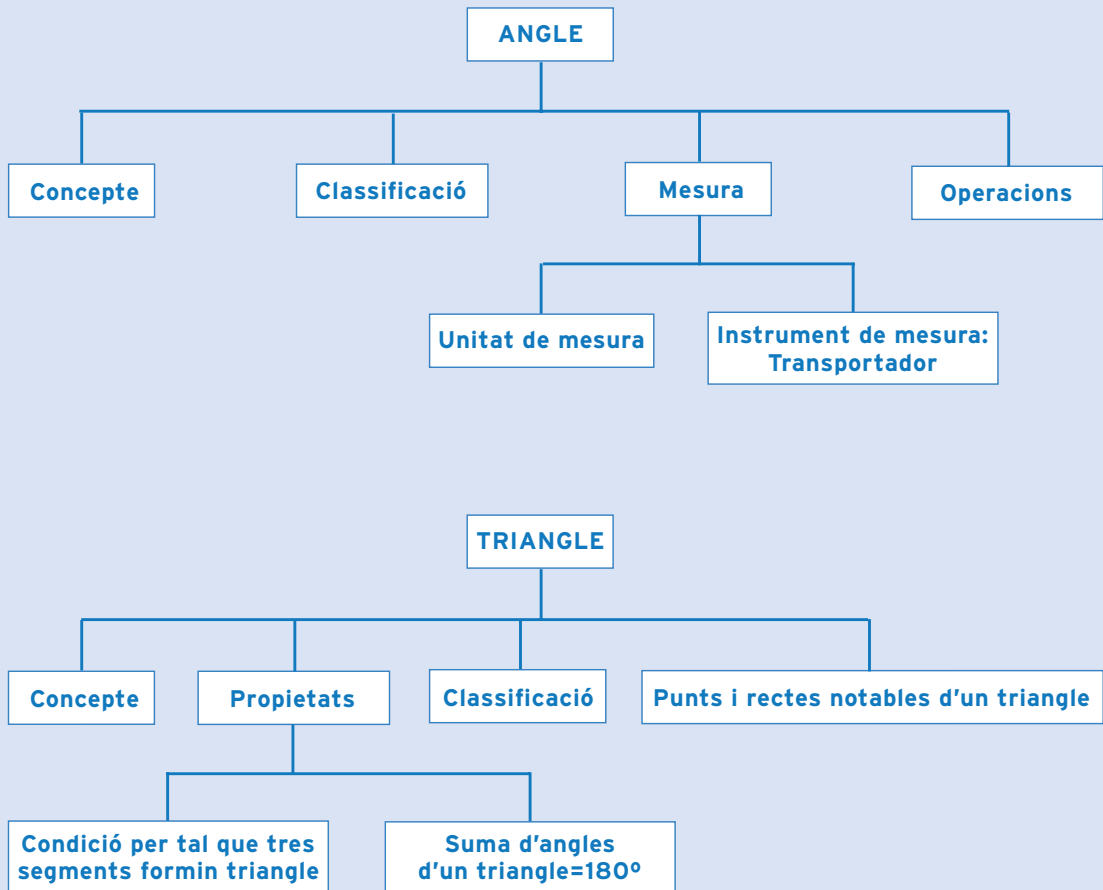
Activitat 15

Dibuixa un triangle equilàter i el seu baricentre, circumcentre, ortocentre i incentre. Què observes?

Activitat 16

És possible dibuixar un triangle obtusangle i isòsceles a la vegada? Posa'n algun exemple.

què has treballat?



com

ho porto?

Omple la graella següent posant una creu on correspongui.

En acabar la unitat, sóc capaç de ...

	Bé	A mitges	Malament
Reconèixer i classificar angles.			
Utilitzar correctament el semicercle graduat.			
Operar amb angles numèricament i gràficament.			
Reconèixer i construir triangles amb regla i compàs.			
Reconèixer les relacions entre els costats i els angles d'un triangle.			
Classificar triangles.			
Reconèixer i representar punts i rectes notables d'un triangle.			
Representar elements geomètrics amb símbols.			
Utilitzar correctament estris de dibuix com el regla i el compàs.			

Unitat 2

41

TEOREMA DE TALES. TEOREMA DE PITÀGORES. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

UNITAT 2 TEOREMA DE TALES.
TEOREMA DE PITÀGORES. RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

8. TRIGONOMETRIA

Matemàtiques, Ciència i Tecnologia

què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- Reconèixer segments proporcionals i la seva raó de proporció.
- Aplicar el teorema de Tales.
- Distingir triangles en posició de Tales.
- Distingir triangles semblants. Utilitzar la semblança de triangles per calcular elements geomètrics.
- Aplicar el teorema de Pitàgores per al càlcul d'elements geomètrics.
- Interpretar les raons trigonomètriques d'un angle agut d'un triangle rectangle.
- Utilitzar les raons trigonomètriques d'un angle agut per resoldre triangles rectangles.
- Utilitzar la calculadora per al càlcul de raons trigonomètriques.
- Representar mitjançant figures geomètriques senzilles l'enunciat d'un problema.

1. Proporcionalitat de segments

Mitjançant les fotografies, les fotocòpies, els plànols, els mapes, etc., podem fer ampliacions o reduccions de la realitat per tal de fer-la més accessible i més còmoda de treballar.

Observa aquestes dues imatges:

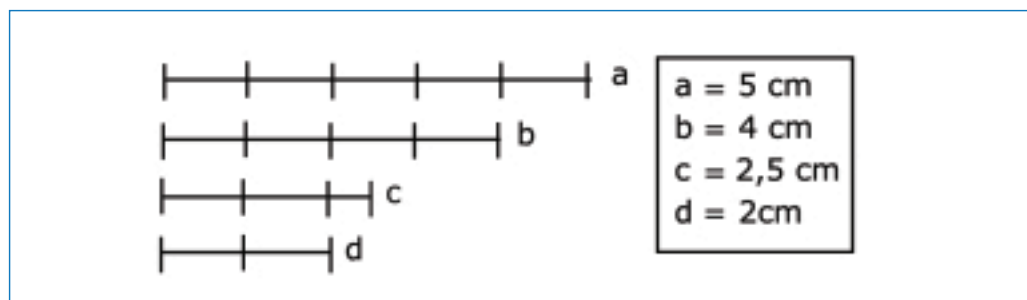


Totes dues tenen la mateixa forma però la mida és diferent. Tanmateix, fixa't que se'n conserven les proporcions.

En matemàtiques es diu que les dues imatges són proporcionals o semblants.

Fes memòria i recorda el que és una raó i una proporció. Una raó és el quocient de dos nombres o de dues quantitats comparables. Una proporció és la igualtat entre dues raons.

Ara observa els següents segments:



La raó de dos segments és el nombre que resulta de dividir les longituds dels dos segments.

Pots comprovar que la raó dels segments a i b és:

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{4} = 1,25$$

I que la raó dels segments c i d és:

$$\frac{c}{d} = \frac{2,5}{2} = 1,25$$

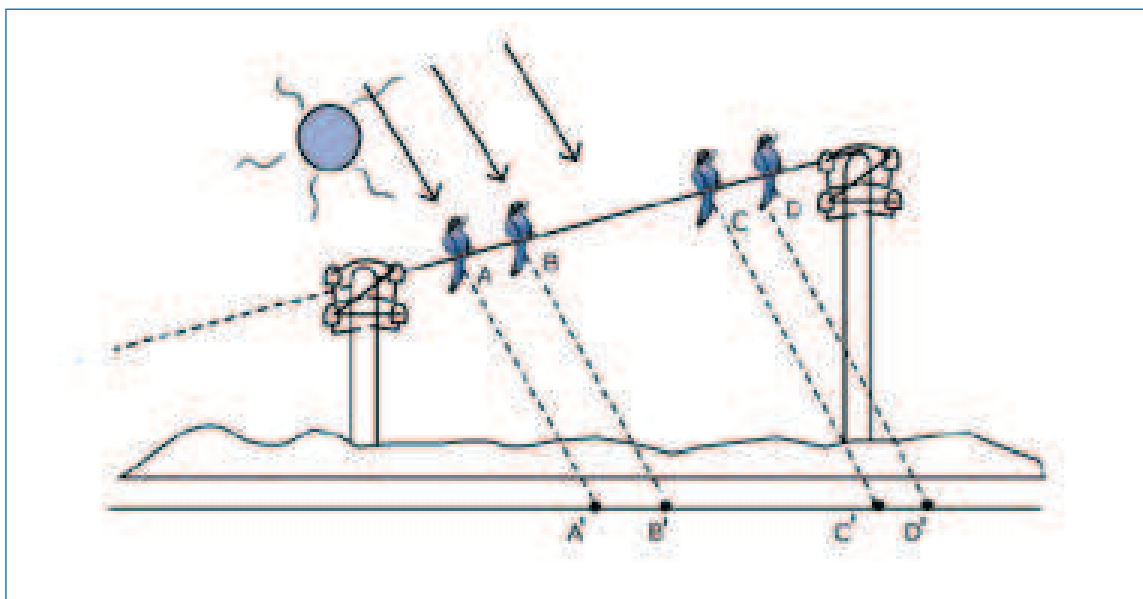
Fixa't que la raó dels segments a i b és la mateixa que la dels segments c i d . Hi ha una proporció.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Quan això passa es diu que **els segments a i b són proporcionals als segments c i d** .

2. Teorema de Tales

Fixa't en la imatge següent:



Després d'haver mesurat les longituds dels segments del cable, AB i CD , i les longituds dels segments de l'ombra, $A'B'$ i $C'D'$, s'observa que:

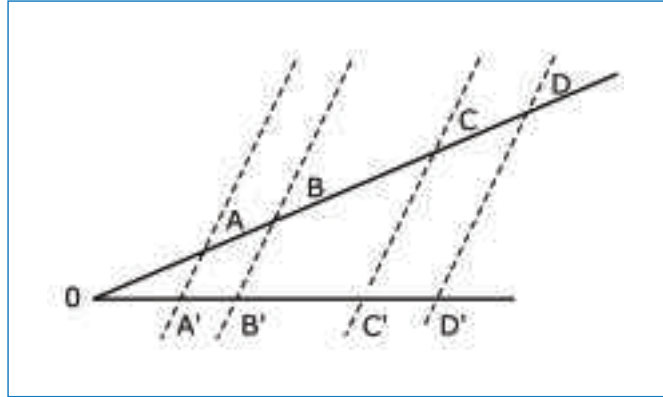
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

$\frac{AB}{CD}$ i $\frac{A'B'}{C'D'}$ formen una proporció.

Això no és res més que un exemple del **Teorema de Tales**.

Teorema de Tales: Les rectes paral·leles traçades sobre dues rectes secants determinen segments que són proporcionals.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$



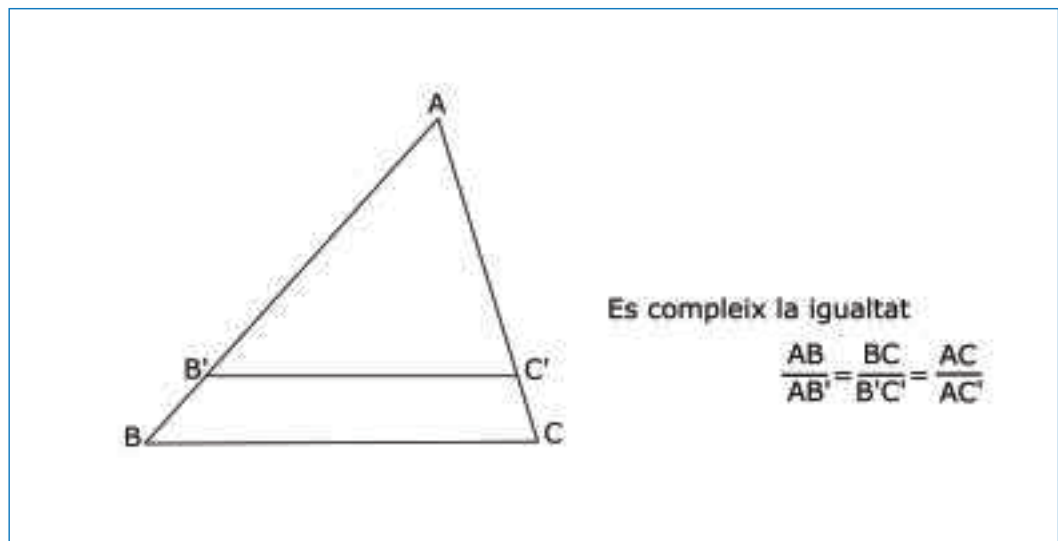
En el nostre exemple les rectes paral·leles són els raigs de sol i les dues rectes secants són el cable de la llum i la projecció de l'ombra.

- **Activitats d'aprenentatge 1, 2 i 3**

3. Triangles en posició de Tales

Si en un triangle qualsevol ABC tracem una recta paral·lela al costat BC obtenim un nou triangle AB'C'. Els dos triangles ABC i AB'C' estan en posició de Tales.

El teorema de Tales ens permet relacionar els costats d'aquests dos triangles:



Si dos triangles tenen un vèrtex comú i els costats oposats a aquest vèrtex són paral·lels es diu que estan en posició de Tales.

• **Activitats d'aprenentatge 4 i 5**

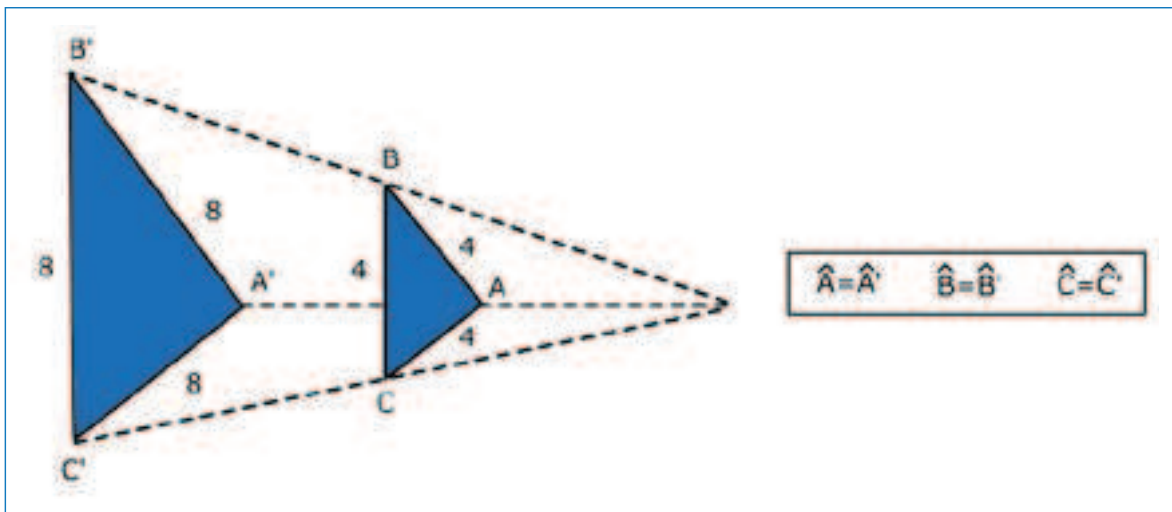
4. Triangles semblants

Observa que els triangles en posició de Tales tenen la mateixa forma però diferent mida. Els triangles en posició de Tales són **figures semblants**. Per això se'ls anomena **triangles semblants**.

Ara bé, no cal que dos triangles estiguin en posició de Tales perquè siguin semblants.

Dos triangles que tinguin els angles iguals i els costats proporcionals són **triangles semblants**.

Quan s'amplia o es redueix un triangle s'obté un nou triangle semblant al primer.



En la imatge, la relació entre els costats dels triangles és:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{8}{4} = 2$$

Aquesta és la **raó de semblança**.

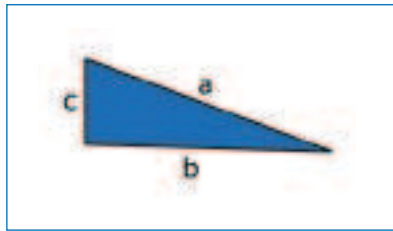
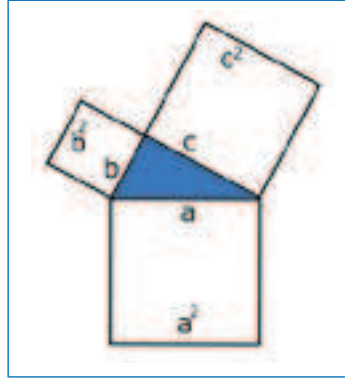
En aquest exemple la mida del triangle A'B'C' és el doble que la del triangle ABC o el que és el mateix, les longituds dels costats del triangle A'B'C' mesuren el doble que les del triangle ABC.

Fixa't que en els triangles semblants també es conserven els angles.

• **Activitats d'aprenentatge 6 i 7**

5. Teorema de Pitàgores

Amb l'ajut de la geometria es pot veure fàcilment una propietat molt important que compleixen els triangles rectangles: l'àrea del quadrat construït sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle és igual a la suma de les àrees dels quadrats construïts sobre els seus catets.

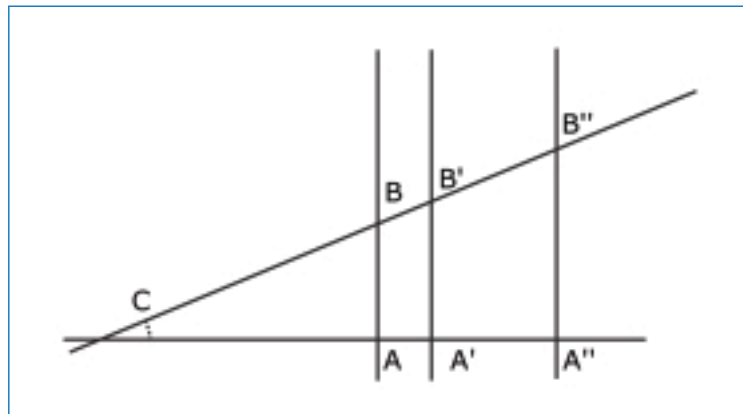


Teorema de Pitàgores: En un triangle rectangle el quadrat de la hipotenusa és igual a la suma dels quadrats dels seus catets.
 $a^2 = b^2 + c^2$

• **Activitats d'aprenentatge 8, 9 i 10**

6. Triangles rectangles semblants

Per tal que dos triangles rectangles siguin semblants només cal que coincideixin en algun dels angles no rectes. Observa la figura:



Pots comprovar que, en efecte, els triangles CAB, CA'B', CA''B'' són semblants.

Fixa't en els quocients següents:

$$\frac{AB}{CB} \quad \frac{A'B'}{CB'} \quad \frac{A''B''}{CB''}$$

Observa que cada quocient és la raó entre la longitud del catet oposat al vèrtex C i la longitud de la hipotenusa de cadascun dels triangles.

Per la semblança dels triangles tenim:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{CB'} = \frac{A''B''}{CB''}$$

El valor d'aquesta raó s'anomena **sinus** d' α , sent α l'angle corresponent al vèrtex C, és a dir, l'angle que formen les dues rectes secants.

La raó entre les longituds del catet oposat i de la hipotenusa s'anomena **sinus de l'angle**.

$$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

Ara fixa't en aquests altres quocients:

$$\frac{CA}{CB} \quad \frac{CA'}{CB'} \quad \frac{CA''}{CB''}$$

Observa que cada quocient és la raó entre la longitud del catet contigu al vèrtex C i la longitud de la hipotenusa de cadascun dels triangles.

Com abans, per la semblança dels triangles tenim:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'} = \frac{CA''}{CB''}$$

El valor d'aquesta raó s'anomena **cosinus** d' α , sent α l'angle corresponent al vèrtex C, és a dir, l'angle que formen les dues rectes secants.

La raó entre les longituds del catet contigu i de la hipotenusa s'anomena **cosinus de l'angle**.

$$\cos \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}}$$

Finalment, fixa't en aquests altres quocients:

$$\frac{AB}{CA} \quad \frac{A'B'}{CA'} \quad \frac{A''B''}{CA''}$$

Observa que cada quocient és la raó entre la longitud del catet oposat i la longitud del catet contigu.

Una vegada més, per la semblança dels triangles tenim:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{A'B'}{CA'} = \frac{A''B''}{CA''}$$

El valor d'aquesta raó s'anomena **tangent** d' α , sent α l'angle corresponent al vèrtex C, és a dir, l'angle que formen les dues rectes secants.

La raó entre les longituds del catet oposat i del catet contigu s'anomena **tangent de l'angle**.

$$\tan \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}}$$

Aquestes raons que hem definit, sinus, cosinus i tangent, s'anomenen **raons trigonomètriques** de l'angle α .

6. Les raons trigonomètriques i la calculadora

Mitjançant la calculadora podem obtenir el sinus, el cosinus i la tangent d'un angle agut amb molta precisió.

Imagina que vols calcular el cosinus de 60° . Si a la pantalla hi surt el terme *DEG*, vol dir que hi podem introduir els graus sexagesimals. En aquest cas s'ha d'escriure el nombre 60. A continuació prems la tecla **cos**. Veuràs que a la pantalla apareix el valor 0.5.

En efecte, $\cos 60^\circ = 0.5$.

Per calcular un sinus cal prémer la tecla **sin** i per la tangent, la tecla *tan*.

Raons trigonomètriques dels angles aguts més corrents:

ANGLES	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$

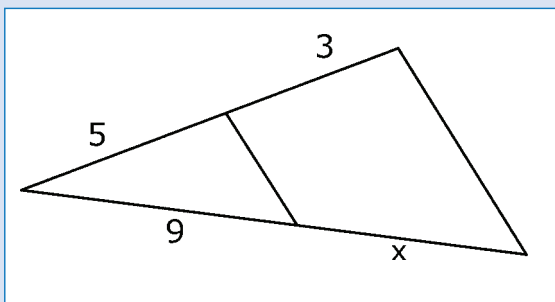
• **Activitats d'aprenentatge 11, 12, 13, 14, 15, 16 i 17**

Activitat 1

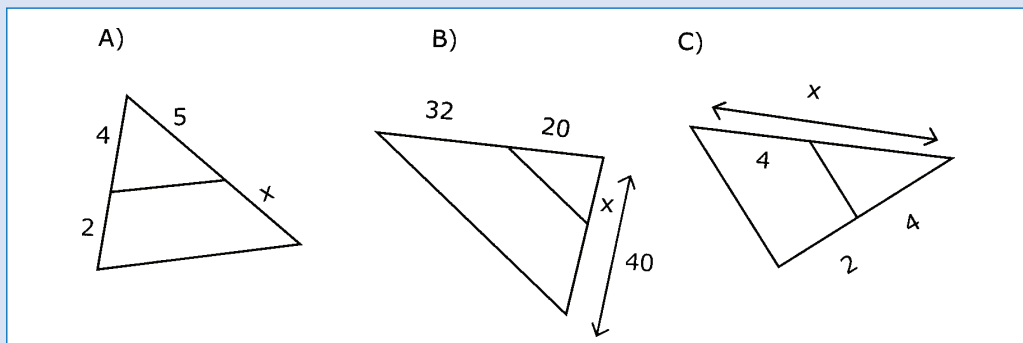
Llegeix atentament el teorema de Tales. Creus que també és certa la proporció següent? Per què? $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$

Activitat 2

Utilitzant el teorema de Tales calcula la longitud del segment x en centímetres:

**Activitat 3**

Esbrina el valor de x en cadascun dels triangles següents:



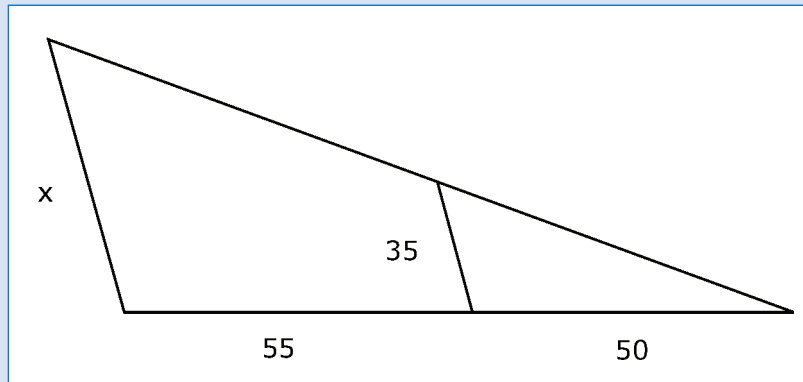
Activitat 4

Com són els angles de dos triangles en posició de Tales?

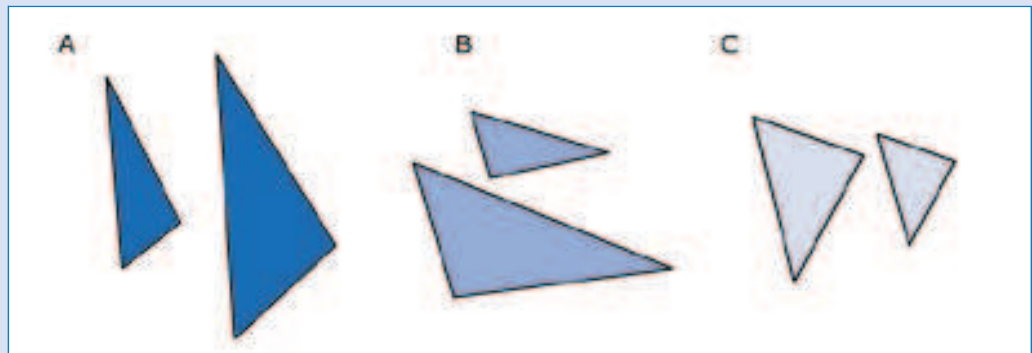
Com són els costats corresponents de dos triangles en posició de Tales?

Activitat 5

Determina la longitud del costat del triangle gran que s'indica en la figura:

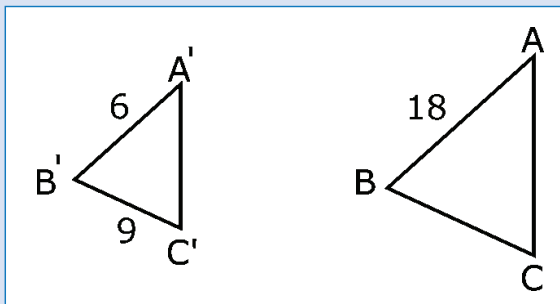
**Activitat 6**

Digues quines parelles de triangles són semblants i per què:



Activitat 7

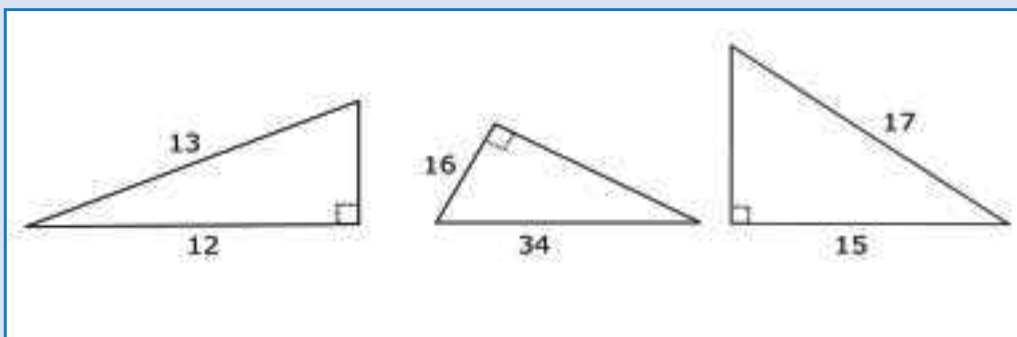
Fixa't en els següents triangles:



Són semblants? Quant val la longitud del costat BC?

Activitat 8

Troba la longitud del costat que falta en els triangles rectangles següents. Les mesures vénen expressades en centímetres.



Activitat 9

Els catets d'un triangle rectangle mesuren 5 m i 10 m. Calcula l'àrea del quadrat construït sobre la hipotenusa.

Activitat 10

Els nombres enters que corresponen a les mides dels costats de triangles rectangles i que, per tant, compleixen la propietat $a^2 = b^2 + c^2$, s'anomenen ternes pitagòriques.

Exemple: (5, 4, 3) és una terna pitagòrica, ja que $5^2 = 4^2 + 3^2$.

La terna (17, 15, 8) és pitagòrica? I la terna (10, 8, 6)?

Activitat 11

Amb l'ajut de la calculadora calcula:

$\sin 45^\circ$	$\cos 45^\circ$	$\tan 45^\circ$
$\sin 30^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\tan 30^\circ$
$\sin 60^\circ$	$\cos 60^\circ$	$\tan 60^\circ$

Activitat 12

La hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 10 metres i un dels seus angles aguts 20° . Quina és la mida real del catet oposat?

Activitat 13

Un ciclista puja per un pendent que té una inclinació respecte a l'horitzontal de 25° . Quan arriba al cim del pendent, ha recorregut 1.200 metres. A quina alçada es troba el cim?

Activitat 14

Un camí de muntanya puja 35 m en una distància horitzontal de 100 m. Calcula la tangent de l'angle que forma el camí amb l'horitzontal.

Si el camí pugés 35 m en una distància horitzontal de 60 m, quina seria la tangent de l'angle?

La inclinació d'un terreny respecte a l'horitzontal és el que s'anomena el pendent del terreny i s'acostuma a expressar en tant per cent. Quan es pugen 10 m en vertical per cada 100 m que es recorren en horitzontal el pendent és d'un 10%. Completa la taula següent:

Angle	20°	50°	60°
Pendent en %	36,39%		

Activitat 15

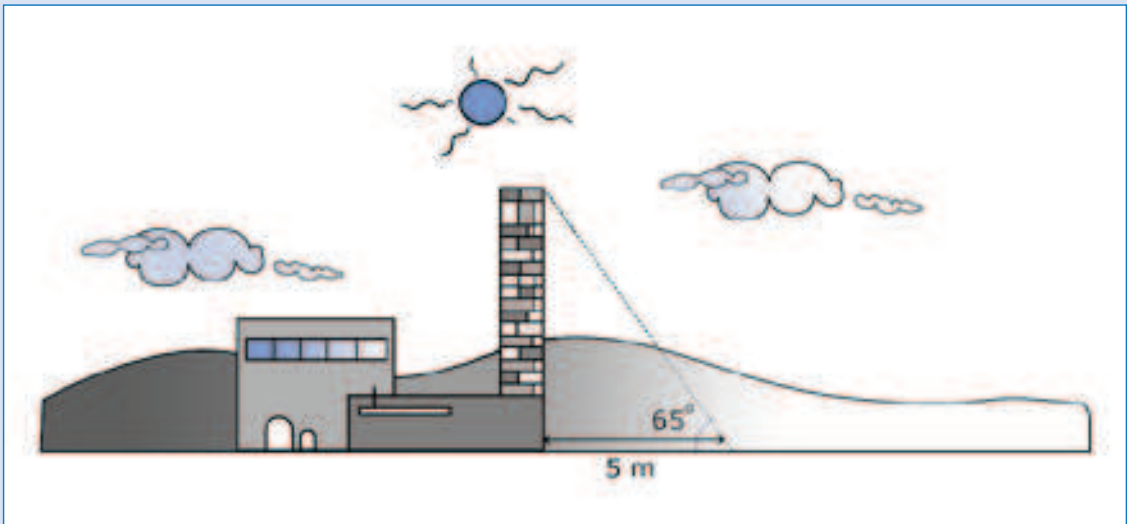
Un far té una alçada de 20 m i des d'un vaixell s'observa el seu punt més alt sota un angle de 22°. A quina distància es troba el vaixell del far?

Activitat 16

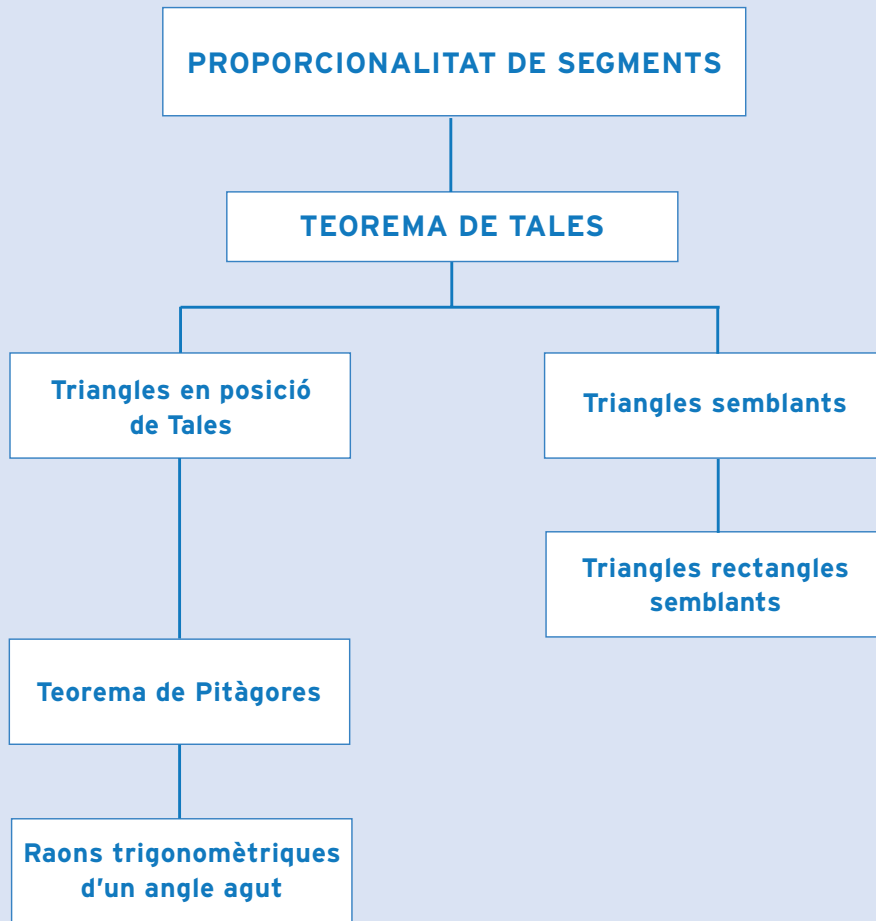
Un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 70° i el catet contigu 15 m. Quant mesura l'altre catet?

Activitat 17

Podries saber l'altura d'una xemeneia si la seva ombra fa 5 m i els raigs del sol fan un angle de 65° amb l'horitzontal?



què has treballat?



com

ho porto?

Omple la graella següent posant una creu on correspongui.

En acabar la unitat, sóc capaç de...

	Bé	A mitges	Malament
Reconèixer segments proporcionals i la seva raó de proporció.			
Aplicar el teorema de Tales.			
Distingir triangles en posició de Tales.			
Distingir triangles semblants.			
Utilitzar la semblança de triangles per calcular elements geomètrics.			
Aplicar el teorema de Pitàgores.			
Interpretar les raons trigonomètriques d'un angle agut per resoldre triangles rectangles.			
Utilitzar la calculadora per al càlcul de raons trigonomètriques.			
Representar mitjançant figures geomètriques senzilles l'enunciat d'un problema.			

Unitat 3

ÀREES I VOLUMS

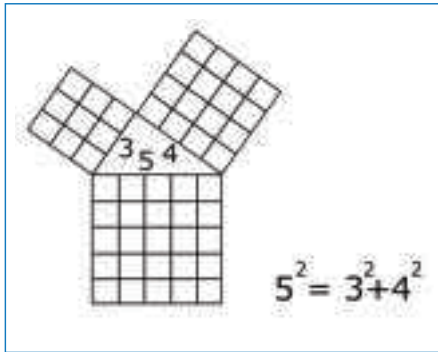
què treballaràs?

En acabar la unitat has de ser capaç de:

- Reconèixer unitats de mesura d'una àrea.
- Interpretar fórmules d'àrees de figures planes.
- Aplicar fórmules d'àrees de figures planes.
- Reconèixer unitats de mesura d'un volum.
- Interpretar fórmules de volums de cossos geomètrics.
- Aplicar fórmules de volums de cossos geomètrics.
- Representar figures geomètriques a partir de l'enunciat d'un problema.

72 1. Mesura d'àrees

En la unitat anterior vam veure la següent demostració geomètrica del teorema de Pitàgores



Observa que en aquesta demostració, els nombres 5^2 , 3^2 i 4^2 representen les àrees de tres quadrats construïts sobre la hipotenusa i els catets del triangle rectangle de la figura.

Així doncs, si la longitud de la hipotenusa mesura 5 unitats, l'àrea del quadrat corresponent mesurarà 5^2 **unitats quadrades**.

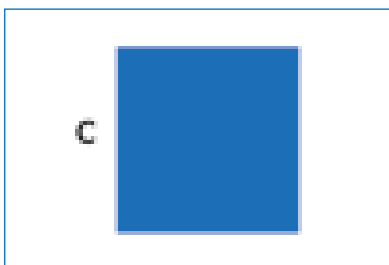
La taula següent mostra el valor de les àrees de cadascun dels quadrats anteriors segons la unitat que s'ha utilitzat per mesurar la longitud de la hipotenusa i dels catets.

UNITATS	Àrea del quadrat sobre la hipotenusa	Àrea del quadrat sobre el catet gran	Àrea de quadrat sobre el catet petit
cm	25 cm^2	16 cm^2	9 cm^2
m	25 m^2	16 m^2	9 m^2
Km	25 Km^2	16 Km^2	9 Km^2

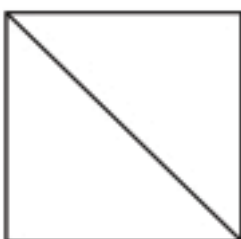
• Activitat d'aprenentatge 1

2. Àrea d'un quadrat

L'àrea d'un quadrat de costat c val c^2 . $A = c^2$.



L'àrea del quadrat és igual al quadrat del costat.



Si dibuixem una de les diagonals d'aquest quadrat se n'obtenen dues meitats.

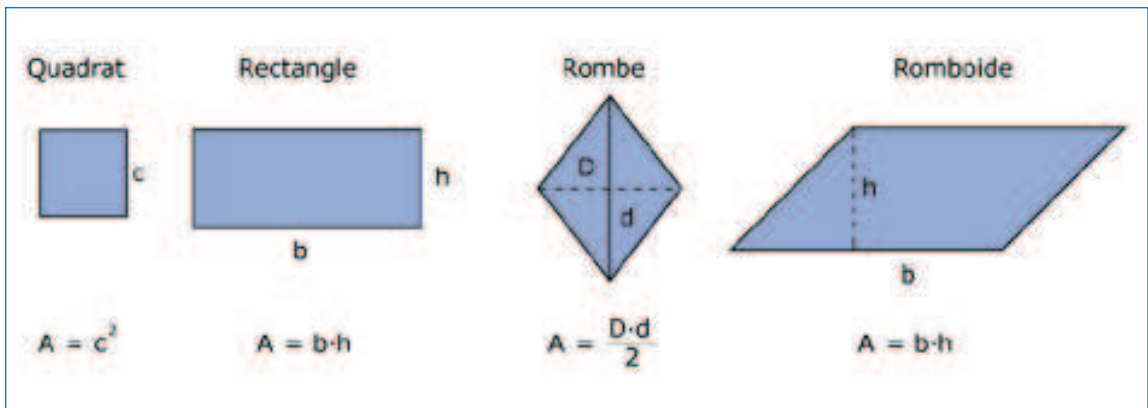
L'àrea de la meitat del quadrat valdrà la meitat de l'àrea del quadrat: $\frac{c^2}{2}$.

Fixa't que la meitat del quadrat és un triangle.

Per tant, l'àrea d'aquest triangle és $\frac{c^2}{2}$.

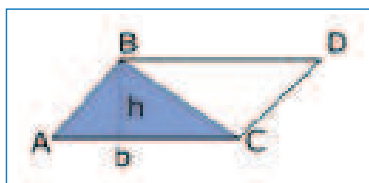
3. Àrea dels paral·lelograms

Un quadrat és un paral·lelogram. La manera com es troba l'àrea d'altres paral·lelograms és anàloga a la manera com es troba l'àrea d'un quadrat:



4. Àrea del triangle

Observa el paral·lelogram BACD de la figura. Hem traçat la diagonal BC i el paral·lelogram ha quedat dividit en dos triangles iguals, els triangles BAC i el BCD.



L'altura del paral·lelogram BACD i dels triangles BAC i el BCD és la mateixa.

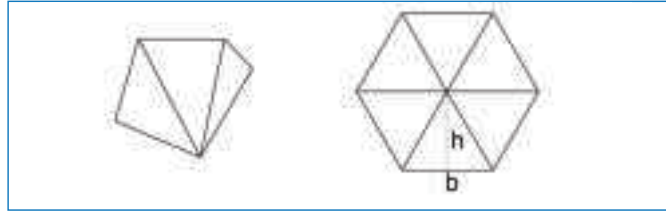
Fixa't que l'àrea del triangle és la meitat de l'àrea del paral·lelogram. Per tant, l'àrea del triangle és:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

• **Activitats d'aprenentatge 2, 3, 4, 5 i 6**

5. Àrea dels polígons

Per calcular l'àrea d'un polígon es pot recórrer a la seva triangulació. D'aquesta manera només cal calcular les àrees dels triangles que s'obtenen i sumar-les. Si el polígon és regular, els triangles que s'obtenen de la triangulació són tots iguals.



Si es vol calcular l'àrea d'un hexàgon regular només cal multiplicar per 6 l'àrea del triangle de base b i altura h :

$$\left(\frac{b \cdot h}{2}\right) \cdot 6$$

L'altura h del triangle és també l'apotema de l'hexàgon regular. D'aquesta manera la fórmula d'abans queda de la següent manera:

$$A = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{p \cdot a}{2}$$

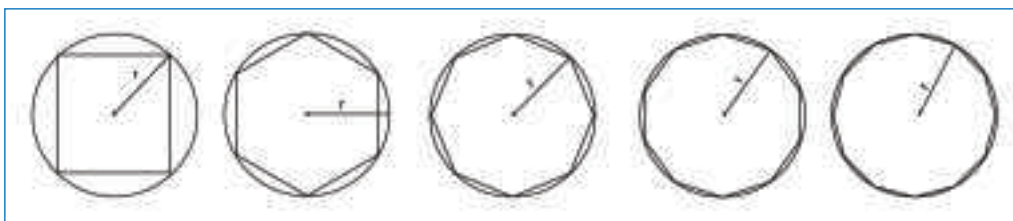
En general, l'àrea d'un polígon regular és la meitat del producte del perímetre per l'apotema del polígon.

• Activitat d'aprenentatge 7.

6. Àrea d'un cercle

Imagina't una circumferència de radi r , en la qual comencem a inscriure-hi polígons regulars cada vegada amb un nombre de costats més gran. Imagina't que pots repetir aquest procés infinites vegades. Sembla ser que cada vegada, el polígon inscrit s'acosta més a la circumferència: el perímetre del polígon seria la longitud de la circumferència i l'apotema seria el radi. Per tant, l'àrea del cercle seria l'àrea d'un polígon de perímetre la longitud de la circumferència i d'apotema el radi:

$$\text{Àrea del cercle} = \frac{\text{perímetre} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\text{longitud} \cdot \text{radi}}{2}$$



Recorda que la longitud de la circumferència és $2 \cdot \pi \cdot r$

Observa que finalment obtindràs la següent fórmula per a l'àrea del cercle:

$$\text{Àrea del cercle} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

$$\text{Àrea del cercle} = \pi \cdot r^2$$

• Activitats d'aprenentatge 8, 9, 10 i 11

7. Unitats de volum

Imagina que vols saber la quantitat de pluja que ha caigut en un metre quadrat. Per això construeixes una caixa quadrada d'un metre de llarg per un metre d'ample. T'adones que la quantitat d'aigua que ha caigut dins de la caixa assoleix una altura de 10 mm. Com que un metre són mil mil·límetres, el volum de l'aigua recollida serà:

$$V = \underbrace{10 \text{ mm}}_{\text{Altura}} \cdot \underbrace{1000 \text{ mm} \cdot 1000 \text{ mm}}_{\text{Àrea de la caixa}} = 10.000.000 \text{ mm}^3 = 10 \text{ dm}^3 \text{ per metre quadrat.}$$

Fixa't en la **relació que existeix entre les unitats de volum i les de capacitat**:

Unitats de volum	m³			dm³			cm³
Unitats de capacitat	kl	hl	dal	litre	dl	cl	ml

Segons aquestes equivalències podem dir que el volum total d'aigua que ha caigut ha estat de 10 litres per cada metre quadrat.

$$10 \text{ dm}^3 = 10 \text{ litres}$$

8. Àrea i volum d'un cub

Un cub té sis cares que són quadrats. Per tant, l'àrea del cub és sis vegades l'àrea d'aquest quadrat.

S'anomena **aresta** un costat comú a dues cares. En el cas del cub, l'aresta és comú a dos quadrats.

L'àrea del cub d'aresta a és $A=6a^2$.

El volum del cub d'aresta a és $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

9. Àrea i volum d'un ortòedre

L'àrea d'un ortòedre d'arestes a, b i c és

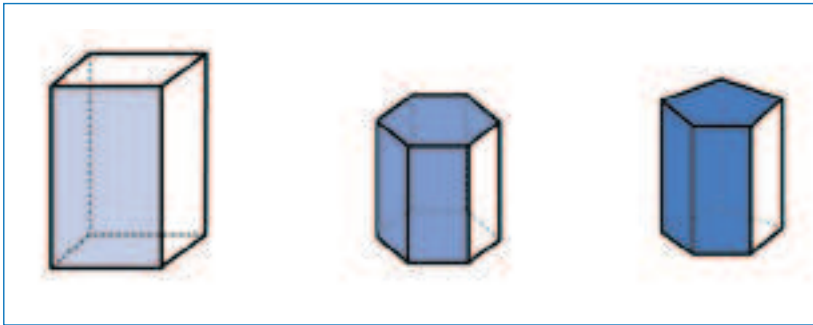
$$A=2(a \cdot c) + 2(b \cdot c) + 2(a \cdot b)$$

El volum d'un ortòedre d'arestes a, b i c és

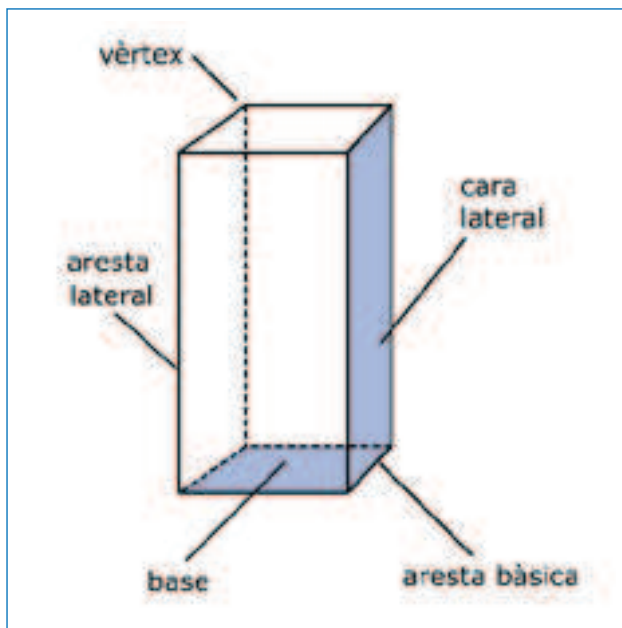
$$V = a \cdot b \cdot c.$$

10. Àrea i volum d'un prisma

Els cossos geomètrics següents són **prismes rectes**:



Els **elements d'un prisma** són:



L'àrea total (A_T) d'un prisma recte és igual a l'àrea lateral més l'àrea de les dues bases:

- L'àrea lateral (A_L) és igual al perímetre de la base per l'altura.
- L'àrea de la base (A_B) és l'àrea del polígon regular

Àrea total del prisma:

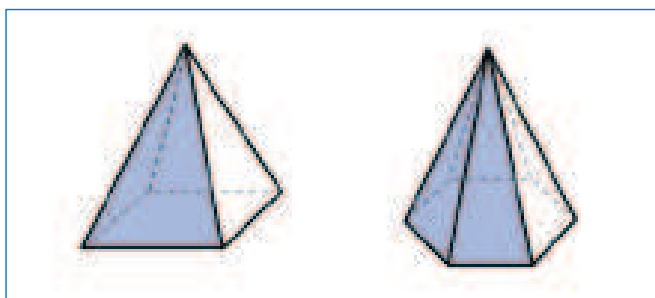
$$A_T = A_L + 2A_B$$

El **volum d'un prisma** és igual a l'àrea de la base per l'altura.

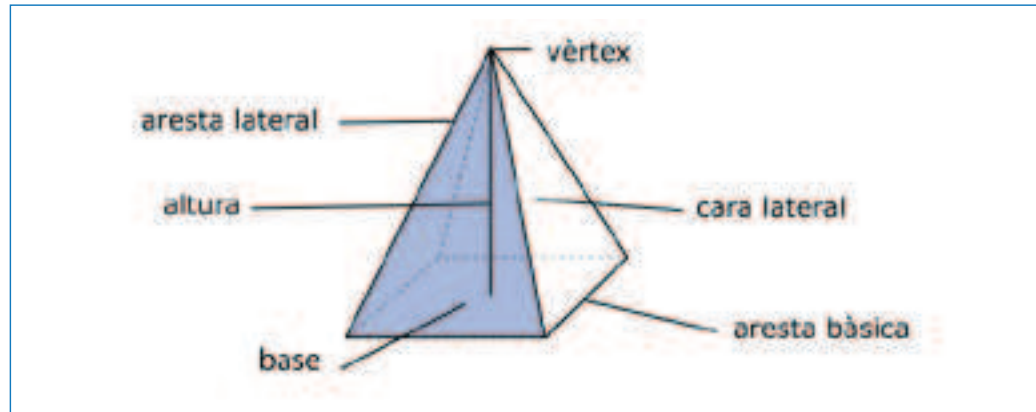
$$V_{\text{prisma}} = A_B \cdot h \quad \text{on } h \text{ és l'altura del prisma.}$$

11. Àrea i volum d'una piràmide.

Els cossos geomètrics següents són **piràmides rectes**.



Els **elements d'una piràmide** són:



L'àrea total d'una **piràmide recta** és igual a l'àrea lateral més l'àrea de la base:

- L'àrea lateral és la suma de les àrees dels triangles que componen les cares de la piràmide.
- L'àrea de la base és l'àrea del polígon regular.

Àrea total de la piràmide:

$$A_T = A_L + A_B$$

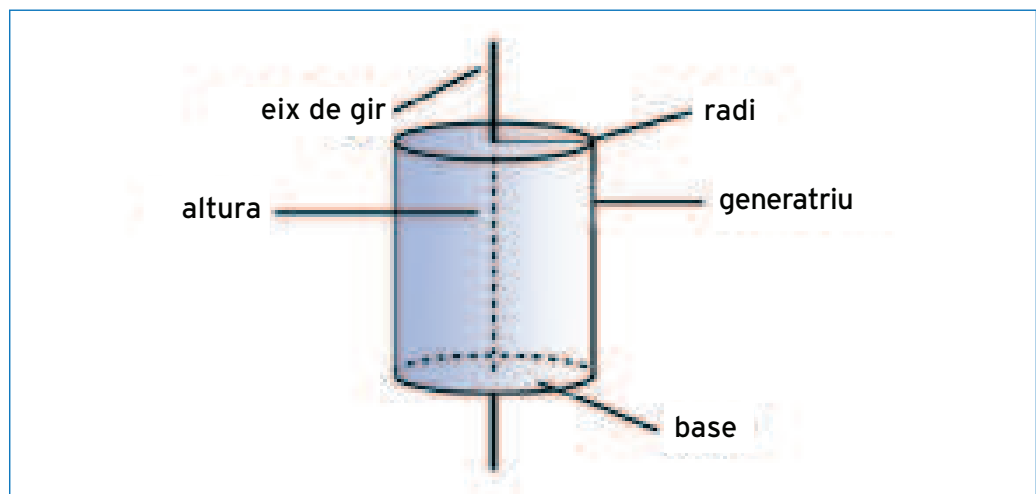
El **volum de la piràmide** és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura de la piràmide.

$$V_{\text{piràmide}} = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot A_B \cdot h \quad \text{on } h \text{ és l'altura de la piràmide.}$$

12. Àrea i volum d'un cilindre

Dibuixa un rectangle. Imagina que el fas girar sobre un dels seus costats. Obtindràs una nova figura que és un cos de revolució anomenat **cilindre**.

Els **elements d'un cilindre** són:



L'àrea total d'un cilindre és igual a l'àrea lateral més l'àrea de les bases.

• L'àrea lateral del cilindre és:

$$A_L = 2\pi R \cdot g = 2\pi Rg \quad \text{on } R \text{ és el radi i } g \text{ la generatriu.}$$

• L'àrea d'una de les bases és l'àrea d'un cercle: $A_B = \pi R^2$

Àrea total del cilindre:

$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi Rg + 2\pi R^2$$

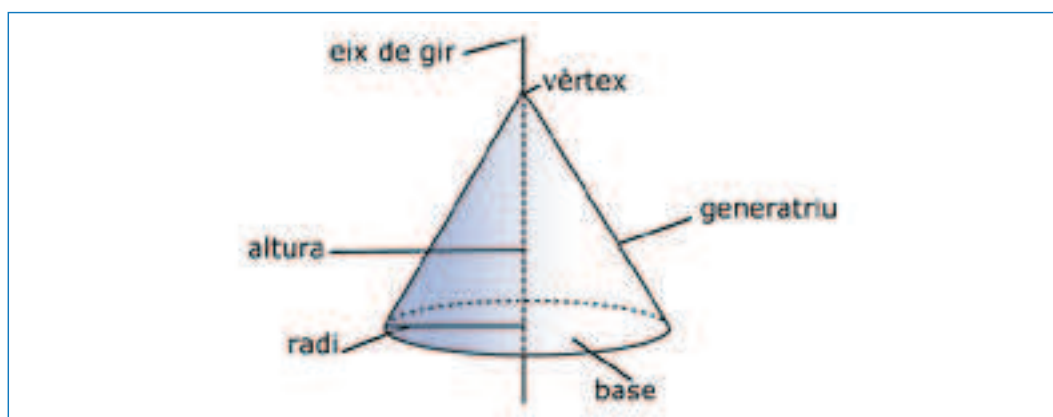
El **volum d'un cilindre** és igual al producte de l'àrea de la base per l'altura:

$$V_{\text{cilindre}} = \pi R^2 \cdot h \quad \text{on } h \text{ és l'altura del cilindre.}$$

13. Àrea i volum d'un con

Dibuixa un triangle rectangle. Imagina que el fas girar sobre un dels seus catets. Obtindràs una nova figura que és un con de revolució anomenat **con**.

Els **elements d'un con** són:



L'àrea total d'un con és igual a l'àrea lateral més l'àrea del cercle de la base.

• L'àrea lateral del con és: $A_L = \pi Rg$ on R és el radi i g la generatriu

• L'àrea del cercle és: πR^2

Àrea total del con :

$$A_T = \pi Rg + \pi R^2$$

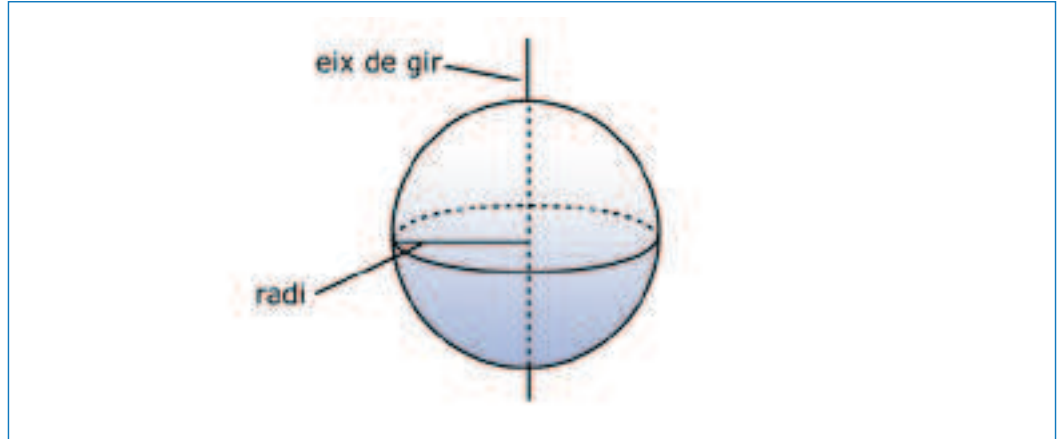
El **volum d'un con** és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura.

$$V_{\text{con}} = \left(\frac{1}{3}\right)\pi R^2 \cdot h \quad \text{on } h \text{ és l'altura del con.}$$

14. Àrea i volum d'una esfera

Imagina que fas girar un semicercle al voltant del seu diàmetre. La figura que obtindràs és un cos de revolució anomenat **esfera**.

Els elements d'una esfera són:



L'àrea d'una esfera és quatre vegades πR^2 . R és el radi de l'esfera.

$$A_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$$

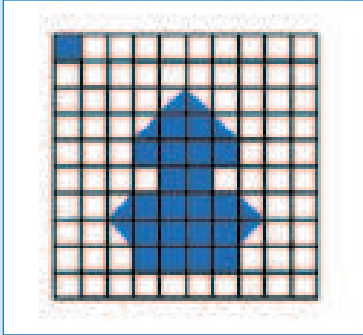
El volum d'una esfera és quatre terços de πR^3 .

$$V_{\text{esfera}} = \left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3$$

• **Activitats d'aprenentatge 12, 13, 14, 15 i 16**

Activitat 1

Calcula l'àrea de la figura prenent com a unitat d'àrea la quadrícula que hi ha indicada:

**Activitat 2**

Quina és l'àrea d'un triangle rectangle de catets 10 i 15 cm?

Activitat 3

Quant val l'àrea d'un triangle equilàter si el seu costat mesura 6 m?

Activitat 4

La diagonal d'un quadrat mesura 18 cm. Quant val la seva àrea?

Activitat 5

El costat d'un quadrat mesura 10 cm. Quants dm^2 mesura la seva àrea?

Activitat 6

Sobre un romboide de 100 mm^2 d'àrea tracem una de les diagonals. Quina serà l'àrea de cada un dels triangles que s'hi han format?

Activitat 7

Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de 20 cm de costat.

Activitat 8

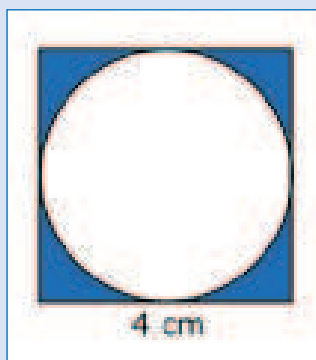
Volem enrajolar una habitació que té 2,4 m de llarg per 3 m d'ample amb rajoles quadrades de 60 cm de costat. Quantes rajoles necessitem?

Activitat 9

El radi d'una circumferència inscrita en un quadrat val 4 cm. Quant val l'àrea del quadrat?

Activitat 10

Observa la imatge següent. Quina és l'àrea de la part pintada de color blau?

**Activitat 11**

Quina és la mida del radi d'un cercle si la seva àrea val π m²?

Activitat 12

Quants litres d'aigua pot contenir un cub si la seva àrea total val 36 cm²?

Activitat 13

Calcula l'àrea total i el volum d'un prisma de base quadrada de costat 1 cm i d'altura 6 cm. Calcula el volum de la piràmide que té les mateixes dimensions que el prisma. Quina relació hi ha entre els dos volums?

Activitat 14

Quant ha de valer el radi d'una esfera que conté en la seva totalitat $\frac{4}{3} \pi$ litres d'aigua?

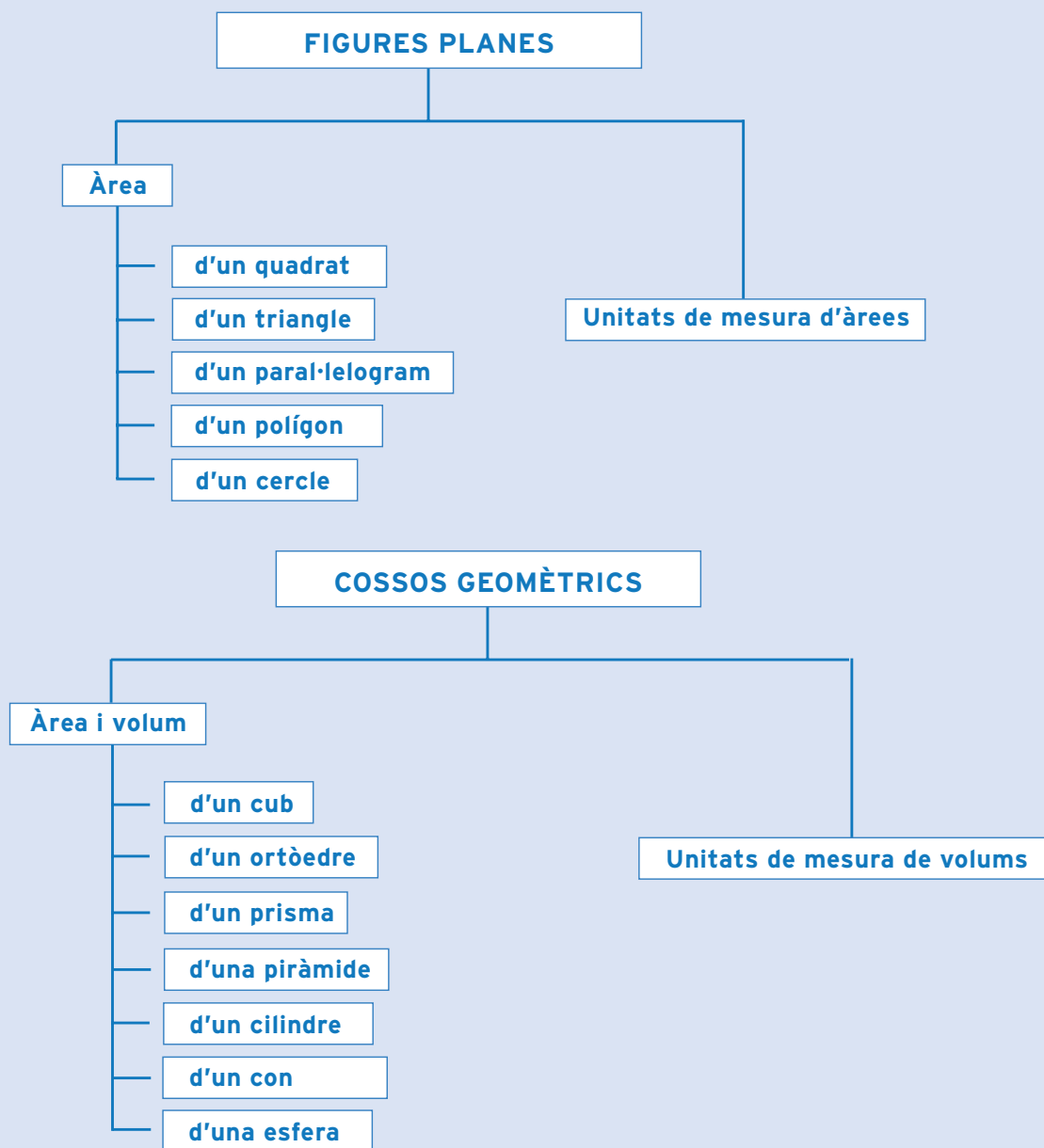
Activitat 15

Un cucurutxo de diàmetre 5 cm i d'altura 10 cm, quants litres de gelat de vainilla pot contenir en total?

Activitat 16

Una llauna cilíndrica de refresc té 350 c.c. de capacitat. Calcula els cm^2 de planxa que s'han d'utilitzar en la seva elaboració sense tenir en compte les tapes. (Nota. 1c.c.=1 centímetre cúbic)

què has treballat?



com

ho porto?

Omple la graella següent posant una creu on correspongui.

En acabar la unitat, sóc capaç de...

	Bé	A mitges	Malament
Reconèixer unitats de mesura d'una àrea.			
Interpretar fórmules d'àrees de figures planes.			
Aplicar fórmules d'àrees de figures planes.			
Reconèixer unitats de mesura d'un volum.			
Interpretar fórmules de volums de cossos geomètrics.			
Aplicar fórmules de volums de cossos geomètrics.			
Representar figures geomètriques a partir de l'enunciat d'un problema.			