

Connecta't a la Recerca

APROPEM LA RECERCA EDUCATIVA A LES AULES



ACTIVITATS D'APRENENTATGE I D'AVALUACIÓ EN LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

(2013-2017)

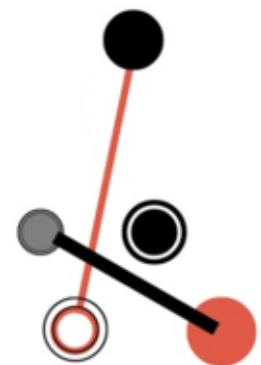
Presentació i proposta pràctica de la tesi doctoral

CESIRE
31 maig 2018

Joana Villalonga Pons - Jordi Deulofeu Piquet
Universitat Autònoma de Barcelona

Presentació de la tesi

- Punt de partida ⇒ Currículum competencial
- Què buscàvem ⇒ Objectiu principal
- De què disposàvem ⇒ Proposta d'estudi
- Què hem fet ⇒ Aplicació i anàlisi
- Què hem observat ⇒ Resultats obtinguts
- Què en podem dir ⇒ Conclusions observades

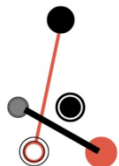


Curriculum Competencial (2009-2017)

3

La resolució de problemes (RP)

- **Activitat matemàtica més genuïna**
 - Posa en joc i prenen significat tots els aspectes de l'educació matemàtica.
- **Procés clau dintre del treball matemàtic**
 - dóna lloc a la 1a de les dimensions competencials, més enllà dels blocs de continguts
- **Intervenció educativa**
 - Cal ensenyar matemàtiques per a resoldre problemes
 - Cal ensenyar matemàtiques a partir i a través de la resolució de problemes
 - Generar a l'aula un ambient de treball basat en la resolució de problemes
 - Ha d'estimular l'autonomia de l'alumne

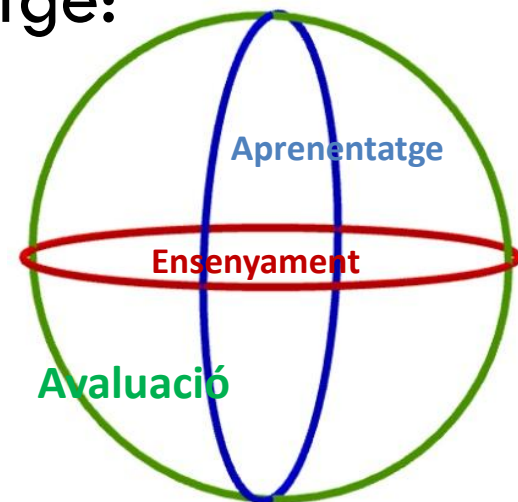


Curriculum Competencial (2009-2017)

4

L'avaluació

- dirigida a millorar l'aprenentatge de l'alumnat
 - els alumnes han de conèixer els objectius d'aprenentatge i els criteris i procediments amb els quals se'ls avaluarà
- regular l'ensenyament i l'aprenentatge:
 - que mestres (avaluació formativa) i alumnes (avaluació formadora) puguin identificar les dificultats que sorgeixen al llarg del procés educatiu i prendre les decisions oportunes per assolir els objectius.

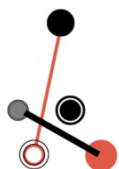


Marc competencial de l'educació

5

La RP esdevé per als alumnes un mitjà per a:

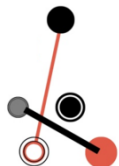
- atraure l'interès i la implicació matemàtica
- integrar i manipular els coneixements matemàtics
- **aprendre a pensar matemàticament i actuar de manera conseqüent**
 - Prendre consciència del que implica resoldre un problema per, de manera autònoma, anticipar el procés que pot suposar en situacions futures
 - Requereix d'un sistema d'auto-regulació que permet el reconeixement i l'autogestió, en particular prendre decisions de manera responsable.



Objectiu

6

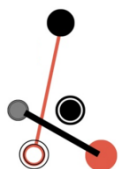
Recerca i anàlisi de **pràctiques i instruments**
que afavoreixin una **funció reguladora**
de **l'aprenentatge i l'ensenyament**
de la **resolució de problemes**
(entesa com a **procés**)
en l'educació obligatòria.



Què es sap?

7

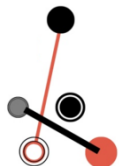
- Què entenem per problema matemàtic?
- Què entenem per resoldre un problema matemàtic?
- Disposem d'instruments/dinàmiques que promoguin una avaluació reguladora de l'acció educativa?
 - Quines?
- Com ho lliguem?



Problema matemàtic

8

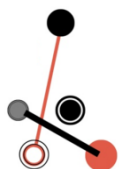
- qüestió desconeguda
- plantejada a través d'un conjunt de dades en context
- sense resposta immediata o procés matemàtic rutinari prefixat de resolució
 - problema $\neq$ exercici
- activa coneixements matemàtics
 - bàsics, heurístics i d'instruments matemàtics
- estimula la voluntat de treballar-hi
 - relativa a les capacitats i habilitats
- convida a la recerca
 - indueix la curiositat i la indagació
 - obtenir possibles solucions



Resoldre un problema matemàtic

9

- activitat personal i creativa dirigida a objectius
- promou un procés no linial
- es caracteritza per moments d'entrebanc
 - bloqueig i error
- Comprèn actuar i implicar-se
 - Etapes (nivells d'implicació) i accions vinculades
- Requereix decisió i control
 - Coneixements matemàtics: continguts, heurístiques i eines de treball
 - Habilitats: pensaments creatiu i crític, comunicació assertiva, flexibilitat, auto-coneixement, presa de decisions, control d'emocions i sentiments.
- Està influenciat per l'entorn:
 - Experiència y creences



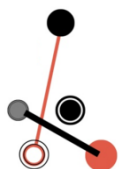
Sistema d'autoregulació per a la RP

10

Diferència principal entre resolutors eficients i poc eficients

RESOLUTOR CARACTERÍSTIQUES

més eficients	– més temps comprenent i analitzant la situació del problema que calcular – reflexionen contínuament sobre l'estat de resolució
menys eficients	– mostren inseguretat davant la resolució d'un problema – no acaben els processos iniciats – realitzen tasques aplicant maneres diferents o sense raonar, amb manca de coherència i ordre, seguint processos algorítmics buits.



Autoregulació de la RP

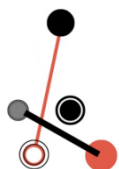
11

➤ Evidència:

- Absència de mecanismes per a una avaluació reguladora de la RP

➤ Necessitat:

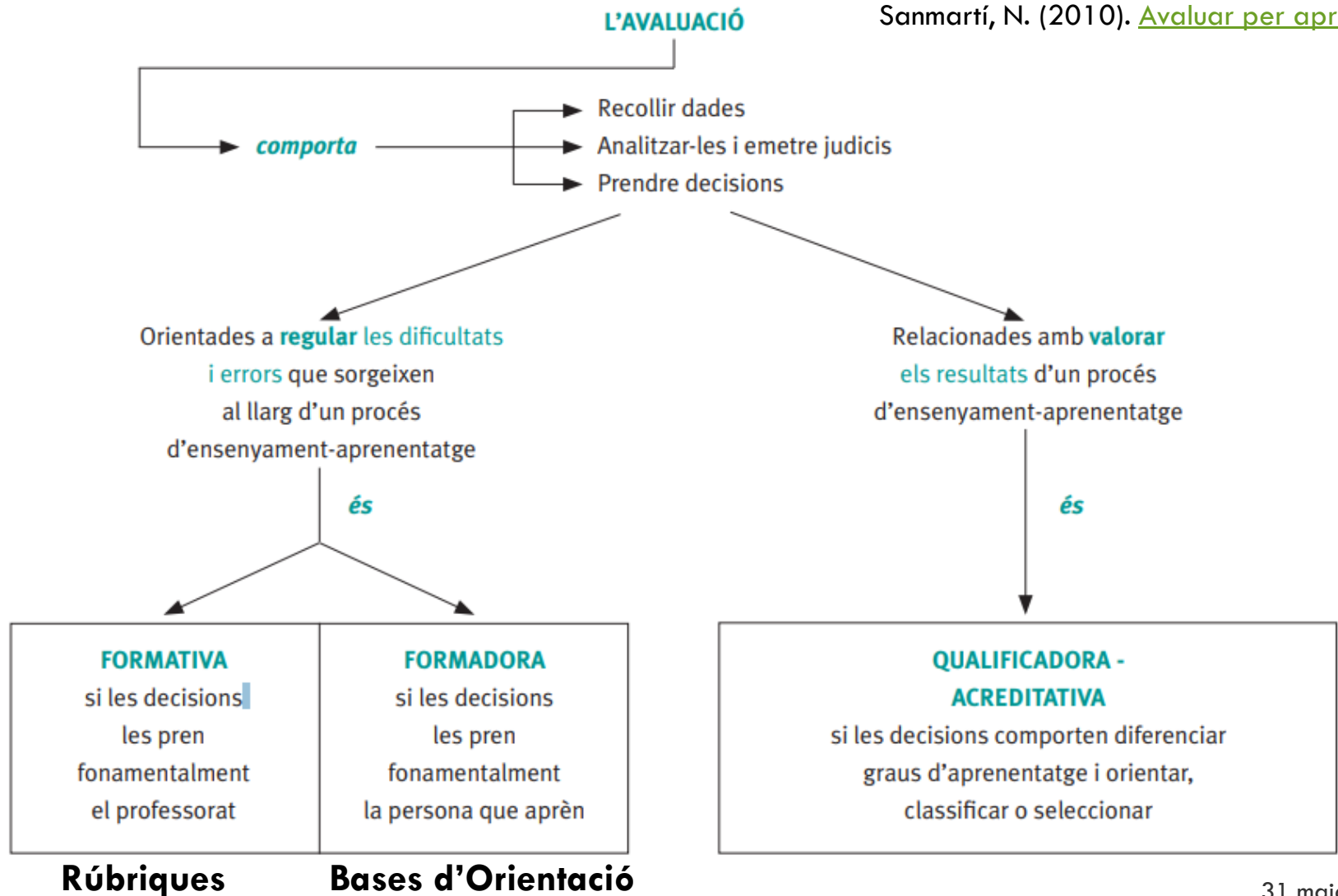
- Mecanismes que ajudin als alumnes a regular les seves accions
 - Promoure que els alumnes aprenguin a avaluar i regular el seu propi pensament i, amb això, desenvolupar les seves habilitats necessàries per a la RP:
 - interpretar la tasca, identificar subobjectius, planificar alguna estratègia, avaluar els seus desenvolupaments



Avaluació reguladora

12

Sanmartí, N. (2010). [Avaluar per aprendre](#)



Instruments de regulació

13

Sanmartí, N. (2010). [Avaluar per aprendre](#)

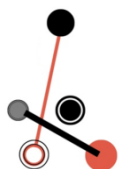
➤ Rúbrica

- matriu que explicita els criteris de realització relacionats amb l'avaluació d'una competència i els criteris de resultats corresponents als diferents nivells d'assoliment

➤ Base d'Orientació (BO)

- instrument que resumeix de manera gràfica i ordenada l'acció a realitzar. Finalitat promoure que els estudiants anticipin i planifiquin les operacions que han de dur a terme per resoldre amb èxit diferents tipus de tasques escolars.

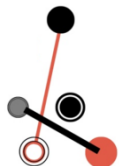
*En què s'ha de pensar o què s'ha de fer
per realitzar un determinat tipus de tasca?*



Proposta en la transició EP-ESO

14

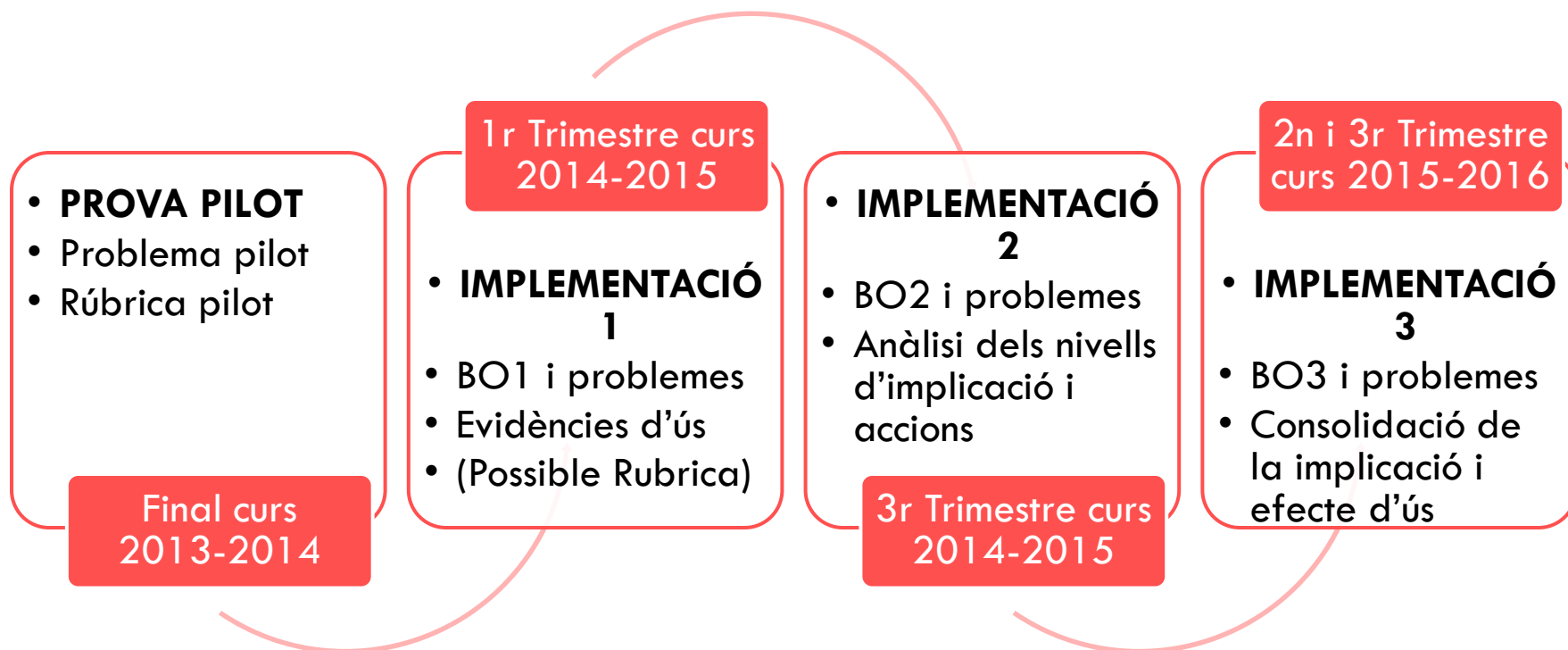
- Trobar un conjunt de problemes matemàtics que promoguin el pensament matemàtic i l'actuació conseqüent
- Estudiar el procés de generació i integració d'aquestes eines d'avaluació reguladora en la pràctica de la resolució de problemes matemàtics.



Recerca: cicles d'implementació i anàlisi

15

Alumnes d'aules de 6è de Primària i aules de 1r d'ESO de diferents centres de Barcelona van resoldre problemes per escrit considerant una BO



Dificultat d'aplicació d'una rúbrica

16

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Aleshores, ens demanem:

1. Quins haurien de ser aquests dos nombres perquè en sumar-los donin la suma més gran possible? Com ho saps? *Perquè ho e sumat*
2. I quins haurien de ser aquestes dos nombres perquè donin la suma més petita possible? Com ho has fet per saber-ho? *perquè sumat*

$$\begin{array}{r} 957 \\ + 886 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 957 \\ + 836 \\ \hline 1793 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 579 \\ + 368 \\ \hline 947 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 957 \\ + 836 \\ \hline 1793 \\ 579 \\ + 368 \\ \hline 947 \\ 7686 \\ \hline 8100.52 \end{array}$$

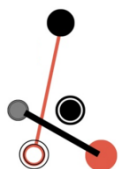
➤ Focus: Base d'Orientació (BO)

BO per a la RP

17

Seqüència d'accions necessàries basades en el comportament de resolució de problemes de resolutors experts que, d'acord amb l'edat i les necessitats dels alumnes pels que s'elabora pretén proporcionar-los, de manera emergent, independència i autonomia a l'hora de resoldre problemes matemàtics.

- Integra
 - Sub-objectius de resolució: etapes d'implicació
 - suggerències de com procedir: accions
- S'adapta
 - Edat, objectius, i nivell d'assoliment dels alumnes



NIVELLS IMPLICACIÓ	ACCIONS
Comprenc el problema	Identifico i entenc les dades, les magnituds i les unitats que apareixen en el problema.
	Expresso (penso i reescric) el problema d'alguna manera (resum, esquema, gràfic, dibuix...) que m'ajudi a entendre'l el millor possible
Estructuro i porto a terme un pla d'acció	Planifico i porto a terme com resoldre el problema.
	Busco (recordo, dissenyo...) i aplico estratègies que em puguin ajudar a resoldre el problema seguint la planificació que he fixat.
	Busco (recordo, dissenyo...) i aplico algoritmes i mecanismes per abordar les diferents estratègies.
Reviso	Reviso el que he fet. Puc seguir els diferents passos de resolució, estan ben explicats i els puc entendre.
	Si no m'ensurto, detecto on m'equivoco o em perdo i torno a plantejar aquestes parts.
	Una vegada resolt, raono si podria fer-se d'altres maneres.
	M'asseguro de si pot haver-hi altres solucions o si només m'hi ha una.
	Dono totes les solucions possibles, explicant si són o no adequades i si tenen sentit.

Problemes: Exemple 1

19

La manta de la iaia

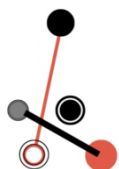
La meva àvia és una especialista del ganxet i li encanta fer mantes. Encara no he vist l'última que ha muntat, però m'ha dit que l'ha fet enganxant peces quadrades de la mateixa mida, però de diferents estils.

M'ha explicat que per fer la vora de la manta ha fet servir una dotzena de peces de fons verd amb un rombe dibuixat i una dotzena de peces de fons blanc amb piquets verds. Les ha posat de manera alternada: una de fons verd, una de fons blanc,... i de manera que a les quatre cantonades sempre hi ha una peça blanca amb piquets.

1. Com pot haver distribuït aquestes peces per fer la vora, l'àvia?

També m'ha dit que la part interior de la manta està formada per peces quadrades de la mateixa mida que les de la vora però que, en canvi, són de diversos colors.

2. Puc saber quantes peces d'altres colors ha fet servir l'àvia per acabar la part interior de la manta? Com ho puc saber?



Evidències d'ús

20

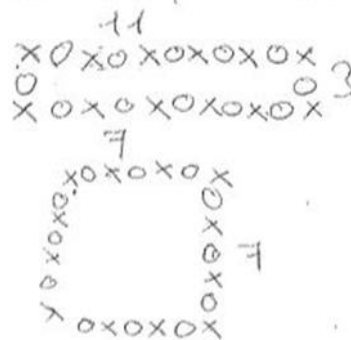
Ús de BO1

Estudi d'un cas particular (1r ESO)

C1:

- Selecciona i entén les dades estrictament necessàries.
- Expressa el problema de manera particular.
- Busca estratègies per establir un pla: compte, dissenya i utilitza una codificació pròpia, senzilla i clara.
- Recondueix aquells dissenys que no s'ajusten a les condicions.
- Explora la possibilitat d'altres solucions (totes).
- Verbalitza conclusions pròpies.

12 peces de fons verd + 12 peces de fons blanc = voran
Sempre té que haveri peces blanques a la cantonada.
 $12 + 12 = 24$ peces en total



x = blanc
o = negre



Hi ha diferents maneres de solucionar, hi ha algunes quadrades i algunes rectangulars. Sempre té que ser nombres senars.

2) Si la manta fos de 3x11, serien 33 peces en total.

x	o	x	o	x	o	x	o	x	o	x
o		o		o		o		o		o
x	o	x	o	x	o	x	o	x	o	x

$$11 - 2 = 9$$

$$3 - 2 = 1$$

$$24 + 9 = 33$$

$$9 \times 3 = 27$$

$$27 - 24 = 3$$

Evidències d'ús

21

C2:

- Reprèn la 1a de les seves configuracions i procedeix de la mateixa manera en les altres dues.
- Identifica dades necessàries per al cas en qüestió.
- Completa la configuració gràfica d'acord amb les noves dades.
- Trasllada la configuració gràfica a una expressió numèrica.
- Busca estratègies de càlcul en acord amb la representació.
- Comprova el seu resultat numèric amb l'observat.
- Detecta la seva confusió amb el que es demana, reconduïx la seva interpretació i rectifica els errors relacionats.
- Busca estratègia alternativa.

Si la manta fos de 7×7 , serien ~~49~~²⁵ peces d'altres colors.

x	o	x	o	x	o	x
o	m	m	m	m	m	o
x	m	m	m	m	m	x
o	m	m	m	m	m	o
x	m	m	m	m	m	x
o	m	m	m	m	m	o
x	o	x	o	x	o	x

$$24 + 25 = 49$$

$$25$$

$$49 \times 7 \times 7 = 49$$

$$49 - 24 = 25$$

Per cada costat
resto 2 peces.

$$\begin{array}{r} 7 - 2 = 5 \\ 7 - 2 = 5 \\ \hline 25 \end{array}$$

Si la manta fos de 9×5 , serien 21 peces d'altres colors.

x	o	x	o	x
o	m	m	m	o
x	m	m	m	x
o	m	m	m	o
x	m	m	m	x
o	m	m	m	o
x	m	m	m	x
o	m	m	m	o
x	o	x	o	x

$$9 \times 5 = 45$$

$$45 - 24 = 21$$

$$\begin{array}{r} 9 - 2 = 7 \\ 5 - 2 = 3 \\ \hline 21 \end{array}$$

NIVELLS IMPLICACIÓ	ACCIONS
Comprenc el problema	Assenyalo les preguntes que he de respondre i entenc tot allò que se'm demana que faci.
	Assenyalo les dades i m'asseguro que les entenc.
	Expresso el problema per entendre'l millor fent un dibuix, esquema, diagrama... (el que em sembli més adequat) i faig proves si m'és necessari.
Per a cada pregunta formulada:	
Tinc un pla d'acció	Penso alguna estratègia de resolució a partir de la representació i les proves o exemples que he fet, i tracto d'aplicar-la.
	Trobo les dades i els raonaments i/o algorismes que necessito per aplicar l'estratègia.
	Aplico l'estratègia i l'escric de manera que s'entengui tot allò que he pensat.
Reviso la meva tasca	Si no me'n surto, detecto on m'encallo o m'equivoco i aplico una nova estratègia (amb tot el que necessiti).
	Una vegada resolt, • investigo si hi ha altres solucions i les trobo. Si només n'hi ha una, raono per què no n'hi ha més. • raono si es podria fer d'altres maneres.
	Rellegeixo què he fet, i m'asseguro que ho explico tot i que responc de manera raonada i que s'entén relacionant-ho, si cal, amb la resta de preguntes i tasques demanades.

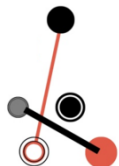
Problemes: Exemple 2

23

La suma i el producte de tres xifres més gran

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Quins són aquests dos nombres si volem obtenir la suma i la multiplicació més grans possibles a la vegada? Com has arribat a aquesta conclusió? Explica-ho.



Consolidació de les accions

24

Ús de BO2

Estudi de casos particulars
(6è EP i 1r d'ESO)

Situacions d'entrebanc identificades

No entenc l'annunci, perquè diu que ho has de fer a la vegada,
i no sé si he de sumar, i després multiplicar el resultat, o als
dos nombres sumar-los a part i després multiplicar-los a part.

El que entenc és:

$$965 \cdot 873 = 842.445$$

$$(965 \cdot 875 = 842.625) - \text{Resultat final}$$

– Manca de comprensió

– Representacions inadequades

– Estratègia inadequada

– Dades o raonaments inapropiats

– Errors d'aplicació

– Explicacions imprecises

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

$$\begin{array}{r} + 963 \\ 875 \\ \hline 1838 \end{array}$$

donat

~~10. Crec que 1838 és la suma més gran que~~

Conformitat d'implicació

25

Ús de BO3

Estudi general . Aula de 6è

Seguiment explícit de la BO3 per dos alumnes

D1.	✓	✓
D2.	✓	✓
D3.	si però m'ha costat	si però m'ha costat
D4.	✓	✓
D5.		✓
D6.		Regular per que m'ha costat

Reconducció de l'entrebanc
Verbalització d'afecte

Correspondència entre el nombre d'accions de la BO3 i donar solució a les preguntes del problema

22 resoluciones con el uso de BO3		Solucions correctes a les dus qüestions		
		0	1	2
Nombre d'accions de la BO3	0 — 6	5	3	0
	7 — 12	3	2	9
Probabilitat Exacte de Fisher p = 0.008				

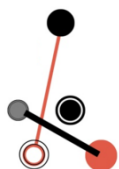
Aquells alumnes que van aplicar ≥ 7 accions de les 12 de la BO3, van donar una solució correcta a les dues parts del problema

Anàlisi quantitatiu no generalitzable però significatiu en mostres petites, que confirma les evidències observades amb anterioritat

Conclusions sobre la RP a l'aula

26

- El propòsits d'aprenentatge del problema
 - atraure l'interès, utilitzar coneixements, pensar per actuar
- La gestió del treball dels problemes
 - periodicitat, intervenció del docent, relació entre els alumnes, mode d'avaluació...
- La formulació del problema
 - disponibilitat de recursos materials, llenguatge i suports visuals, naturalesa de la informació...
- El grau d'accessibilitat d'un problema
 - grau de coneixements mínims per abordar cada etapa de resolució, varietat de processos de resolució que promou, gradació del nivell de profunditat de resposta, diferents solucions...



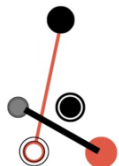
Conseqüències d'ús d'una BO en la RP

27

En els alumnes, l'ús d'una BO adequada junt amb una gestió convenient de la mateixa afavoreix el desenvolupament de la seva competència en resolució de problemes.

Permet, al resolutor no expert a:

- mantenir l'objectiu a assolir
- considerar i indagar entre els coneixements matemàtics de què disposa,
- proporcionar seguretat, control i serenitat
- organitzar la tasca que pretén desenvolupar sense inhibir la seva creativitat
- reflexionar la pròpia pràctica
- identificar i reconduir moments d'entrebanc
- **verbalitzar les seves idees i pensaments**



Conseqüències d'ús d'una BO en la RP

28

Als docents, els proporciona informació fonamental per avaluar i adaptar l'acció educativa de manera competent, en fer possible l'obtenció de resolucions més completes d'acord amb la BO utilitzada

L'ús adequat d'una BO orienta, fa coherents i evidencia les tres accions fonamentals, i cícliques, de l'activitat docent.

- Escollir i adaptar els problemes
- Adequar la BO

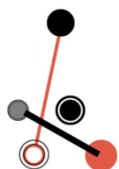


Conseqüències d'implementació

29

La implementació efectiva d'una BO per a la RP no és automàtica.

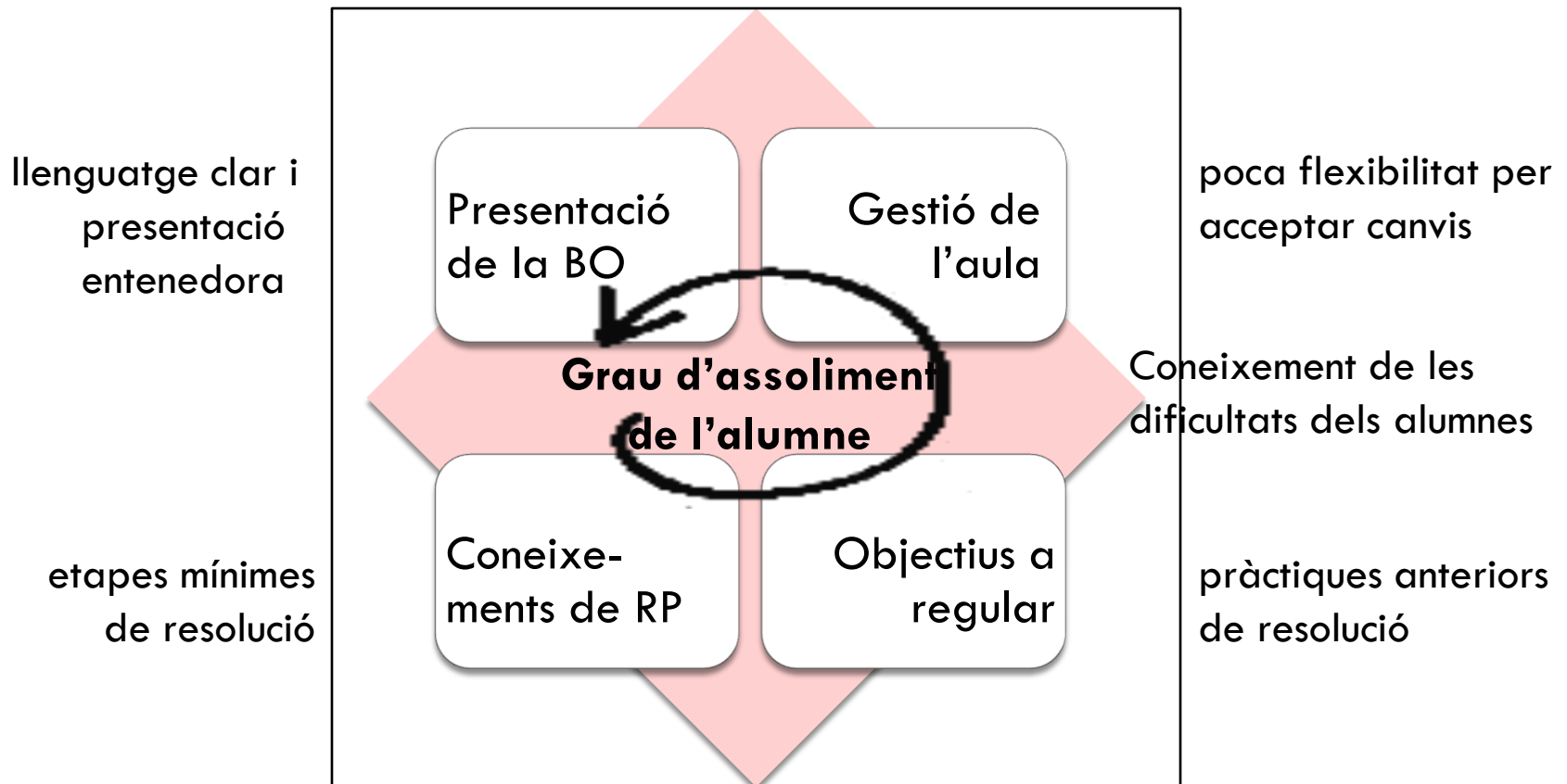
- Ús constant i significatiu de la BO
- Temps per a permetre la seva familiarització
- Implicació docent:
 - revisió constructiva
 - adequació constant de la BO als assoliments i dificultats dels alumnes
 - El propi anàlisi permet extreure pautes de com afinar la BO quan un alumne així ho requereix (ex. Entrebancs)



Conseqüències de generació/adequació

30

La generació i adaptació d'una BO no és senzilla. Depèn de diversos factors que cal revisar de manera contínua:



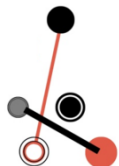
Factors influents en la generació d'un BO per a la RP

Etales mínimes de resolució

31

Atenent **què suposa resoldre un problema**, una BO per a la RP hauria de:

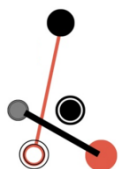
- Esser construïda d'acord a les etapes mínimes de resolució
 - nivells d'implicació de la BO
- Contedir totes aquelles accions que se desitja que els alumnes desenvolupin amb la pràctica de resoldre un problema, com a descriptors d'aquestes etapes
 - accions de la BO
- Reflectir continuïtat no lineal però vinculant entre les etapes en què cal implicar-se i les accions a realitzar
 - Les etapes s'inicien de manera successiva però conviuen fins a finalitzar la resolució.
 - les accions fan reals (operacionalitzen) les etapes



Etaques mínimes de resolució

32

IMPLICACIÓ		ACCIONS		
NIVELLS	SUBNIVELLS	DESENVOLUPAMENT	CONEXIÓ	COMPREENSIÓ
Comprendre el problema	Familiaritzar-se:	identificar, assenyalar, separar, entendre, aclarir, clarificar	jugar, manipular, fer poves, provar	escriure, anotar, detectar, localitzar, tornar, reiniciar
	Organitzar:	expressar, representar, plantejar, introduir, profunditzar		
Tenir un pla d'acció	Buscar:	observar, recordar, examinar, combinar, repetir, canviar, comparar, apropiarse, dissenyar, apuntar, intentar	revisar, repassar, analitzar, justificar	
	Convencer:	estructurar, argumentar, raonar, detallar, documentar		
Validar el que he fet	Interpretar:	comprovar, verificar, refutar, consolidar, completar		
	Evaluar:	millorar, simplificar, estendre, incorporar, utilitzar		

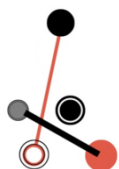


Interès i Qüestions futures

33

Des de 1r d'EP a 4t d'ESO:

- Generar un banc de problemes que promoguin la resolució de problemes com dimensió competencial
 - treballar la RP com a procés que permet desenvolupar el pensament matemàtic i l'actuació conseqüent.
- L'adequació continua, gradual i coherent de possibles BO per a la RP en els diferents cursos de l'educació obligatòria
- Generar possibles rúbriques d'avaluació d'acord amb les BO i problemes de treball establerts.



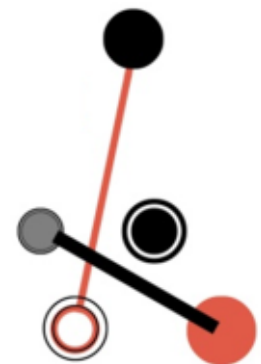
Proposta pràctica

Per etapes i en grups de 4:

- Ed. Primària: Cicle Inicial i Cicle Mitjà
- Ed. Primària: Cicle Superior
- Ed. Secundària: 1r i 2n
- Ed. Secundària: 3r i 4t

Tasques:

- Analitzar el problema proporcionat d'acord a l'etapa
- Treballar sobre una possible BO i com integrar-la a l'aula
- Presentació de les reflexions



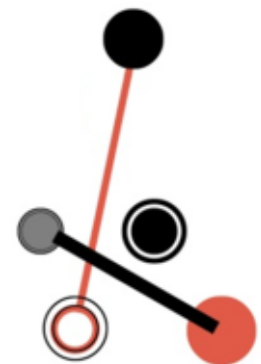
Propostes de problemes

Problema. La suma més gran.

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Quins han de ser aquests dos nombres perquè en sumar-los donin la suma més gran possible?

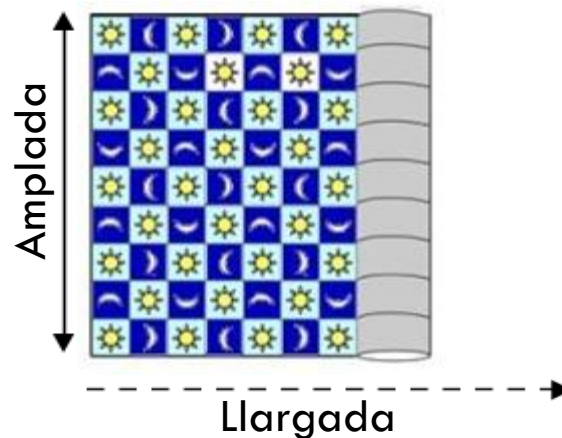
Explica per què.



Propostes de problemes

Problema. La gran catifa de Sols i Llunes

L'Arnau ha comprat una catifa molt gran de 6 m de llarg i de 3,6 m d'ample. La catifa, com es pot veure en la part desplegada que mostra la imatge, està formada de petits quadrats que contenen el dibuix d'un Sol o d'una Lluna.



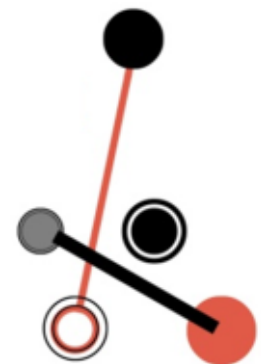
1. Quan la catifa estigui desplegada del tot, quants quadradets s'hi podran veure en total? Explica com ho has fet per saber-ho.
2. De tots aquests quadradets, es pot saber quants contindran un Sol i quants una Lluna? Raona per què sí o per què no i, en cas que es pugui saber, digues quants en contindrà de cada tipus.

Propostes de problemes

Problema. La suma i el producte de valor més gran.

Amb les xifres 3, 5, 6, 7, 8, 9, i sense repetir-ne cap, podem formar alhora dos nombres de tres xifres cadascun. Per exemple, el 368 i el 579.

Quins han de ser aquests dos nombres per tal que la seva suma i el seu producte siguin els més grans possible? Explica com has arribat a aquesta conclusió.





CESIRE
31 maig 2018

MOLTES GRÀCIES!

Joana Villalonga Pons; joeneta@gmail.com

Jordi Deulofeu Piquet; jordi.deulofeu@uab.cat

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona